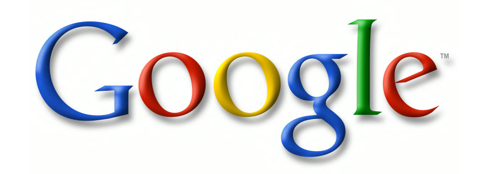
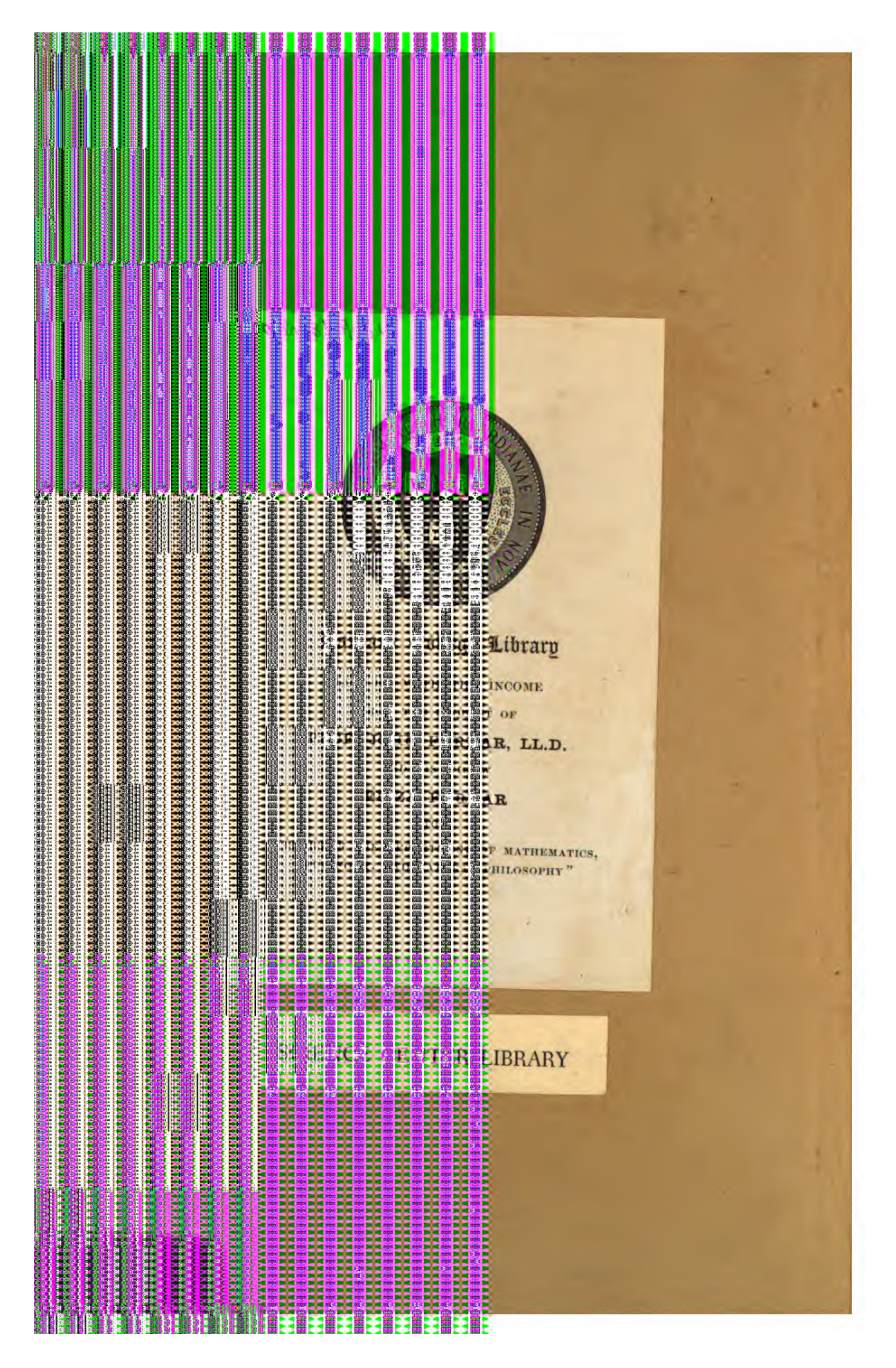
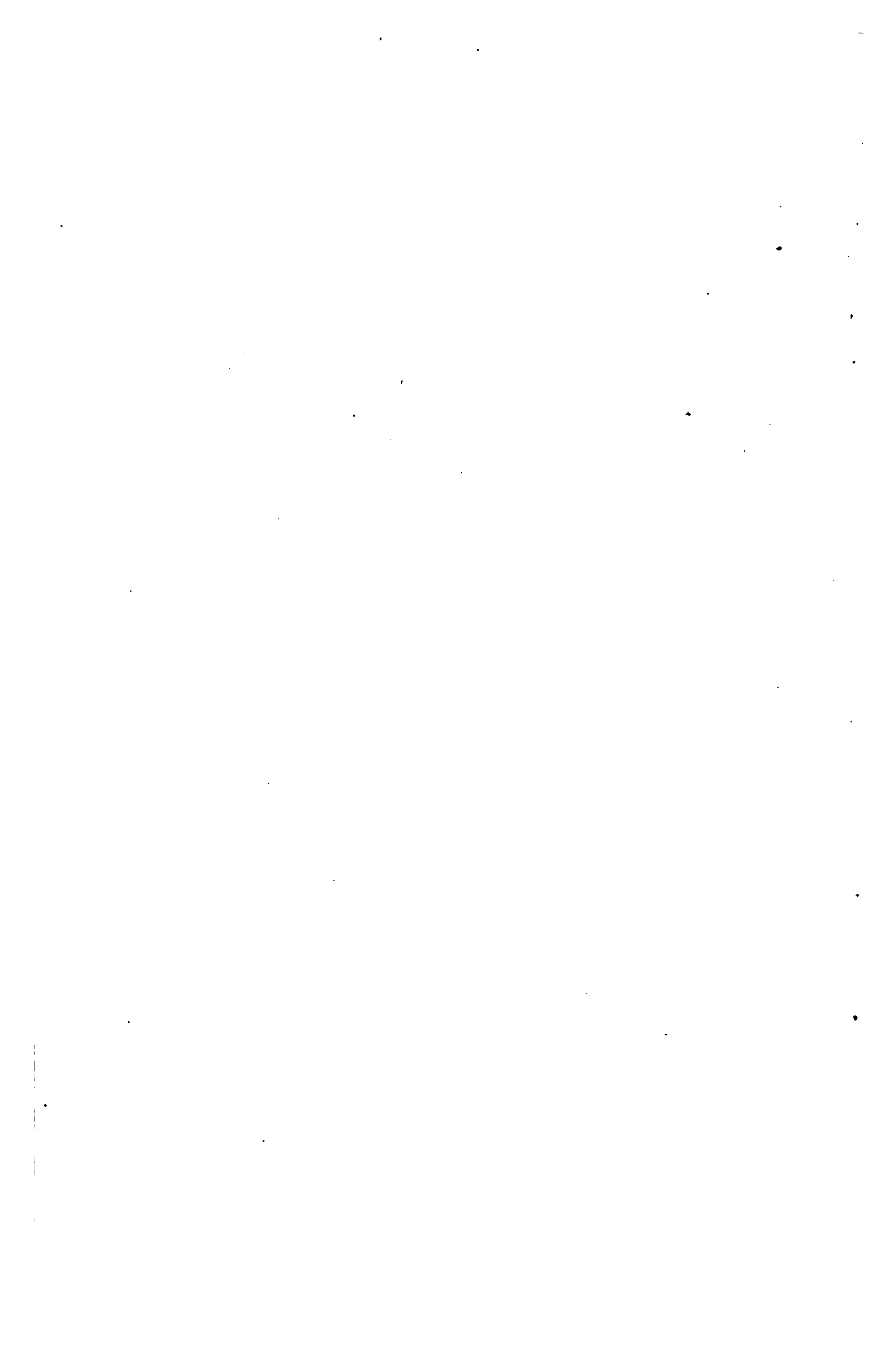
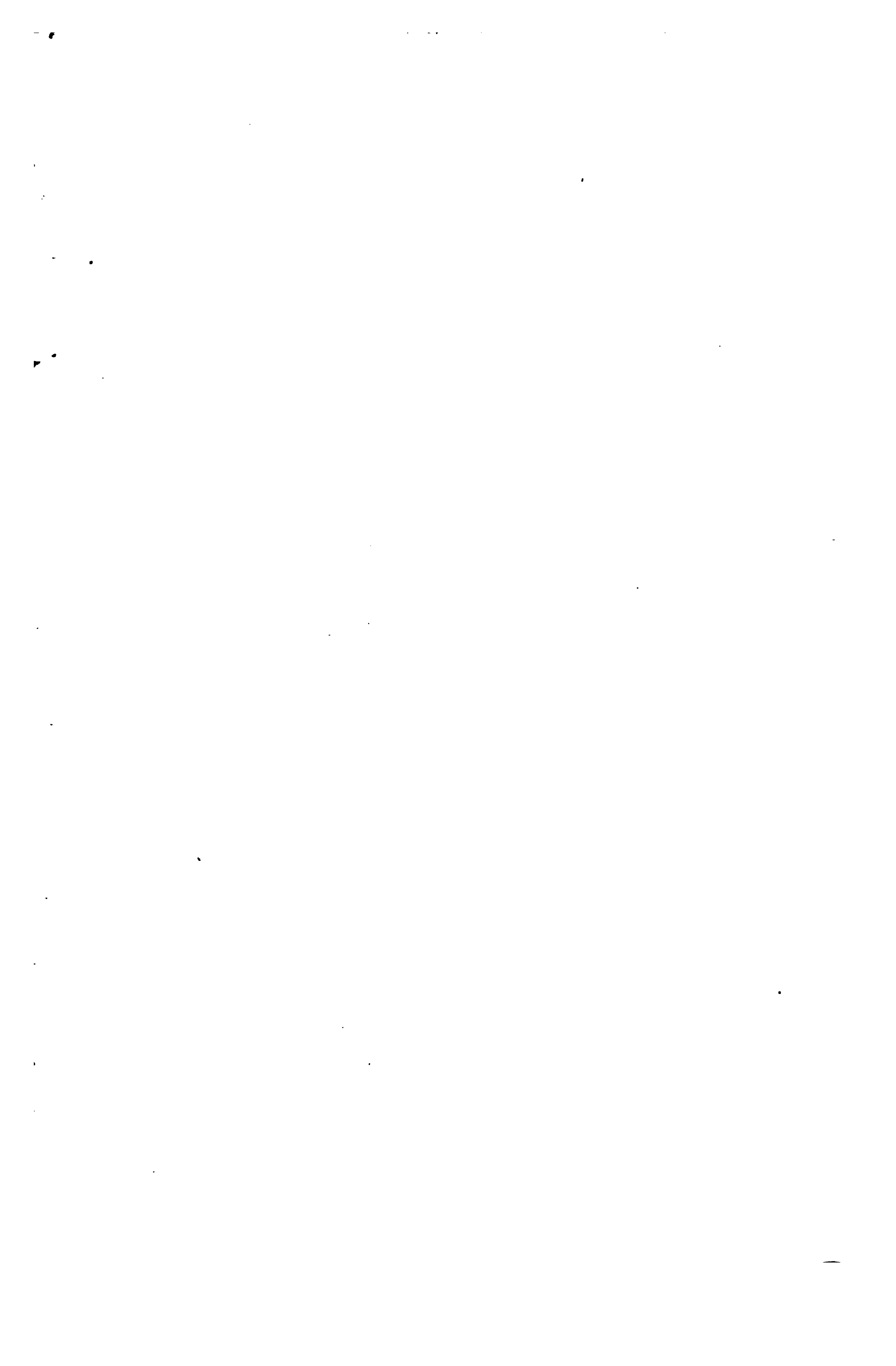



Library
INCOME
OF
AR, LL.D.
AR
F MATHEMATICS,
HILOSOPHY"
LIBRARY







SCHLOEMILCHS

HANDBUCH DER MATHEMATIK

ZWEITE AUFLAGE

DRITTER BAND

SCHLOEMILCHS

HANDBUCH DER MATHEMATIK

ZWEITE AUFLAGE

HERAUSGEGEBEN VON

PROF. DR. R. HENKE
KONREKTOR DES ANNEN-REALGYMNASIUMS IN DRESDEN

UND

DR. R. HEGER
HON.-PROFESSOR AN DER K. S. TECHNISCHEN HOCHSCHULE UND GYMNASIAL-OBERLEHRER IN DRESDEN

DRITTER BAND

HÖHERE MATHEMATIK. II. TEIL

MIT 94 FIGUREN UND 20 TAFELN



LEIPZIG
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH
1904

Spamersche Buchdruckerei in Leipzig.

Vorwort zum dritten Bande der zweiten Auflage.

Das erste Buch (der erste Teil der Integralrechnung) ist nur wenig verändert worden. Der Abschnitt über bestimmte Integrale (§ 10) wurde um ein Beispiel (Nr. 10) vermehrt, in § 11 unter Nr. 7 eine Grundformel für die Ableitung der periodischen Reihen nochmals erläutert. Im zweiten Buche ist der Anfang von § 5 vereinfacht und Figur 70 berichtigt worden; in § 11 (früher § 21) wurden die letzten Nummern gestrichen. Im dritten Buche (Differentialgleichungen) wurde § 2 Nr. 9 um ein Beispiel vermehrt; die Abschnitte Nr. 35, 36, 37 des früheren § 24 (jetzt § 2), sowie Nr. 5 des früheren § 25 wurden unterdrückt. Die größte Veränderung in diesem Buche besteht darin, daß der von FUCHS begründeten Behandlung der homogenen linearen Differentialgleichungen ein besonderer Abschnitt (§ 4) gewidmet worden ist. Dabei machten sich als Einleitung einige grundlegende Erörterungen über algebraische Funktionen im WEIERSTRASSschen Sinne nötig, bei denen ich mich nicht dazu entschließen konnte, von WEIERSTRASS' eignem Gedankengange erheblich abzuweichen. Das vierte Buch ist unverändert geblieben. Dagegen ist das fünfte Buch (mathematische Grundlagen des Versicherungswesens) neu bearbeitet worden. Der Abschnitt über Zinsesrechnung konnte mit Rücksicht auf den ersten Band ganz weggelassen werden. Während in der ersten Auflage die eigentlichen Versicherungsrechnungen nur Andeutungen waren, dürfte es nun gelungen sein, auf dem engen Raume von etwa sechs Bogen einen vollständigen Begriff der Versicherungsrechnungen und ausführliche, zu praktischen Übungen ausreichende Tafeln mit den versicherungstechnischen Grundzahlen, einschließlich der Kinder- und der Feierzeitversicherung, zu geben, sowie in einem vollständig durchgerechneten Beispiele (Beurteilung einer Feierzeitkasse) die Anwendung zu zeigen. Wieweit dies als eine brauchbare Grundlage für Übungen in versicherungstechnischen Seminarien dienen kann, muß ich der freundlichen Beurteilung der Fachgenossen überlassen. Ganz neu ist das letzte Buch (Kartenentwürfe). Es fehlte bis jetzt an einer mathematisch vollständig durchgeführten, kurzen und übersichtlichen Darstellung dieses so wichtigen Teiles der angewandten Mathematik; diese Lücke sucht das sechste Buch auszufüllen. Die Bezugnahme auf vier große, weitverbreitete Kartenwerke und die Beigabe von zwanzig Tafeln mit der diesen Werken nachgebildeten graphischen Ausführung der wichtigsten Kartennetzentwürfe und den Umrissen der darauf

dargestellten Gebiete verbindet die theoretischen Erörterungen mit der geographischen Anwendung.

Schließlich danke ich dem Herrn Verleger dafür, daß er bei dieser neuen Auflage die Kosten für die zwanzig Tafeln zu den Kartenentwürfen und für die Drucklegung der versicherungstechnischen Tafeln nicht gescheut hat, und mit bestem Erfolge bemüht gewesen ist, die äußere Erscheinung des Werkes zu heben. Das ausführliche alphabetische Sachregister, das auf den Wunsch des Herrn Verlegers dem Werke hinzugefügt wurde, soll das Handbuch auch als Nachschlagewerk bequem brauchbar machen und wird hoffentlich seiner Benutzung recht förderlich sein.

Dresden, im Juni 1904. R. Heger.

Inhaltsverzeichnis von Band III.

Erstes Buch.

Integrale im Gebiete der realen Zahlen.

Zweites Buch.

Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Drittes Buch.

Differentialgleichungen.

Viertes Buch.

Ausgleichungsrechnung.

Fünftes Buch.

Mathematische Grundlagen des Versicherungswesens.

Sechstes Buch.

Kartenentwürfe.

Erstes Buch.

Integrale im Gebiete der realen Zahlen

bearbeitet von

Dr. Richard Heger,

a. o. Honorarprofessor an der Kgl. Sächs. Techn. Hochschule
und Gymnasialoberlehrer in Dresden.

Integrale im Gebiete der realen Zahlen.

§ 1. Grundbegriffe und Grundformeln.

1. Die Grundaufgabe der Differentialrechnung ist: Zu einer gegebenen Funktion das Differential zu bestimmen; die Grundaufgabe der Integralrechnung ist die Umkehrung hiervon: Ein Differential $f(x)dx$ ist gegeben; man soll die Funktion bestimmen, von welcher $f(x)dx$ das Differential ist.

Die Funktion, von welcher $f(x)dx$ das Differential ist, nennt man das Integral von $f(x)dx$, geschrieben

$$\int f(x)\,dx \quad .$$

Man hat daher für das Zeichen $\int f(x)\,dx$ die definierende Gleichung

$$1) \qquad d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx \quad .$$

Ist u irgend eine Funktion von x, so ist daher

$$2) \qquad \int du = u \quad .$$

Aus 1) und 2) ist ersichtlich, daß die Zeichen d und $\int$ einander aufheben.

2. Die Aufgabe, das Differential einer Funktion zu bestimmen, hat eine eindeutig bestimmte Lösung; nicht so die Umkehrung: Aus dem Differential die ursprüngliche Funktion herzustellen.

Ist nämlich $dF(x) = f(x)\,dx$, so ist auch

$$d[F(x) + C] = f(x)\,dx \quad ,$$

wobei C eine willkürliche Konstante bedeutet. Man hat daher

$$1) \qquad \int f(x)\,dx = F(x) + C \quad .$$

Man sieht leicht, daß unter der Form $F(x) + C$ jede Funktion enthalten ist, die $f(x)\,dx$ zum Differential hat. Denn ist außer 1) auch $\int f(x)\,dx = \psi(x)$, so ist

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = f(x) \quad ;$$

da nun auch

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad ,$$

so ist

$$\frac{d\psi(x) - dF(x)}{dx} = \frac{d[\psi(x) - F(x)]}{dx} = 0 \quad .$$

Hieraus folgt, daß die Differenz $\psi(x) - F(x)$ eine von x unabhängige Konstante ist; man hat daher

$$\psi(x) - F(x) = C\,, \quad \text{oder} \quad \psi(x) = F(x) + C \quad .$$

Die Funktion $F(x)$, welche keine willkürliche Konstante enthält, bezeichnet man als ein besonderes Integral von $f(x)dx$; und dem gegenüber $F(x) + C$ als das allgemeine Integral. Das allgemeine Integral geht daher aus einem besondern durch Hinzufügung einer willkürlichen Konstanten hervor.

3. Nach Nr. 1 führt jede Differentialformel auf eine Integralformel. Aus den Differentialen der einfachen Funktionen erhält man die

Grundformeln der Integralrechnung:

1) $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$, denn $d\frac{x^{m+1}}{m+1} = x^m dx$; $m \gtrless -1$,

2) $\int \frac{dx}{x} = lx + C$, denn $dlx = \frac{dx}{x}$;

3) $\int e^x dx = e^x + C$, denn $de^x = e^x dx$;

4) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$, denn $d\sin x = \cos x\, dx$;

5) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$, denn $d(-\cos x) = \sin x\, dx$;

6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x + C$, denn $d\operatorname{tang} x = \frac{dx}{\cos^2 x}$;

7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$, denn $d\cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$;

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, denn $d\arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

9) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} x + C$, denn $d\operatorname{arc\,tang} x = \frac{dx}{1+x^2}$.

Bekanntlich ist

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

und daher

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x \quad .$$

Man kann daher 8) ersetzen durch

10) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C_1 \quad ,$$

in Übereinstimmung mit der Differentialformel

$$d\arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad .$$

Eine ähnliche Bemerkung gilt bezüglich der Formel 9); da man hat

$$\operatorname{arc\,tang} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,cot} x \quad ,$$

so folgt aus 9)

11) $$\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arc\,cot} x + C_1 \quad ,$$

in Übereinstimmung mit
$$d \operatorname{arc} \cot x = -\frac{dx}{1+x^2} \quad .$$

In 10) und 11) kann das Zeichen C_1 wieder durch das völlig unbestimmte Zeichen C ersetzt werden.

4. Die nächste Aufgabe der Integralrechnung besteht darin, Integrale von Differentialen, die nicht mit in den Grundformeln enthalten sind, durch geschickte Änderungen auf die Grundformeln zurückzuführen.

Ehe wir uns aber dazu wenden, ist eine wichtige Frage zu erledigen.

Es ist zu erwarten — und diese Erwartung wird sich bald bestätigen — daß es Formeln $f(x)\,dx$ gibt, die in keiner Weise sich als Differentiale der bisher in der Analysis bekannten Funktionen oder von Kombinationen derselben ansehen lassen. In solchen Fällen wird durch das Zeichen
$$\int f(x)\,dx$$
eine neue Funktion definiert; wie wir in Nr. 2 gesehen haben, ist diese Funktion bis auf eine additive Konstante bestimmt. In dieser Weise führt die Integralrechnung eine ungemessene Fülle neuer Funktionen ein, die sich von den bisher bekannten zum Teil durch ganz neue Arten von Eigenschaften unterscheiden; wir werden einige von diesen genauer kennen lernen.

Wir wollen zunächst versuchen, eine Anschauung der Funktion $\int f(x)\,dx$ zu gewinnen. Wir beschränken uns dabei, wie überhaupt bei allen gegenwärtigen Untersuchungen,. auf reale Werte von x und auf reale Funktionen $f(x)$; behalten uns aber vor, diese Beschränkung später wieder aufzuheben.

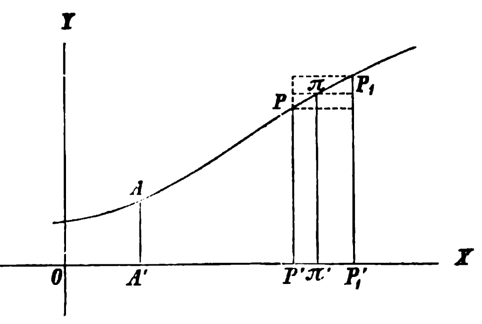


Fig. 1.

Wir zeichnen die Kurve, die in Bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem die Gleichung hat $y=f(x)$ (Fig. 1); P sei ein Punkt derselben, also $OP'=x$, $P'P=f(x)$. Ein andrer Punkt der Kurve mit kleinerer Abscisse sei A, so gelegen, daß zwischen A und P die Ordinaten sich weder unstetig ändern, noch unendlich groß oder imaginär werden, und daß, wenn A sich auf der Kurve bis P bewegt, der Punkt A' immer in derselben Richtung fortschreitend nach P' gelangt. Alsdann ist die von $A'P'$, $A'A$, $P'P$ und dem Kurvenbogen AP umschlossene Fläche eine endliche, eindeutig bestimmte Größe.

Ferner sei $OP_1' = x + \Delta x$. Wir können Δx immer so klein wählen, daß die Kurve von P bis P_1 nur steigt oder nur fällt. Alsdann gibt es einen zwischen P und P_1 gelegenen Punkt Π der Kurve, so daß die von dem Kurvenbogen begrenzte Fläche $P'PP_1P_1'$ gleich dem Rechtecke von der Breite $P'P_1'$ und der Höhe $\Pi'\Pi$ ist. Wird die Fläche $A'APP'$ mit F und demgemäß $P'PP_1P_1'$ mit ΔF bezeichnet, so ist
$$\Delta F = \Pi'\Pi \cdot \Delta x \quad .$$

Ist μ ein echter Bruch, so ist
$$O\Pi' = x + \mu \cdot \Delta x \quad ,$$
daher
$$\Pi'\Pi = f(x + \mu\,\Delta x)$$
und
$$\Delta F = f(x+\mu\,\Delta x)\cdot \Delta x \quad ,$$
oder
$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x + \mu\,\Delta x) \quad .$$

Gehen wir zur Grenze für einen verschwindenden Wert von Δx über, so erhalten wir

$$\lim \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim f(x + \mu \Delta x) \quad ,$$

folglich

$$\lim \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x)$$

oder

$$dF = f(x)\,dx \quad .$$

Daher ist

$$\int f(x)\,dx = F + \text{Konst.}$$

5. Wir wollen nun zeigen, wie die Fläche F — und damit also das Integral $\int f(x)\,dx$ — durch Begrenzung bestimmt werden kann.

Wir setzen zunächst voraus, daß die Kurve von A bis P nur steigt (Fig. 2). Teilen wir $A'P'$ in n gleiche Teile δ, so sind die zu den Teilpunkten $0, 1, 2, \ldots n$ gehörigen Ordinaten

$$f(a)\,,\quad f(a+\delta)\,,\quad f(a+2\delta)\,,\quad f(a+3\delta)\ldots f(a+\overline{n-1}\,\delta)\,,\quad f(a+n\delta) \equiv f(x) \quad .$$

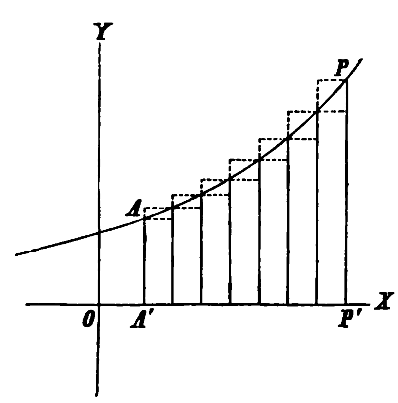


Fig. 2.

Konstruiert man zwischen den Ordinaten $f(a+\overline{k-1}\,\delta)$ und $f(a+k\delta)$ ein Rechteck ϱ_k mit der Höhe $f(a+\overline{k-1}\,\delta)$ und eines r_k mit der Höhe $f(a+k\delta)$, so ist, da nach der Voraussetzung

$$f(a+\overline{k-1}\,\delta) < f(a+k\delta) \quad ,$$

der zwischen $f(a+\overline{k-1}\,\delta)$ und $f(a+k\delta)$ enthaltene Flächenstreifen größer als ϱ_k und kleiner als r_k. Daher ist

$$1) \qquad \sum_1^n \varrho_k < F < \sum_1^n r_k \quad .$$

Nun ist

$$\varrho_k = f(a+\overline{k-1}\,\delta)\cdot\delta \quad ,$$
$$r_k = f(a+k\delta)\cdot\delta \quad ,$$

daher

$$r_k - \varrho_k = [f(a+k\delta) - f(a+\overline{k-1}\cdot\delta)]\,\delta \quad .$$

Also ist

$$r_1 - \varrho_1 = [f(a+\delta) - f(a)]\,\delta \quad ,$$
$$r_2 - \varrho_2 = [f(a+2\delta) - f(a+\delta)]\,\delta \quad ,$$
$$r_3 - \varrho_3 = [f(a+3\delta) - f(a+2\delta)]\,\delta \quad ,$$
$$r_4 - \varrho_4 = [f(a+4\delta) - f(a+3\delta)]\,\delta \quad ,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$r_n - \varrho_n = [f(a+n\delta) - f(a+\overline{n-1}\,\delta)]\,\delta \quad .$$

Hieraus folgt durch Addition

$$2) \qquad \Sigma r_k - \Sigma \varrho_k = [f(x) - f(a)]\,\delta \quad .$$

Bezeichnet μ einen positiven echten Bruch, so folgt aus 1) und 2)

$$3) \qquad F = \Sigma \varrho_k + \mu\,[f(x) - f(a)]\,\delta \quad .$$

Wenn die Kurve von A bis P nur fällt (Fig. 3), so nehmen wir dieselben Konstruktionen vor; da aber jetzt

$$f(a + \overline{k-1}\,\delta) > f(a + k\,\delta) \quad ,$$

so ist der zwischen diesen Ordinaten enthaltene Flächenstreifen kleiner als ϱ_k und größer als r_k; daher ist jetzt

$$4) \qquad \Sigma \varrho_k > F > \Sigma r_k \quad .$$

Ferner ist

$$\varrho_1 - r_1 = [f(a) - f(a + \delta)]\,\delta \quad ,$$
$$\varrho_2 - r_2 = [f(a + \delta) - f(a + 2\,\delta)]\,\delta \quad ,$$
$$\varrho_3 - r_3 = [f(a + 2\,\delta) - f(a + 3\,\delta)]\,\delta \quad ,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\varrho_n - r_n = [f(a + \overline{n-1}\,\delta) - f(a + n\,\delta)]\,\delta \quad .$$

Hieraus folgt

$$5) \qquad \Sigma \varrho_k - \Sigma r_k = [f(a) - f(x)]\,\delta \quad .$$

Wir haben daher jetzt

$$6) \qquad F = \Sigma \varrho_k - \mu\,[f(a) - f(x)]\,\delta \quad .$$

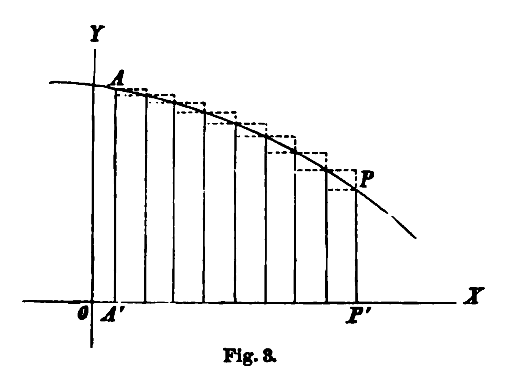


Fig. 3.

Gehen wir in 3) und 6) rechts zur Grenze für einen verschwindend kleinen Wert für δ über, und bemerken, daß, da $f(a)$ und $f(x)$ als endliche Größen vorausgesetzt worden sind,

$$\lim [f(a) - f(x)]\,\delta = 0 \quad ,$$

so erhalten wir

$$7) \qquad F = \lim [f(a) + f(a + \delta) + f(a + 2\,\delta) + \ldots + f(a + \overline{n-1}\,\delta)]\,\delta \quad ,$$

oder kürzer

$$F = \lim \sum_{0}^{n-1} f(a + k\,\delta)\,\delta \quad .$$

Wenn die Kurve zwischen A und P eine endliche Anzahl Male vom Steigen zum Fallen und vom Fallen zum Steigen übergeht (Fig. 4), so nehmen wir zunächst wieder die obige Konstruktion vor, und zerlegen dann durch die zu gewissen Teilpunkten der Strecke $A'P'$ gehörigen Ordinaten die Fläche in solche Teile $F_1, F_2, F_3, \ldots F_i$, innerhalb deren die Kurve nur steigt oder nur fällt; diese werden durch Streifen getrennt, deren jeder zwischen zwei aufeinander folgenden Ordinaten liegt. Für die Teile $F_1 \ldots F_i$ gilt dann die Formel 7). Sind die Anfangsordinaten der trennenden Streifen, deren Anzahl $i - 1$ ist,

$$y_1, y_2, y_3, \ldots y_{i-1} \quad ,$$

und die Flächen

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_{i-1} \quad ,$$

so ist für jedes dieser φ

$$\varphi_m = y_m \delta + v_m \quad ,$$

wobei v_m eine positive oder negative Größe bezeichnet, die mit δ zugleich verschwindet. Addieren wir nun die $F_1 \ldots F_i$ und schalten dazwischen an den passenden Stellen die $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{i-1}$ ein, so erhalten wir für die ganze Fläche

$$F = \lim \sum_0^{n-1} f(a + k\delta)\,\delta + \lim (v_1 + v_2 + \ldots + v_{i-1}) \quad .$$

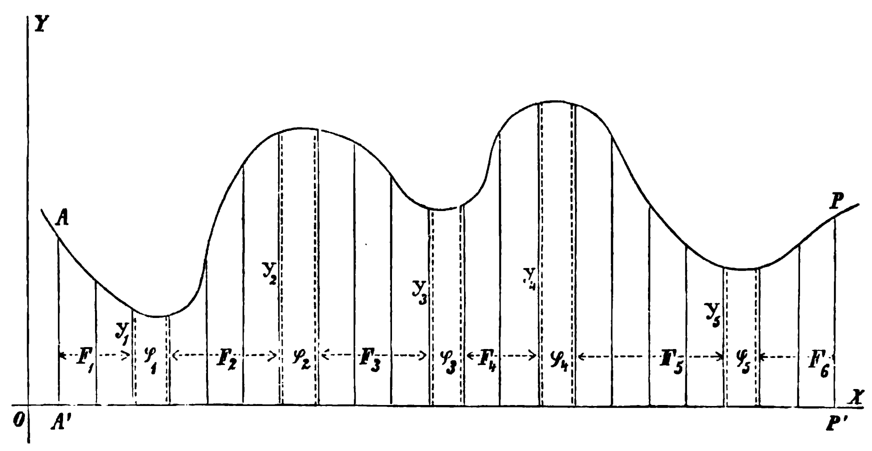


Fig. 4.

Wenn bei einer endlichen Anzahl von Größen v jede einzelne verschwindet, so verschwindet auch ihre Summe, also ist

$$\lim (v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_{i-1}) = 0 \quad ,$$

und wir erhalten somit die allgemein gültige Gleichung

$$F = \lim \sum_0^{n-1} f(a + k\delta)\,\delta \quad ,$$

oder

$$8) \qquad \int f(x)\,dx = \lim \sum_0^{n-1} f(a + k\delta)\,\delta + \text{Konst.}$$

Eine Veränderung innerhalb der anfangs angegebenen Schranken der willkürlichen Größe a hat, wie die Figur sofort zeigt, den Erfolg, daß die Fläche F um einen von x unabhängigen Betrag zu- oder abnimmt; und diesen kann man dann in 8) mit der willkürlichen Konstanten vereinigt denken.

Den besondern Wert $\lim \sum_0^{n-1} f(a + k\delta)\,\delta$ nennt man das zwischen den Grenzen a und x genommene bestimmte Integral von $f(x)dx$ und bezeichnet es mit $\int_a^x f(x)\,dx$. Es gilt also die definierende Gleichung

$$\int_a^x f(x)\,dx = \lim \sum_0^{n-1} f(a + k\delta)\,\delta \quad ,$$

Fügt man rechts den verschwindenden Summanden $f(a+n\delta)\delta$ hinzu, so entsteht

$$9)\qquad \int_a^x f(x)\,dx = \lim \sum_0^n f(a+k\delta)\,\delta \quad .$$

Die vorigen Betrachtungen zeigen, wie dasselbe angenähert bestimmt werden kann. Berechnet man für jeden der Teile $F_1, F_2, \ldots F_i$ gemäß der Formeln 2) und 5) die Größen

$$[f(c) - f(d)]\,\delta \quad ,$$

wobei c und d die kleinste und die größte Abscisse irgend eines dieser Teile bezeichnen, so gewinnt man zugleich ein Urteil über die Genauigkeit des angenäherten Resultats, sowie eine Auskunft dafür, wie klein δ gewählt werden muß, damit der Fehler einen gegebenen Betrag nicht übersteigt.

In den folgenden Abschnitten werden wir uns zunächst mit solchen Integralen beschäftigen, die auf die bisher bekannten Funktionen führen.

§ 2. Integral eines Polynoms und eines Produkts. Einführung einer neuen Veränderlichen.

1. Aus der Gleichung

$$d(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n) = du_1 + du_2 + du_3 + \ldots + du_n$$

gewinnt man durch Integration

$$\int (du_1 + du_2 + du_3 + \ldots + du_n) = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \text{Konst.}$$

Hierfür kann man setzen

$$\int (du_1 + du_2 + du_3 + \ldots + du_n) = \int du_1 + \int du_2 + \int du_3 + \ldots$$

Daher der Satz: Ein Polynom wird integriert, indem man jedes einzelne Glied integriert.

Durch Anwendung dieses Satzes ergibt sich z. B.

$$\int (1+x)\,dx = \int dx + \int x\,dx = x + \frac{x^2}{2} + C \quad ;$$

$$\int (x - x^2)\,dx = \int x\,dx - \int x^2\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C \quad ;$$

$$\int (1 + e^x)\,dx = \int dx + \int e^x\,dx = x + e^x + C \quad ;$$

$$\int \frac{1+x^2}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x} + \int x\,dx = lx + \frac{x^2}{2} + C \quad ;$$

$$\int (\cos x - \sin x)\,dx = \int \cos x\,dx - \int \sin x\,dx = \sin x + \cos x + C \quad .$$

2. Die Differentialformel

$$d(au) = a\,du$$

ergibt durch Umkehrung

$$\int a\,du = au + \text{Konst.},$$

$$\int a\,du = a \int du \quad ,$$

Einen konstanten Faktor eines Differentials kann man vor das Integralzeichen setzen; oder: um ein Integral mit einer Konstanten zu multiplizieren (oder zu dividieren), multipliziert (oder dividiert) man das Differential.

Hieraus folgt z. B.

$$\int a\,dx = a\int dx = ax + C \quad ;$$

$$\int (a + bx + cx^2)\,dx = a\int dx + b\int x\,dx + c\int x^2\,dx = ax + b\frac{x^2}{2} + c\frac{x^3}{3} + C \quad ;$$

$$\int(-x\,dx) = -\int x\,dx = -\frac{x^2}{2} + C \quad ;$$

$$\int\frac{dx}{ax} = \frac{1}{a}\int\frac{dx}{x} = \frac{1}{a}\,lx + C \quad .$$

3. Aus der Differentialformel

$$d\,uv = v\,du + u\,dv$$

folgt

$$v\,du = d\,uv - u\,dv \quad ;$$

hieraus geht die Integralformel hervor

$$\int v\,du = uv - \int u\,dv \quad .$$

Hiervon wird man mit Erfolg Gebrauch machen, wenn $\int u\,dv$ bekannt ist, oder leichter auf ein bekanntes gebracht werden kann, als $\int v\,du$; man bezeichnet diese Umformung als die Methode der teilweisen Integration.

Wir geben hierzu folgende Beispiele:

$$\int x e^x\,dx = \int x\,de^x = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C \quad ;$$

$$\int x^2 e^x\,dx = \int x^2\,de^x = x^2 e^x - \int e^x\,d(x^2) = e^x(x^2 - 2x + 2) + C \quad ;$$

$$\int x^3 e^x\,dx = \int x^3\,de^x = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x\,dx = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C \quad .$$

Allgemein hat man

$$\int x^m e^x\,dx = \int x^m\,de^x = x^m e^x - m\int x^{m-1} e^x\,dx \quad .$$

Ferner ist

$$\int lx\,dx = x\,lx - \int x\,d\,lx = x\,lx - \int dx = x(lx - 1) + C \quad ;$$

$$\int x\,lx\,dx = \frac{1}{2}\int lx\,d(x^2) = \frac{1}{2}x^2\,lx - \frac{1}{2}\int x^2\,d\,lx = \frac{x^2}{4}(2\,lx - 1) + C \quad ;$$

$$\int x^2\,lx\,dx = \frac{1}{3}\int lx\,d(x^3) = \frac{1}{3}x^3\,lx - \frac{1}{3}\int x^3\,d\,lx = \frac{x^3}{9}(3\,lx - 1) + C \quad ;$$

$$\int x^m\,lx\,dx = \frac{1}{m+1}x^{m+1}\,lx - \frac{1}{m+1}\int x^m\,dx = \frac{1}{(m+1)^2}x^{m+1}[(m+1)\,lx - 1] + C.$$

$$\int x\cos x\,dx = \int x\,d\sin x = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C \quad ;$$

$$\int x\sin x\,dx = -\int x\,d\cos x = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C \quad ;$$

$$\int x^2\cos x\,dx = \int x^2\,d\sin x = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx \quad ;$$

$$\int x^2\sin x\,dx = -\int x^2\,d\cos x = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx \quad ;$$

$$\int x^m\cos x\,dx = \int x^m\,d\sin x = x^m\sin x - m\int x^{m-1}\sin x\,dx \quad ;$$

$$\int x^m\sin x\,dx = -\int x^m\,d\cos x = -x^m\cos x + m\int x^{m-1}\cos x\,dx \quad .$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formeln gelangt man schließlich zu einer vollständigen Bestimmung von $\int x^m\cos x\,dx$ und $\int x^m\sin x\,dx$.

4. Ein sehr wichtiges Mittel zur Änderung von Integralen ist die **Einführung einer neuen Veränderlichen.** Um z. B.

$$\int (a + b x)^m \, dx$$

zu bestimmen, setze man

$$a + b x = y\,, \qquad \text{also} \qquad b\,dx = dy \quad ;$$

hierdurch erhält man

$$\int (a + b x)^m \, dx = \frac{1}{b} \int y^m \, dy = \frac{y^{m+1}}{(m+1) b} + C \quad ,$$

$$= \frac{1}{(m+1) b} (a + b x)^{m+1} + C \quad .$$

Auf gleichem Wege ergibt sich

$$\int \frac{dx}{a + b x} = \frac{1}{b} \int \frac{d(a + b x)}{a + b x} = \frac{1}{b} \, l(a + b x) + C \quad .$$

In

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a + b x^2}}$$

setze man

$$a + b x^2 = y \quad ,$$

also

$$2 b x\,dx = dy \quad .$$

Man erhält dann

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a + b x^2}} = \frac{1}{2b} \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{b} + C \quad ,$$

$$= \frac{1}{b} \sqrt{a + b x^2} + C \quad .$$

Ferner ist

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} \, dx = \int \frac{e^x \, dx}{e^{2x} + 1} \quad .$$

Setzt man $e^x = y$, so ist $e^x \, dx = dy$, und daher

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} \, dx = \int \frac{dy}{1 + y^2} = \operatorname{arc\,tang} y + C \quad ,$$

$$= \operatorname{arc\,tang}(e^x) + C \quad .$$

§ 3. Integration rationaler algebraischer Funktionen.

1. Eine rationale algebraische Funktion der Veränderlichen x ist von der Form

$$f(x) = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1} x + b_n} \quad .$$

Ist die Funktion **unecht gebrochen**, ist also $m > n$, so kann man nach den Regeln der Buchstabenrechnung den Zähler durch den Nenner dividieren; man erhält dann den Quotienten

$$c_0 x^{m-n} + c_1 x^{m-n-1} + \ldots + c_{m-n-1} x + c_{m-n}$$

$$+ \frac{d_0 x^{n-1} + d_1 x^{n-2} + \ldots + d_{n-1}}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n} \quad .$$

Man hat daher

$$\int f(x)\,dx = \int (c_0 x^{m-n} + c_1 x^{m-n-1} + \ldots + c_{m-n})\,dx$$
$$+ \int \frac{d_0 x^{n-1} + d_1 x^{n-2} + \ldots + d_{n-1}}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n}\,dx \quad .$$

Das erste Integral rechts — das einer ganzen rationalen algebraischen Funktion — ist nach den bisherigen Regeln sofort ausgeführt. Es bleibt daher nur noch die Integration einer echt gebrochenen rationalen algebraischen Funktion zu untersuchen.

Ehe wir hierfür die allgemeinen Regeln aufstellen, mögen einige einfache Fälle erledigt werden.

1)
$$\begin{cases} \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)dx \\ \quad = \frac{1}{2} l(1+x) - \frac{1}{2} l(1-x) + C \\ \quad = l\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C \quad . \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} \int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right)dx \\ \quad = \frac{1}{a-b}\, l\frac{x-a}{x-b} + C \quad . \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} \int \frac{dx}{x^2+6x+11} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\frac{x+3}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)^2} \\ \quad = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{x+3}{\sqrt{2}} + C \quad . \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} \int \frac{dx}{x^2+6x+4} = \int \frac{dx}{(x+3)^2-5} = \int \frac{dx}{(x+3+\sqrt{5})(x+3-\sqrt{5})} \\ \quad = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\int \frac{d(x+3-\sqrt{5})}{x+3-\sqrt{5}} - \int \frac{d(x+3+\sqrt{5})}{x+3+\sqrt{5}}\right] \\ \quad = \frac{1}{2\sqrt{5}}\, l\frac{x+3-\sqrt{5}}{x+3+\sqrt{5}} + C \quad . \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} \int \frac{x\,dx}{x^2-4x+7} = \int \frac{x\,dx}{(x-2)^2+3} = \int \frac{(x-2)\,d(x-2)}{(x-2)^2+3} + \int \frac{2\,d(x-2)}{(x-2)^2+3} \\ \quad = \frac{1}{2} l[(x-2)^2+3] + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tang} \frac{x-2}{\sqrt{3}} + C \quad . \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} \int \frac{(x+5)\,dx}{x^2-8x+10} = \int \frac{(x+5)\,dx}{(x-4)^2-6} = \int \frac{(x-4)\,d(x-4)}{(x-4)^2-6} + 9\int \frac{dx}{(x-4)^2-6} \\ \quad = \frac{1}{2} l(x^2-8x+10) + \frac{9}{2\sqrt{6}}\, l\frac{x-4-\sqrt{6}}{x-4+\sqrt{6}} + C \quad . \end{cases}$$

$$7)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x+5)} = \int \frac{1}{25}\left(\frac{5-x}{x^2} + \frac{1}{x+5}\right) dx \\ \displaystyle\qquad = -\frac{1}{5x} - \frac{1}{25} lx + \frac{1}{25} l(x+5) + C \quad . \end{cases}$$

$$8)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{dx}{x^5(x-3)} = \int \frac{1}{243}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{x^4+3x^3+9x^2+27x+81}{x^5}\right) dx \\ \displaystyle\qquad = \frac{1}{243}\left[l(x-3) - lx + \frac{3}{x} + \frac{9}{2x^2} + \frac{9}{x^3} + \frac{81}{4x^4}\right] + C \quad . \end{cases}$$

Wie man sieht, gelingt in allen diesen Fällen die Integration dadurch, daß man die gebrochene Funktion in ein Polynom von Brüchen auflöst, deren Nenner lineare Funktionen von x oder (7. und 8. Beispiel) Potenzen linearer Funktionen sind; die Zähler sind in dem ersten Falle konstant, im letztern von minderem Grade als der Nenner; nur die Beispiele 3) und 5) machen eine Ausnahme, bei ihnen treten nur Nenner von der Form $z^2 + a$ auf, wobei a positiv ist. Umgekehrt sieht man, daß die Integration echt gebrochener Funktionen durchführbar wäre, wenn es gelänge, jede solche Funktion in der hier angegebenen Weise in Teilbrüche zu zerlegen, d. i. in ein Polynom echt gebrochener Funktionen, deren Nenner linear, oder quadratisch, oder Potenzen einer linearen oder quadratischen Funktion sind. Wir werden nun zeigen, wie diese Zerlegung in jedem Falle durchgeführt werden kann.

2. Es seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei ganze Funktionen und zwar $\varphi(x)$ vom n-ten, $\psi(x)$ von niederem Grade. Man zerlege die Funktion $\varphi(x)$ in ihre linearen Faktoren; dies erfolgt bekanntlich durch Auflösung der Gleichung

$$\varphi(x) = 0 \text{ *)}.$$

Sind $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ die Wurzeln dieser Gleichung, und ist a der Koeffizient von x^n in $\varphi(x)$, so ist

$$\varphi(x) = a(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_n) \quad .$$

Wir setzen zunächst voraus, daß sämtliche ξ voneinander verschieden sind, und suchen die Zahlen $A_1, A_2, \ldots A_n$ so zu bestimmen, daß

$$1)\qquad \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{A_1}{x-\xi_1} + \frac{A_2}{x-\xi_2} + \frac{A_3}{x-\xi_3} + \ldots + \frac{A_n}{x-\xi_n} \quad .$$

Durch Multiplikation mit $\varphi(x)$ erhält man hieraus

$$\psi(x) \equiv A_1 \frac{\varphi(x)}{x-\xi_1} + A_2 \frac{\varphi(x)}{x-\xi_2} + \ldots + A_n \frac{\varphi(x)}{x-\xi_n} \quad .$$

Ersetzt man in dieser Identität für x den besondern Wert ξ_1, so verschwinden rechts alle Glieder vom zweiten an, da jede der Größen

$$\frac{\varphi(x)}{x-\xi_2}, \frac{\varphi(x)}{x-\xi_3}, \ldots \frac{\varphi(x)}{x-\xi_n}$$

den Faktor $x - \xi_1$ enthält. Für die Größe $\varphi(x) : (x - \xi_1)$ verschwinden Zähler und Nenner, der Wert dieses Quotienten wird daher $\varphi'(\xi)$ (Bd. II, Viertes Buch, § 12). Somit gewinnt man

$$\psi(\xi_1) = A_1 \varphi'(\xi_1) \quad ,$$

und hieraus ergibt sich der gesuchte Zähler A_1 zu

$$2)\qquad A_1 = \frac{\psi(\xi_1)}{\varphi'(\xi_1)} \quad .$$

---

*) Den allgemeinen Beweis dieses Satzes findet man im Anfange des zweiten Buches dieses Bandes.

In gleicher Weise folgt allgemein

$$3)\qquad A_i = \frac{\psi(\xi_i)}{\varphi'(\xi_i)} \quad .$$

Sind nun sämtliche ξ real, so sind auch alle A real und man erhält, wenn man die A in 1) einsetzt und integriert

$$4)\quad \int \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} dx = \frac{\psi(\xi_1)}{\varphi'(\xi_1)} l(x-\xi_1) + \frac{\psi(\xi_2)}{\varphi'(\xi_2)} l(x-\xi_2) + \ldots + \frac{\psi(\xi_n)}{\varphi'(\xi_n)} l(x-\xi_n) + C \, .$$

Sind nicht alle ξ real, so treten eine gerade Anzahl komplexer ξ auf, die paarweis konjugiert sind. Wenn ξ_k und ξ_k konjugiert sind, so sind auch die zugehörigen Zähler A_k und A_k konjugiert, also von der Form $M+iN$ und $M-iN$. Ist nun

$$\xi_k = r + is \quad ,$$

also

$$\xi_k = r - is \quad ,$$

so ist

$$\frac{A_k}{x-\xi_k} + \frac{A_k}{x-\xi_k} = \frac{(A_k + A_k)x - A_k \xi_k - A_k \xi_k}{x^2 - (\xi_k + \xi_k)x + \xi_k \xi_k} \quad .$$

Da nun

$$A_k \xi_k + A_k \xi_k = Mr + Ns + i(Nr - Ms) + Mr + Ns - i(Nr - Ms)$$
$$= 2(Mr + Ns) \quad ,$$

so folgt schließlich

$$5)\qquad \frac{A_k}{x-\xi_k} + \frac{A_k}{x-\xi_k} = 2 \cdot \frac{Mx - Mr - Ns}{x^2 - 2rx + r^2 + s^2} \quad .$$

Daher ist

$$6)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \left(\frac{A_k}{x-\xi_k} + \frac{A_k}{x-\xi_k}\right) dx = 2M \int \frac{(x-r)\,dx}{(x-r)^2 + s^2} - 2Ns \int \frac{dx}{(x-r)^2 + s^2} \\ \displaystyle\qquad = M l[(x-r)^2 + s^2] - 2N \operatorname{arc\,tang} \frac{x-r}{s} + C \, . \end{cases}$$

3. Wir wenden uns nun zu dem Falle, daß die Funktion $\varphi(x)$ mehrere gleiche lineare Faktoren enthält. Es sei $(x-\xi_1)^a$ ein Faktor von $\varphi(x)$, also

$$\varphi(x) = (x-\xi_1)^a \varphi_1(x) \quad ,$$

wobei φ_1 eine Funktion vom Grade $(n-a)$ ist; wir versuchen die Zerlegung

$$1)\quad \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{\psi(x)}{(x-\xi_1)^a \varphi_1(x)} = \frac{A_0}{(x-\xi_1)^a} + \frac{A_1}{(x-\xi_1)^{a-1}} + \ldots + \frac{A_{a-1}}{x-\xi_1} + \frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)} \quad .$$

Hierbei bezeichnet $\psi_1(x)$ eine Funktion von minderem Grade, als $\varphi_1(x)$. Setzt man*)

$$x - \xi_1 = \frac{1}{z} \quad ,$$

also

$$x = \frac{1 + \xi_1 z}{z} \quad ,$$

so wird aus 1)

$$2)\quad \frac{z^a \psi\left(\frac{1+\xi_1 z}{z}\right)}{\varphi_1\left(\frac{1+\xi_1 z}{z}\right)} = A_0 z^a + A_1 z^{a-1} + \ldots + A_{a-1} z + \frac{\psi_1\left(\frac{1+\xi_1 z}{z}\right)}{\varphi_1\left(\frac{1+\xi_1 z}{z}\right)} \quad .$$

---

*) DÖLP, Aufgaben zur Differential- und Integralrechnung, nebst den Resultaten und den zur Lösung nötigen theoretischen Erläuterungen. Gießen 1869. S. 81.

Macht man die einzelnen Teile jeder der Funktionen φ_1, ψ und ψ_1 gleichnamig und vereint sie dann, so erscheinen diese Funktionen als Quotienten ganzer Funktionen von z von demselben Grade, den die ursprünglichen Funktionen in x hatten, dividiert durch die höchste vorkommende Potenz von z. Sind also $\psi(x)$ und $\psi_1(x)$ vom Grade $n-\delta$ bezw. $n-a-\varepsilon$, und bezeichnen Φ_1, Ψ, Ψ_1 ganze Funktionen von den Graden $n-a$, $n-\delta$, $n-a-\varepsilon$, so hat man

$$\varphi_1\left(\frac{1+\xi_1 z}{z}\right)=\frac{\Phi_1(z)}{z^{n-a}}, \quad \psi\left(\frac{1+\xi_1 z}{z}\right)=\frac{\Psi(z)}{z^{n-\delta}}, \quad \psi_1\left(\frac{1+\xi_1 z}{z}\right)=\frac{\Psi_1(z)}{z^{n-a-\varepsilon}} \quad .$$

Daher wird aus 2)

$$z^a \cdot \frac{\Psi(z)}{z^{n-\delta}} \cdot \frac{z^{n-a}}{\Phi_1(z)} = A_0 z^a + \ldots + A_{a-1} z + \frac{\Psi_1(z)}{z^{n-a-\varepsilon}} \cdot \frac{z^{n-a}}{\Phi_1(z)} \quad ,$$

oder einfacher

$$3) \qquad \frac{z^\delta \Psi(z)}{\Phi_1(z)} = A_0 z^a + \ldots + A_{a-1} z + \frac{z^\varepsilon \Psi_1(z)}{\Phi_1(z)} \quad .$$

Die Funktion Φ_1 kann nicht durch Ausfall einiger Koeffizienten von minderem Grade als $n-a$ sein; denn den Wurzeln z der Gleichung

$$4) \qquad \frac{\Phi_1(z)}{z^{n-a}} = 0$$

entsprechen die Wurzeln der Gleichung $\varphi_1(x)=0$; davon sind aber die $n-a$ Wurzeln $z=\infty$ von 4) auszunehmen, denn sie liefern $x-\xi_1 = 1:z = 0$, also $x=\xi_1$ während nach der Voraussetzung die Funktion $\varphi_1(x)$ den Faktor $x-\xi_1$ nicht besitzt. Um die $n-a$ Wurzeln von $\varphi_1(x)=0$ zu erhalten, hat man also nur die Wurzeln von $\varphi_1(z)=0$ zu ermitteln und in $x-\xi_1 = 1:z$ einzusetzen. Verschwänden nun die Koeffizienten von z^{n-a}, z^{n-a-1}, $z^{n-a-2}, \ldots z^{n-a-k}$ in $\Phi_1(z)$, so würde die Gleichung $\Phi_1(z)=0$ k gleiche Wurzeln $z=\infty$ haben, im Widerspruche mit der Voraussetzung, wie soeben gezeigt wurde.

In ganz gleicher Weise ist ersichtlich, daß $\Psi(z)$ und $\Psi_1(z)$ nicht von minderem Grade als $n-\delta$, bezw. $n-a-\varepsilon$ ausfallen können; mithin ist $z^\delta \Psi(z)$ vom Grade n und $z^\varepsilon \Psi_1(z)$ vom Grade $n-a$.

Man erhält daher die Darstellung 3), indem man die algebraische Division $z^\delta \Psi(z) : \Psi_1(z)$ nach fallenden Potenzen von z geordnet ausführt.

Das höchste Glied des Quotienten ist $A_0 z^a$; man berechnet ihn bis zu dem Gliede $A_{a-1} z$. Der Rest ist vom Grade $n-a$, und ist die Funktion

$$z^\varepsilon \Psi_1(z) \quad .$$

Setzt man in

$$\frac{z^\varepsilon \Psi(z)}{\Phi_1(z)}$$

für z rückwärts wieder den Wert

$$z = 1:(x-\xi_1) \quad ,$$

so geht 4) in

$$\psi_1(x) : \varphi_1(x)$$

über; somit ist nun ψ_1 bekannt. Hat nun $\varphi_1(x)$ lauter ungleiche lineare Faktoren, so wird $\psi_1(x):\varphi_1(x)$ nach Nr. 2 weiter zerlegt; enthält hingegen $\varphi_1(x)$ noch mehrfache lineare Faktoren, so hat man die soeben gegebene Entwicklung zu wiederholen. Ist

$$\varphi(x) = (x-\xi_1)^a \cdot (x-\xi_2)^\beta \ldots (x-\xi_r)^\varrho \quad ,$$

so erhält man schließlich

$$5)\quad \begin{cases} \dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{A_0}{(x-\xi_1)^\alpha} + \dfrac{A_1}{(x-\xi_1)^{\alpha-1}} + \dots + \dfrac{A_{\alpha-2}}{(x-\xi_1)^2} + \dfrac{A_{\alpha-1}}{x-\xi_1} \\ \quad + \dfrac{B_0}{(x-\xi_2)^\beta} + \dfrac{B_1}{(x-\xi_2)^{\beta-1}} + \dots + \dfrac{B_{\beta-2}}{(x-\xi_2)^2} + \dfrac{B_{\beta-1}}{x-\xi_2} \\ \quad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad + \dfrac{R_0}{(x-\xi_r)^\varrho} + \dfrac{R_1}{(x-\xi_r)^{\varrho-1}} + \dots + \dfrac{R_{\varrho-2}}{(x-\xi_r)^2} + \dfrac{R_{\varrho-1}}{x-\xi_r} \quad . \end{cases}$$

Sind nun alle $\xi_1 \dots \xi_r$ real, so ist mit dieser Zerlegung auch die Integration von $[\psi(x):\varphi(x)]\,dx$ erledigt; man erhält

$$6)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\,dx \\ = -\dfrac{A_0}{(\alpha-1)(x-\xi_1)^{\alpha-1}} - \dfrac{A_1}{(\alpha-2)(x-\xi_1)^{\alpha-2}} - \dots - \dfrac{A_{\alpha-2}}{x-\xi_1} + A_{\alpha-1}\, l(x-\xi_1) \\ \quad - \dfrac{B_0}{(\beta-1)(x-\xi_2)^{\beta-1}} - \dfrac{B_1}{(\beta-2)(x-\xi_2)^{\beta-2}} - \dots - \dfrac{B_{\beta-2}}{x-\xi_2} + B_{\beta-1}\, l(x-\xi_2) \\ \quad - \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad - \dfrac{R_0}{(\varrho-1)(x-\xi_r)^{\varrho-1}} - \dfrac{R_1}{(\varrho-2)(x-\xi_r)^{\varrho-2}} - \dots - \dfrac{R_{\varrho-2}}{x-\xi_r} + R_{\varrho-1}\, l(x-\xi_r) \,. \end{cases}$$

4. Ist $\xi_1 = r + is$ und enthält φ den Faktor $(x - r - is)^\mu$, so enthält φ auch den konjugierten Faktor $(x - r + is)^\mu$; beide Faktoren geben vereint den Faktor

$$[(x-r)^2 + s^2]^\mu \quad .$$

Es läßt sich nun nachweisen, daß dann immer eindeutig folgende Entwicklung durchgeführt werden kann

$$1)\quad \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_0 x + B_0}{[(x-r)^2+s^2]^\mu} + \frac{A_1 x + B_1}{[(x-r)^2+s^2]^{\mu-1}} + \dots + \frac{A_{\mu-1}x + B_{\mu-1}}{(x-r)^2+s^2} + \frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)} ,$$

wobei $\varphi_1(x)$ das Produkt der Faktoren bezeichnet, die in φ außer $[(x-r)^2+s^2]^\mu$ enthalten sind.

Multipliziert man nämlich in 1) beide Seiten mit $[(x-r)^2+s^2]^\mu$, so erhält man, wenn man $(x-r)^2+s^2$ zur Abkürzung mit U bezeichnet

$$2)\quad \begin{cases} \dfrac{\psi(x)}{\varphi_1(x)} = A_0 x + B_0 + (A_1 x + B_1)\,U + (A_2 x + B_2)\,U^2 + \dots \\ \qquad \dots + (A_{\mu-1} x + B_{\mu-1})\,U^{\mu-1} + \dfrac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)}\,U^\mu \quad . \end{cases}$$

Ersetzt man hier x durch $r + is$, so verschwinden alle Potenzen von U; nimmt die linke Seite dabei den komplexen Wert $M_0 + iN_0$ an, so hat man

$$3)\quad M_0 + iN_0 = A_0(r + is) + B_0 \quad .$$

Durch Vergleichung der realen und imaginären Teile ergibt sich hieraus

$$4)\quad A_0 = \frac{N_0}{s}, \qquad B_0 = M_0 - \frac{r}{s} N_0 \quad .$$

Die Funktion $\psi(x) - \varphi_1(x)(A_0 x + B_0)$ verschwindet, wenn A_0 und B_0 die Werte) 4 haben, und x durch ξ_1 ersetzt wird; hieraus folgt, daß diese Funktion

den Faktor $x - \xi_1$ hat; sie hat daher auch den konjugierten Faktor, und ist folglich teilbar durch das Produkt dieser beiden Faktoren, durch U. Führt man die Division aus, und bezeichnet den Quotienten mit $\chi_1(x)$, so hat man daher

$$\psi(x) - \varphi_1(x)(A_0 x + B_0) = U \cdot \chi_1(x) \quad .$$

Setzt man dies in 2) ein, so enthalten alle Glieder der Gleichung den Faktor U; nach Entfernung desselben bleibt

$$5) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\chi_1(x)}{\varphi_1(x)} &= A_1 x + B_1 + (A_2 x + B_2) U + (A_3 x + B_3) U^2 + \ldots \\ &\ldots + (A_{\mu-1} x + B_{\mu-1}) U^{\mu-2} + \frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)} U^{\mu-1} \quad . \end{aligned} \right.$$

Setzt man hier $x = \xi_1$, so erhält man

$$6) \qquad A_1 \xi_1 + B_1 = \frac{\chi_1(\xi_1)}{\varphi_1(\xi_1)} \quad ,$$

und hieraus wie bei 3) und 4) durch Sonderung des Realen und Imaginären die Größen A_1 und B_1.

Durch wiederholte Anwendung dieses in der Ausführung zwar umständlichen, aber ganz elementaren und durchsichtigen Verfahrens gewinnt man sämtliche A und B.

Es ist klar, daß man ein gleiches Verfahren auch an Stelle des in Nr. 3 gegebenen anwenden könnte.

5. Für den Fall, daß $\varphi(x)$ mehrfache komplexe Faktoren hat, kommt die Integration von $(\psi : \varphi)\,dx$ daher auf die Entwicklung der Integrale hinaus

$$1) \qquad \int \frac{Ax + B}{(x - r)^2 + s^2}\,dx$$

und

$$2) \qquad \int \frac{Ax + B}{[(x - r)^2 + s^2]^n}\,dx \quad ,$$

wobei n eine natürliche Zahl ist. Das Integral 1) liefert (vgl. Nr. 2, 6))

$$3) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{(x-r)^2 + s^2}\,dx &= \int \frac{A(x-r) + (B + Ar)}{(x-r)^2 + s^2}\,dx \\ &= \frac{A}{2}\, l[(x-r)^2 + s^2] + \frac{B + Ar}{s} \operatorname{arc\,tang} \frac{x-r}{s} + C \quad . \end{aligned} \right.$$

Für das zweite erhält man die Zerlegung

$$4) \quad \int \frac{Ax + B}{[(x-r)^2 + s^2]^n}\,dx = A \int \frac{(x-r)\,dx}{[(x-r)^2 + s^2]^n} + (B + Ar) \int \frac{dx}{[(x-r)^2 + s^2]^n} \quad .$$

Nun ist

$$5) \qquad \int \frac{(x-r)\,dx}{[(x-r)^2 + s^2]^n} = -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{[(x-r)^2 + s^2]^{n-1}} \quad ,$$

also erübrigt noch die Ausführung des Integrals

$$\int \frac{dx}{[(x-r)^2 + s^2]^n} \quad .$$

Führt man hier eine neue Veränderliche durch die Gleichung ein

$$x - r = sz \quad ,$$

so ist

$$dx = s\,dz\,, \qquad (x - r)^2 + s^2 = s^2(1 + z^2) \quad ,$$

und man erhält

$$6)\qquad \int\frac{dx}{[(x-r)^2+s^2]^2}=\frac{1}{s}\int\frac{dz}{(1+z^2)^n}\quad .$$

Wie man aus der Zusammenrechnung der rechten Seite sofort sieht, ist

$$7)\qquad \int\frac{dz}{(1+z^2)^n}=\int\frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}}-\int\frac{z^2\,dz}{(1+z^2)^n}\quad ;$$

ferner erhält man durch teilweise Integration

$$8)\ \int\frac{z^2\,dz}{(1+z^2)^n}=\int z\cdot\frac{z\,dz}{(1+z^2)^n}=-\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{z}{(1+z^2)^{n-1}}+\frac{1}{2(n-1)}\int\frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}}\,.$$

Daher ist

$$9)\qquad \int\frac{dz}{(1+z^2)^n}=\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{z}{(1+z^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}}\quad .$$

Durch dieselbe Formel führt man $\int dz:(1+z^2)^{n-1}$ auf $\int dz:(1+z^2)^{n-2}$ zurück u. s. w., bis man zum Schluß auf

$$\int\frac{dz}{1+z^2}=\operatorname{arc\,tang} z+C$$

kommt.

6. Alles in Nr. 1 bis Nr. 5 Entwickelte zusammenfassend, erhalten wir somit das Ergebnis: Das Integral einer rationalen algebraischen Funktion läßt sich in jedem Falle durch eine endliche Anzahl von rationalen Funktionen, Logarithmen und Arcustangens ausdrücken.

7. Die Anwendung der soeben entwickelten Regeln wollen wir nun an einigen Beispielen zeigen.

A)
$$\int\frac{x^3+9x^2-4x+7}{(x^2-5x+6)(x^2+5x+6)}\,dx\quad .$$

Hier ist

$$\psi(x)\equiv x^3+9x^2-4x+7\,,\qquad \varphi(x)\equiv(x-2)(x-3)(x+2)(x+3)\quad ,$$

also

$$\xi_1=2\,,\quad \xi_2=3\,,\quad \xi_3=-2\,,\quad \xi_4=-3\quad .$$

Die Werte $\varphi'(\xi_k)$ werden am zweckmäßigsten nach der Formel berechnet

$$\varphi'(\xi_k)=\left[\frac{\varphi(x)}{x-\xi_k}\right]_{x=\xi_k}.$$

Man findet

$$\varphi'(2)=-20\,,\quad \varphi'(3)=30\,,\quad \varphi'(-2)=20\,,\quad \varphi'(-3)=-30\quad .$$

Ferner ist

$$\psi(2)=43\,,\qquad \psi(3)=103\,,\quad \psi(-2)=43\,,\quad \psi(-3)=73\quad .$$

Daher hat man die Zerlegung

$$\frac{x^3+9x^2-4x+7}{(x^2-5x+6)(x^2+5x+6)}=-\frac{43}{20}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{103}{30}\cdot\frac{1}{x-3}+\frac{43}{20}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{73}{30}\cdot\frac{1}{x+3}\quad .$$

Hieraus ergibt sich

$$\int\frac{x^3+9x^2-4x+7}{(x^2-5x+6)(x^2+5x+6)}\,dx=-\frac{43}{20}\,l(x-2)+\frac{103}{30}\,l(x-3)$$
$$+\frac{43}{20}\cdot l(x+2)-\frac{73}{30}\cdot l(x+3)+C\quad ,$$

B)
$$\int \frac{dx}{(x^2-4x+5)(x^2-6x+13)} \quad .$$

Hier ist
$$\psi(x) = 1 \quad ,$$
$$\varphi(x) = (x-2-i)(x-2+i)(x-3-2i)(x-3+2i) \quad ,$$
$$\xi_1 = 2+i, \quad \xi_2 = 2-i, \quad \xi_3 = 3+2i, \quad \xi_4 = 3-2i \quad ,$$
$$\varphi'(2+i) = 4+8i, \quad \varphi'(2-i) = 4-8i \quad ,$$
$$\varphi'(3+2i) = -16-8i, \quad \varphi'(3-2i) = -16+8i \quad .$$

Man hat daher die Zerlegung
$$\frac{1}{(x^2-4x+5)(x^2-6x+13)} = \frac{1}{4+8i}\cdot\frac{1}{x-2-i} + \frac{1}{4-8i}\cdot\frac{1}{x-2+i}$$
$$-\frac{1}{16+8i}\cdot\frac{1}{x-3-2i} - \frac{1}{16-8i}\cdot\frac{1}{x-3+2i} \quad .$$

Durch Vereinigung konjugiert komplexer Ausdrücke erhält man
$$\frac{1}{4+8i}\cdot\frac{1}{x-2-i} + \frac{1}{4-8i}\cdot\frac{1}{x-2+i} = \frac{x}{10[(x-2)^2+1]} \quad ,$$
$$\frac{1}{16+8i}\cdot\frac{1}{x-3-2i} + \frac{1}{16-8i}\cdot\frac{1}{x-3+2i} = \frac{x-2}{10[(x-3)^2+4]} \quad .$$

Da nun
$$\int \frac{x\,dx}{(x-2)^2+1} = \frac{1}{2}\,l(x^2-4x+5) + 2\operatorname{arc\,tang}(x-2) \quad ,$$
$$\int \frac{(x-2)\,dx}{(x-3)^2+4} = \frac{1}{2}\,l(x^2-6x+13) + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\frac{x-3}{2} \quad ,$$

so folgt schließlich
$$\int \frac{dx}{(x^2-4x+5)(x^2-6x+13)} = \frac{1}{20}\,l\frac{x^2-4x+5}{x^2-6x+13} + \frac{1}{5}\operatorname{arc\,tang}(x-2)$$
$$-\frac{1}{20}\operatorname{arc\,tang}\frac{x-3}{2} + C \quad .$$

C)
$$\int \frac{x^2-3x+1}{(x-2)^3(x-3)^2}\,dx \quad .$$

Hier ist $\xi_1 = 2$; die Ersetzung
$$x = \frac{1+2z}{z}$$

liefert
$$x^2-3x+1 = \frac{1}{z^2}(-z^2+z+1) \quad ,$$
$$\varphi_1\left(\frac{1+2z}{z}\right) = \left(\frac{1+2z}{z}-3\right)^2 = \frac{1}{z^2}(1-z)^2 \quad .$$

Daher ist
$$\frac{z^\delta\,\Psi(z)}{\Phi_1(z)} = \frac{z^3(-z^2+z+1)}{(1-z)^2} \quad .$$

Nun ist

$$(-z^5 + z^4 + z^3) : (z^2 - 2z + 1) = -z^3 - z^2 + \frac{z^2}{z^2 - 2z + 1} .$$

Setzt man im Restbruche $z = 1 : (x - 2)$, so erhält man

$$\frac{z^2}{z^2 - 2z + 1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{z}\right)^2} = \frac{1}{(x-3)^2} .$$

Daher hat man die Zerlegung

$$\frac{x^2 - 3x + 1}{(x-2)^3 (x-3)^2} = -\frac{1}{(x-2)^3} - \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-3)^2} ,$$

folglich ist

$$\int \frac{x^2 - 3x + 1}{(x-2)^3 (x-3)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} .$$

D) $$\int \frac{x^3 + 4}{x^4 (x-1)^2} dx .$$

In diesem Falle hat man $\xi_1 = 1$, und hat daher die Ersetzung

$$x = (1 + z) : z \quad ;$$

sie ergibt

$$x^3 + 4 = \frac{1}{z^3} (5z^3 + 3z^2 + 3z + 1) ,$$

$$\varphi_1 \left(\frac{1+z}{z}\right) = \frac{1}{z^4} (z+1)^4 ,$$

und daher

$$\frac{z^\delta \Psi(z)}{\Phi_1(z)} = \frac{z^3 (5z^3 + 3z^2 + 3z + 1)}{(z+1)^4} .$$

Man erhält weiter

$$(5z^6 + 3z^5 + 3z^4 + z^3) : (z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 1)$$

$$= 5z^2 - 17z + \frac{41z^4 + 83z^3 + 63z^2 + 17z}{(z+1)^4} .$$

Ersetzt man im Restbruche z wieder durch $1 : (x - 1)$, also $z + 1$ durch $x : (x - 1)$, so erhält man

$$\frac{41z^4 + 83z^3 + 63z^2 + 17z}{(z+1)^4} = \frac{17x^3 + 12x^2 + 8x + 4}{x^4} .$$

Folglich ist

$$\frac{x^3 + 4}{x^4 (x-1)^2} = \frac{5}{(x-1)^2} - \frac{17}{x-1} + \frac{17}{x} + \frac{12}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \frac{4}{x^4} ,$$

und mithin

$$\int \frac{x^3 + 4}{x^4 (x-1)^2} dx = -\frac{5}{x-1} - 17\, l \frac{x-1}{x} - \frac{12}{x} - \frac{4}{x^2} - \frac{4}{3x^3} + C .$$

E) $$\int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 5)^2 (x+1)^3} .$$

Die Auflösung der Gleichung

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

liefert

$$\xi_1 = 1 + 2i .$$

Um die Darstellung zu erreichen

$$\frac{1}{(x^2-2x+5)^2(x+1)^3} = \frac{A_0 x + B_0}{(x^2-2x+5)^2} + \frac{A_1 x + B_1}{x^2-2x+5} + \frac{\Psi_1(x)}{(x+1)^3} \quad ,$$

setze man $x = 1 + 2i$ in

$$\frac{1}{(x+1)^3} = A_0 x + B_0 + (A_1 x + B_1)(x^2-2x+5) + \frac{\psi_1(x)(x^2-2x+5)^2}{(x+1)^3} \quad .$$

Da $(2+2i)^3 = 16(i-1)$, so erhält man

$$\frac{1}{16(i-1)} = -\frac{i+1}{32} = A_0(1+2i) + B_0 \quad ,$$

und daher

$$A_0 = -\frac{1}{64}, \quad B_0 = -\frac{1}{64} \quad .$$

Man bildet nun

$$1 - \varphi_1(x)(A_0 x + B_0) \quad ,$$

wobei

$$\varphi_1(x) = (x+1)^3 \quad ,$$

und erhält

$$1 - \varphi_1(x)(A_0 x + B_0) = \frac{1}{64}[64 + (x+1)^4] = \frac{1}{64}(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 65) \quad .$$

Dies durch $x^2 - 2x + 5$ dividiert, ergibt den Quotienten

$$\chi_1(x) = \frac{1}{64}(x^2 + 6x + 13) \quad .$$

Daher hat man nun

$$\frac{x^2+6x+13}{64(x+1)^3} + A_1 x + B_1 + \frac{\psi_1(x)(x^2-2x+5)}{(x+1)^3} \quad .$$

Setzt man hier wieder $x = 1 + 2i$, also

$$x^2 + 6x + 13 = 16(1+i) \quad ,$$

so erhält man

$$-\frac{i}{64} = A_1(1+2i) + B_1 \quad ,$$

folglich

$$A_1 = -\frac{1}{128}, \quad B_1 = \frac{1}{128} \quad .$$

Bildet man weiter

$$\chi_1(x) - \varphi_1(x)(A_1 x + B_1) \quad ,$$

so erhält man hierfür

$$\frac{1}{64}(x^2+6x+13) - \frac{1}{128}(x+1)^3(-x+1) = \frac{1}{128}(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25).$$

Dies wieder durch $(x^2 - 2x + 5)$ dividiert, ergibt

$$\frac{1}{128}(x^2 + 4x + 5) \quad .$$

Man hat daher

$$\frac{x^2+4x+5}{128(x+1)^3} = \frac{\psi_1(x)}{(x+1)^3}, \quad \text{also} \quad \psi_1(x) = \frac{1}{128}(x^2+4x+5) \quad .$$

Macht man noch von der Identität Gebrauch

$$x^2 + 4x + 5 = (x+1)^2 + 2(x+1) + 2 \quad ,$$

so hat man schließlich die vollständige Zerlegung

$$\frac{1}{(x^2-2x+5)(x+1)^3} = -\frac{1}{64}\cdot\frac{x+1}{(x^2-2x+5)^2} - \frac{1}{128}\cdot\frac{x-1}{x^2-2x+5} + \frac{1}{128}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^3}\right) .$$

Nun hat man

$$\int \frac{x+1}{[(x-1)^2+4]^2}dx = \int \frac{(x-1)\,dx}{[(x-1)^2+4]^2} + 2\int \frac{dx}{[(x-1)^2+4]^2} \quad ,$$

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{[(x-1)^2+4]^2} = \frac{1}{2}l(x^2-2x+5) \quad ,$$

$$\int \frac{dx}{[(x-1)^2+4]^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x-1)^2+4} - \frac{1}{4}\int \frac{(x-1)^2\,dx}{[(x-1)^2+4]^2} \quad ,$$

$$\int \frac{(x-1)^2\,dx}{[(x-1)^2+4]^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{(x-1)^2+4} + \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tang}\frac{x-1}{2} \quad .$$

Daher ergibt sich schließlich

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^2(x+1)^3} = \frac{1}{256}\left[3l\frac{1}{x^2-2x+5} - \frac{x-1}{x^2-2x+5} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\frac{x-1}{2} + 2l(x+1) - \frac{4}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}\right] + C \quad .$$

§ 4. Integration irrationaler Funktionen.

1. Die Integrale irrationaler Funktion lassen sich, wie wir später zeigen werden, im allgemeinen nicht auf die bisher bekannten Funktionen reduzieren; nur in den einfachsten Fällen gelingt dies, und derartige Fälle sollen im gegenwärtigen Abschnitte betrachtet werden.

2. Kommt in einer irrationalen Funktion von x die Veränderliche nur in einer Wurzel vor, und ist der Radikand eine natürliche Potenz einer linearen Funktion von x, also die Funktion von der Form

$$F\left[x, \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,\right] \quad ,$$

so läßt sich das Integral

$$\int F\left[x, \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,\right] dx$$

durch Einführung einer neuen Veränderlichen leicht in das Integral einer rationalen Funktion verwandeln. Setzt man nämlich

$$ax + b = z^n \quad ,$$

also

$$x = \frac{z^n - b}{a}, \quad dx = \frac{n}{a}z^{n-1}\,dz \quad ,$$

so geht das Integral über in

$$\int F\left[x, \sqrt[n]{(ax+b)^m}\right] dx = \frac{n}{a}\int F\left(\frac{z^n - b}{a}, z^m\right) dz \quad ,$$

und dieses Integral kann nach den im vorigen Abschnitte gegebenen Anleitungen vollständig entwickelt werden.

Beispiel.

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt[3]{x+1}} \quad .$$

Man setze $x + 1 = z^3$, also $x = z^3 - 1$, $dx = 3z^2 dz$.
Dadurch erhält man

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x+1}} dx &= 3\int \frac{z^6 - 2z^3 + 1}{z} z^2 dz = 3\int (z^7 - 2z^4 + z) dz \\ &= \frac{3}{8}z^8 - \frac{6}{5}z^5 + \frac{3}{2}z^2 + C \\ &= \frac{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}{40}[5(x+1)^2 - 16(x+1) + 20] + C \quad .\end{aligned}$$

3. Wir wenden uns nun zur Entwicklung des Integrals

$$1) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} \quad .$$

Man hat

$$2) \qquad \left\{\begin{aligned} a + 2bx + cx^2 &= a - \frac{b^2}{c} + c\left(x + \frac{b}{c}\right)^2 \\ &= \frac{b^2 - ac}{c}\left[\frac{c^2}{b^2 - ac}\left(x + \frac{b}{c}\right)^2 - 1\right] \quad .\end{aligned}\right.$$

Ist nun $b^2 - ac < 0$, so muß $c > 0$ sein, da sonst der Radikand für alle realen Werte von x negativ, die Wurzel also imaginär würde, während wir ausdrücklich uns gegenwärtig auf Integrale realer Funktionen beschränken. Macht man von der Änderung Gebrauch

$$3) \qquad \frac{c}{\sqrt{ac - b^2}}\left(x + \frac{b}{c}\right) = z, \quad \text{also} \quad dx = \frac{\sqrt{ac - b^2}}{c} dz \quad ,$$

so geht das gegebene Integral über in

$$4) \qquad \frac{1}{\sqrt{c}}\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} \quad .$$

Nun ist bekanntlich

$$dl\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right) = \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} \quad .$$

Daher hat man

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} l \frac{cx + b + \sqrt{c}\sqrt{a + 2bx + cx^2}}{\sqrt{ac - b^2}} + C \quad .$$

Man kann den Bestandteil

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{c}} l \sqrt{ac - b^2}\right)$$

mit der Konstanten verschmelzen, und erhält dann

$$5)\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\, l\left[cx+b+\sqrt{c(a+2bx+cx^2)}\right] + C \quad ,$$

$$b^2 - ac < 0\,, \quad c > 0 \quad .$$

Ist hingegen

$$b^2 - ac > 0 \quad ,$$

so setzen wir in 2)

$$6)\qquad \frac{c}{\sqrt{b^2-ac}}\left(x+\frac{b}{c}\right) = z\,, \quad \text{also} \quad dx = \frac{\sqrt{b^2-ac}}{c}\,dz \quad ,$$

und erhalten dadurch

$$7)\qquad a+2bx+cx^2 = -\frac{b^2-ac}{c}(1-z^2) \quad .$$

Ist $c > 0$, so muß $z^2 > 1$ sein, damit $\sqrt{a+2bx+cx^2}$ real ist. Unter dieser Beschränkung setzen wir

$$a+2bx+cx^2 = \frac{b^2-ac}{c}(z^2-1) \quad .$$

Aus der Differentialformel

$$d\,l(z+\sqrt{z^2-1}) = \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}$$

folgt nun

$$8)\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\, l\,\frac{cx+b+\sqrt{c(a+2bx+cx^2)}}{\sqrt{b^2-ac}} + C \quad ,$$

oder, wenn man die Konstante mit

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{c}}\, l\sqrt{b^2-ac}\right)$$

vereint,

$$9)\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\, l\left[cx+b+\sqrt{c(a+2bx+cx^2)}\right] + C \quad .$$

Diese Integralformel ist daher anzuwenden,

wenn $b^2 - ac < 0$ und $c > 0$, für jedes reale x ;

wenn $b^2 - ac > 0$ und $c > 0$, für $\dfrac{(cx+b)^2}{b^2-ac} > 1$.

Ist $c < 0$, so wird $\sqrt{a+2bx+cx^2}$ nur real, solange $z^2 < 1$. In diesem Falle und unter dieser Beschränkung für z ist nun

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin z + C \quad ,$$

also, wenn man wieder z durch x ausdrückt,

$$10)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{cx+b}{\sqrt{b^2-ac}} + C \quad , \\[2ex] \displaystyle b^2-ac > 0\,, \quad c < 0\,, \quad \frac{(cx+b)^2}{b^2-ac} < 1 \quad . \end{cases}$$

Ist $ac - b^2 = 0$, so ist

$$a + 2bx + cx^2 = c\left(x + \frac{b}{c}\right)^2 \quad .$$

Die Wurzel ist daher rational, und man hat

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \int \frac{dx}{x + \frac{b}{c}} = \frac{1}{\sqrt{c}} l\left(x + \frac{b}{c}\right) + C \quad .$$

4. Zur Reduktion des Integrals

$$\int \frac{A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} dx$$

dient folgender Satz*):

Die Zahlen $B_0, B_1, \ldots B_{n-1}, B_n$ lassen sich immer so wählen, daß

$$1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int \frac{A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} dx \\ & = (B_0 x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + \ldots + B_{n-1}) \sqrt{a + 2bx + cx^2} + B_n \int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} \quad . \end{aligned} \right.$$

Durch Differentiation erhält man nämlich aus 1)

$$\frac{A_0 x^n + \ldots + A_n}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = (B_0 x^{n-1} + \ldots + B_{n-1}) \frac{b + cx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}$$

$$+ [(n-1) B_0 x^{n-2} + (n-2) B_1 x^{n-3} + \ldots + B_{n-2}] \sqrt{a + 2bx + cx^2}$$

$$+ \frac{B_n}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} \quad .$$

Multipliziert man beide Seiten mit $\sqrt{a + 2bx + cx^2}$, so erhält man

$$A_0 x^n + \ldots + A_n = (B_0 x^{n-1} + \ldots + B_{n-1})(cx + b)$$

$$+ [(n-1) B_0 x^{n-2} + \ldots + B_{n-2}](cx^2 + 2bx + a) + B_n \quad .$$

Vergleicht man die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x auf beiden Seiten, so erhält man zur Bestimmung der B die linearen Gleichungen

$$\begin{aligned}
A_0 &= ncB_0 \quad , \\
A_1 &= (n-1)cB_1 + (2n-1)bB_0 \quad , \\
A_2 &= (n-2)cB_2 + (2n-3)bB_1 + (n-1)aB_0 \quad , \\
A_3 &= (n-3)cB_3 + (2n-5)bB_2 + (n-2)aB_1 \quad , \\
A_4 &= (n-4)cB_4 + (2n-7)bB_3 + (n-3)aB_2 \quad , \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{n-2} &= 2cB_{n-2} + 5bB_{n-3} + 3aB_{n-4} \quad , \\
A_{n-1} &= cB_{n-1} + 3bB_{n-2} + 2aB_{n-3} \quad , \\
A_n &= bB_{n-1} + aB_{n-2} + B_n \quad .
\end{aligned}$$

Hieraus erhält man nacheinander $B_0, B_1, \ldots B_n$.

*) Dölp, Aufgaben, S. 90.

Beispiele. A) Für die Ermittlung von

$$\int \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

hat man in obigen Gleichungen zu setzen

$$n = 6\,,\quad A_0 = 1\,,\quad A_1 = \ldots = A_n = 0\,,\quad a = 1\,,\quad b = 0\,,\quad c = 1\quad,$$

daher gehen dieselben über in

$$\begin{array}{ll} 1 = 6\,B_0\,, & 0 = 3\,B_3 + 4\,B_1\quad, \\ 0 = 5\,B_1\,, & 0 = 2\,B_4 + 3\,B_2\quad, \\ 0 = 4\,B_2 + 5\,B_0\,, & 0 = B_5 + 2\,B_3\quad, \end{array}$$
$$0 = B_4 + B_6\quad.$$

Sie ergeben

$$B_1 = B_3 = B_5 = 0\quad,$$
$$B_0 = \tfrac{1}{6}\,,\quad B_2 = -\tfrac{5}{24}\,,\quad B_4 = \tfrac{5}{16}\,,\quad B_6 = -\tfrac{5}{16}\quad.$$

Folglich ist

$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left(\frac{x^5}{6} - \frac{5\,x^3}{24} + \frac{5\,x}{16}\right)\sqrt{1+x^2} - \frac{5}{16}\,l\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C\quad.$$

B)

$$\int \sqrt{a^2 - b^2x^2}\,dx = \int \frac{a^2 - b^2x^2}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}}\,dx = \tfrac{1}{2}\,x\sqrt{a^2 - b^2x^2} + \frac{a^2}{2\,b}\arcsin\frac{b\,x}{a} + C\quad.$$

C)

$$\int \sqrt{a^2 + b^2x^2}\,dx = \int \frac{a^2 + b^2x^2}{\sqrt{a^2 + b^2x^2}}\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\,x\sqrt{a^2 + b^2x^2} + \frac{a^2}{2\,b}\,l\left(b\,x + \sqrt{a^2 + b^2x^2}\right) + C\quad.$$

D)

$$\int \sqrt{a + 2\,b\,x + c\,x^2}\,dx = \int \frac{a + 2\,b\,x + c\,x^2}{\sqrt{a + 2\,b\,x + c\,x^2}}\,dx$$
$$= \frac{c\,x + b}{2\,c}\sqrt{a + 2\,b\,x + c\,x^2} + \frac{a\,c - b^2}{2\,c}\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2\,b\,x + c\,x^2}}\quad.$$

5. Um das Integral zu ermitteln

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{a + 2\,b\,x + c\,x^2}}\quad.$$

setzen wir

$$x = \frac{1}{y} + a\,,\quad \text{also}\quad dx = -\frac{dy}{y^2}\quad,$$

$$a + 2\,b\,x + c\,x^2 = \frac{1}{y^2}\left[c + 2\,(b + c\,a)\,y + (a + 2\,b\,a + c\,a^2)\,y^2\right]\quad,$$

und erhalten dadurch

$$1)\quad \int \frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{a + 2\,b\,x + c\,x^2}} = -\int \frac{y^{n-1}\,dy}{\sqrt{c + 2\,(b + c\,a)\,y + (a + 2\,b\,a + c\,a^2)\,y^2}}\quad.$$

Ist nun

$$\alpha^2 + 2b\alpha + c\alpha^2 = 0 \quad ,$$

also $x - \alpha$ ein Faktor von

$$a + 2bx + cx^2 \quad ,$$

so reduziert sich das Integral auf

$$2) \qquad -\int \frac{y^{n-1}\,dy}{\sqrt{c + 2(b + c\alpha)y}} \quad ,$$

und wird durch die Änderung

$$c + 2(b + c\alpha)y = z^2$$

in das Integral einer rationalen Funktion verwandelt.

Ist hingegen

$$\alpha^2 + 2b\alpha + c\alpha^2 \gtrless 0 \quad ,$$

so hat man 1) nach den im vorigen Abschnitte gegebenen Regeln zu entwickeln.

6. Hiermit ist nun auch das allgemeine Integral erledigt

$$\int \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} \quad ,$$

wenn $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ ganze Funktionen von x bezeichnen und $\varphi(x)$ nur reale lineare Faktoren hat.

Man zerlege den Quotienten $\psi(x) : \varphi(x)$ nach den in § 3 gegebenen Regeln in eine ganze Funktion und in ein Polynom von Brüchen von der Form

$$\frac{A}{(x - \xi)^n} \quad .$$

Dadurch zerfällt das vorgelegte Integral in ein Polynom von Integralen, die nach den gegebenen Regeln entwickelt werden können.

7. Alle Integrale von der Form

$$1) \qquad \int F\left(x, \sqrt{a + 2bx + cx^2}\right) dx \quad ,$$

wobei F eine rationale algebraische Funktion von x und $\sqrt{a + 2bx + cx^2}$ bedeutet, können durch geschickte Wahl einer neuen Veränderlichen in Integrale einer rationalen Funktion verwandelt werden.

Eine solche neue Veränderliche y muß die Bedingungen erfüllen, daß durch sie sowohl x als $\sqrt{a + 2bx + cx^2}$ rational in y ausgedrückt werden. Diese Bemerkung führt auf den Gedanken, eine Ersetzung von der Form zu versuchen

$$\sqrt{a + 2bx + cx^2} = A + Bx + Cy \quad ,$$

worin A, B, C noch zu bestimmen sind. Durch Quadrieren findet man

$$2) \qquad a + 2bx + cx^2 = A^2 + 2ABx + 2ACy + B^2x^2 + 2BCxy + C^2y^2 \quad .$$

Damit nun x rational in y ausgedrückt werde, muß $B^2 = c$ sein; um die Formeln zu vereinfachen, nehmen wir ferner $AB = b$, also $A = b : \sqrt{c}$. Hierdurch erhält man aus 2), wenn man zur Abkürzung $b^2 - ac$ durch Δ bezeichnet

$$3) \qquad x = -\frac{\Delta + cC^2y^2 + 2b\sqrt{c} \cdot Cy}{2c\sqrt{c}\,Cy} \quad .$$

Hierin kann noch C beliebig gewählt werden; nimmt man

$$C = 2b : \sqrt{c} \quad ,$$

so wird

$$cC^2 = 2b\sqrt{c}\sqrt{C} = 4b^2$$

und man erhält die Formelgruppe

$$4)\quad \begin{cases} x = -\dfrac{\varDelta + 4b^2(y+y^2)}{4bcy} \quad , \\ \sqrt{a+2bx+cx^2} = -\dfrac{\varDelta - 4b^2y^2}{4b\sqrt{c}\cdot y} \quad , \\ dx = \dfrac{\varDelta - 4b^2y^2}{4bcy^2}\,dy \quad , \\ y = \dfrac{1}{2b}(-b-cx+\sqrt{c}\cdot\sqrt{a+2bx+cx^2}) \quad . \end{cases}$$

Diese Formeln sind nur anzuwenden, solange c positiv ist, da sonst durch $\sqrt{c}$ imaginäre Bestandteile eintreten würden.

Ist c negativ, so ist $\sqrt{a+2bx+cx^2}$ für reale Werte von x nur dann real, wenn $b^2 - ac > 0$ ist, wenn also $a + 2bx + cx^2$ reale lineare Faktoren hat.

Ist nun

$$a + 2bx + cx^2 = c(x-\alpha)(x-\beta) \quad ,$$

so setze man

$$5)\qquad c\frac{x-\alpha}{x-\beta} = y^2 \quad ,$$

also

$$6)\qquad a + 2bx + cx^2 = c(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\beta)^2y^2 \quad .$$

Aus 5) und 6) folgen die weitern Formeln

$$7)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\beta y^2 - ac}{y^2 - c} = \dfrac{(b-\varDelta)c - (b+\varDelta)y^2}{c(y^2-c)} \quad , \\ \sqrt{a+2bx+cx^2} = \dfrac{c(\beta-\alpha)y}{y^2-c} = -\dfrac{2\varDelta y}{y^2-c} \quad , \\ dx = -2\dfrac{c(\beta-\alpha)y}{(y^2-c)^2}\,dy = \dfrac{4\varDelta y}{(y^2-c^2)^2}\,dy \quad , \\ y = \sqrt{c}\sqrt{\dfrac{cx+b-\varDelta}{cx+b+\varDelta}} \quad . \end{cases}$$

Durch die Anwendung der Formeln 4) gewinnt man insbesondere, wenn

$$c > 0 \quad ,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{c}\cdot y} = -\frac{1}{\sqrt{c}}\,l y$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{c}}\,l\frac{-(b+cx)+\sqrt{c}\cdot\sqrt{a+2bx+cx^2}}{2b} + C \quad .$$

Rechnet man $\frac{1}{\sqrt{c}}\,l\,2b$ mit in die Konstante, so kann man hierfür schreiben

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\,l\frac{1}{-(b+cx)+\sqrt{c}\cdot\sqrt{a+2bx+cx^2}} + C \quad .$$

Erweitert man den Logarithmanden mit $b + cx + \sqrt{c}\sqrt{a+2bx+cx^2}$, so erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\,l\frac{b+cx+\sqrt{c}\sqrt{a+2bx+cx^2}}{ac-b^2} + C \quad .$$

Wird hiervon der Bestandteil $\frac{1}{\sqrt{c}}\, l \frac{1}{ac - b^2}$ zur Konstanten gerechnet, so bleibt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\, l\left(b + cx + \sqrt{c}\sqrt{a + 2bx + cx^2}\right) + C \quad ,$$

in Übereinstimmung mit Nr. 3, 5).

Ist $c < 0$, so ergibt die zweite Änderung

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = -2\int \frac{dy}{-c + y^2} = -\frac{2}{\sqrt{-c}} \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{\sqrt{-c}} + C \quad .$$

Ist z die Tangente eines Arcus, so ist dessen Sinus $\frac{z}{\sqrt{1 + z^2}}$, daher hat man

$$\operatorname{arc\,tang} z = \arcsin \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} \quad ,$$

und folglich

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{y}{\sqrt{-c}} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{y^2 - c}} \quad .$$

Ist ferner z der Sinus eines Arcus, so ist der Sinus des doppelten Arcus $2z\sqrt{1 - z^2}$, also hat man

$$2 \arcsin z = \arcsin 2z\sqrt{1 - z^2} \quad ,$$

folglich

$$2 \arcsin \frac{y}{\sqrt{y^2 - c}} = \arcsin \frac{2\sqrt{-c} \cdot y}{y^2 - c} \quad .$$

Benutzt man hier die zweite Gleichung der Gruppe 7), sowie

$$\beta - \alpha = -\frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{c} \quad ,$$

so ergibt sich

$$2 \arcsin \frac{y}{\sqrt{y^2 - c}} = -\arcsin \sqrt{-\frac{c}{b^2 - ac}(a + 2bx + cx^2)} \quad .$$

Macht man noch von der Formel Gebrauch

$$\arcsin t = \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{1 - t^2} \quad ,$$

so erhält man schließlich

$$2 \arcsin \frac{y}{\sqrt{y^2 - c}} = \arcsin \frac{cx + b}{\sqrt{b^2 - ac}} - \frac{\pi}{2} \quad .$$

Daher folgt, wenn man $-\frac{\pi}{2}$ in die Konstante rechnet

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{cx + b}{\sqrt{(b^2 - ac)}} + C \quad ,$$

in Übereinstimmung mit Nr. 3, 10).

§ 5. Integration transcendenter Funktionen.

1. Die Integrale von Funktionen, welche die transcendenten Funktionen e^x, lx, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, $\operatorname{arc\,sin} x$, $\operatorname{arc\,tang} x$ enthalten, sind im allgemeinen ebensowenig durch die bisher bekannten Funktionen ausdrückbar, wie die Integrale von irrationalen Funktionen, nur in einigen einfachen Fällen gelingt die Zurückführung auf bekannte Funktionen.

2. A) Ein Integral von der Form

$$\int f(e^x)\,dx \quad ,$$

worin f eine algebraische Funktion bezeichnet, verwandelt man in ein Integral einer algebraischen Funktion durch die Änderung

$$e^x = y\,, \quad \text{also} \quad dx = \frac{dy}{y} \quad ;$$

denn man erhält hierdurch

$$1) \qquad \int f(e^x)\,dx = \int f(y)\frac{dy}{y} \quad .$$

So hat man z. B.

$$\int\frac{dx}{a+be^x} = \int\frac{dy}{y(a+by)} = \int\frac{1}{a}\left(\frac{1}{y} - \frac{b}{a+by}\right)dy$$

$$= \frac{1}{a}[ly - l(a+by)] + C = \frac{1}{a}[x - l(a+be^x)] + C \quad .$$

B) Für das Integral

$$\int f(e^{ax})\,dx$$

benutzt man

$$e^{ax} = y\,, \quad \text{also} \quad dx = \frac{dy}{ay} \quad ,$$

und erhält

$$2) \qquad \int f(e^{ax})\,dx = \frac{1}{a}\int f(y)\frac{dy}{y} \quad .$$

Auf diesem Wege ergibt sich

$$\int\sqrt{e^{ax}+1}\,dx = \frac{1}{a}\int\sqrt{y+1}\,\frac{dy}{y} \quad .$$

Setzt man hier weiter

$$y = z^2 - 1\,, \quad dy = 2z\,dz \quad ,$$

so erhält man

$$\int\sqrt{e^{ax}+1}\,dx = \frac{2}{a}\int\frac{z^2\,dz}{z^2-1} = \frac{2}{a}\int\left(1 + \frac{1}{z^2-1}\right)dz$$

$$= \frac{2}{a}\left(z + \frac{1}{2}\,l\,\frac{z-1}{z+1}\right) + C$$

$$= \frac{2}{a}\left(\sqrt{e^{ax}+1} + \frac{1}{2}\,l\,\frac{\sqrt{e^{ax}+1}-1}{\sqrt{e^{ax}+1}+1}\right) + C \quad .$$

Macht man noch von der Formel Gebrauch

$$\frac{1}{\sqrt{e^{ax}+1}+1} = \frac{\sqrt{e^{ax}+1}-1}{e^{ax}} \quad ,$$

so hat man schließlich

$$\int\sqrt{e^{ax}+1}\,dx = \frac{2}{a}\left[\sqrt{e^{ax}+1} + l\left(\sqrt{e^{ax}+1}-1\right)\right] - x + C \quad .$$

C) Das Integral

$$\int x^n e^{mx}\,dx$$

kann man zunächst dadurch vereinfachen, daß man $mx = y$ setzt; dann wird $dx = dy : m$, $x^n = y^n : m^n$, und man erhält

$$3) \qquad \int x^n e^{mx}\,dx = \frac{1}{m^{n+1}}\int y^n e^y\,dy \quad .$$

Ist nun n eine natürliche Zahl, so kann dieses Integral durch wiederholte Anwendung der teilweisen Integration vollständig entwickelt werden. Denn man hat (§ 2, Nr. 3)

$$4) \qquad \int y^k e^y dy = y^k e^y - k\int y^{k-1} e^y\,dy \quad .$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel erhält man

$$5) \qquad \int y^n e^y dy = e^y\left[y^n - n y^{n-1} + n(n-1)y^{n-2} - \ldots\right] \quad .$$

Wenn in dem Integrale

$$\int f(x)\,e^{mx}\,dx$$

$f(x)$ eine ganze rationale Funktion von x ist, so kann man dies Integral in ein Polynom von Integralen

$$A\int x^n e^{mx}\,dx$$

zerlegen und jedes derselben nach 3) und 5) integrieren.

Kürzer gelangt man auf folgendem Wege zum Ziele. Durch teilweise Integration ergibt sich

$$\int f(x)\,e^x\,dx = f(x)\,e^x - \int f'(x)\,e^x\,dx \quad .$$

Wendet man diese Formel wiederholt an, so findet man

$$6) \qquad \int f(x)\,e^x\,dx = e^x\left[f(x) - f'(x) + f''(x) - f'''(x) + \ldots\right] \quad .$$

Ist n eine negative ganze Zahl, so führt folgender Weg zu einer Vereinfachung: Man erhält aus 4), wenn man $k-1$ durch k ersetzt

$$\int y^k e^y\,dy = \frac{y^{k+1}e^y}{k+1} - \frac{1}{k+1}\int y^{k+1} e^y\,dy \quad .$$

Ist $k = -n$, so erhält man

$$7) \qquad \int\frac{e^y}{y^n}\,dy = -\frac{e^y}{(n-1)\,y^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int\frac{e^y}{y^{n-1}}\,dy \quad .$$

Wendet man diese Formel hinreichend oft an, so gelangt man schließlich zu dem Integrale

$$\int\frac{e^y}{y}\,dy \quad ,$$

das nicht weiter vereinfacht werden kann.

So ist

$$\int\frac{e^y}{y^4}\,dy = -\frac{e^y}{3y^3} + \frac{1}{3}\int\frac{e^y}{y^3}\,dy \quad ,$$

$$\int\frac{e^y}{y^3}\,dy = -\frac{e^y}{2y^2} + \frac{1}{2}\int\frac{e^y}{y^2}\,dy \quad ,$$

$$\int\frac{e^y}{y^2}\,dy = -\frac{e^y}{y} + \int\frac{e^y}{y}\,dy \quad .$$

Daher
$$\int \frac{e^y}{y^4} dy = -e^y\left(\frac{1}{3y^3} + \frac{1}{6y^2} + \frac{1}{6y}\right) + \frac{1}{6}\int \frac{e^y}{y} dy \quad .$$

D) Zur Reduktion des Integrals
$$\int (x-a)^n e^x dx$$
setze man $x - a = y$; man erhält

$$8) \qquad \int (x-a)^n e^x dx = e^a \int y^n e^y dy \quad ,$$

und arbeitet nun weiter nach Formel 5) oder 8), je nachdem n positiv oder negativ ist.

Für die Bestimmung von $\int \frac{e^x}{x} dx$, sowie andrer irreduktibler Integrale ist man auf die Entwicklung in eine unendliche Reihe verwiesen (vgl. § 6).

E) Integrale von der Form
$$\int f(a^x)\, dx\,, \qquad \int f(a^x)\, \varphi(x)\, dx$$
bringt man auf die soeben betrachteten, indem man von der Identität Gebrauch macht
$$a^x = e^{x\,la} \quad ,$$
und die Änderung ausführt
$$x = \frac{y}{la} \quad .$$

Die gegebenen Integrale gehen dadurch über in
$$\frac{1}{la}\int f(e^y)\, dy\,, \qquad \frac{1}{la}\int f(e^y)\, \varphi\left(\frac{y}{la}\right) dy \quad .$$

3. Integrale von Funktionen, die außer der Veränderlichen noch deren natürlichen Logarithmus enthalten, also von der Form sind
$$\int f(x,\, lx)\, dx \quad ,$$
kann man in Integrale mit Exponentialgrößen verwandeln, indem man setzt
$$lx = y \quad ,$$
also
$$x = e^y\,, \qquad dx = e^y dy \quad .$$

Man erhält dadurch
$$1) \qquad \int f(x,\, lx)\, dx = \int f(e^y,\, y)\, e^y dy \quad .$$

Beispiele. A) Auf diesem Wege erhält man
$$\int (lx-2)^3 dx = \int (y-2)^3 e^y dy \quad ,$$
also nach Nr. 2, 9)
$$\begin{aligned} &= e^y[(y-2)^3 - 3(y-2)^2 + 6(y-2) - 6] + C \\ &= e^y(y^3 - 9y^2 + 30y - 38) + C \\ &= x[(lx)^3 - 9(lx)^2 + 30\,lx - 38] + C \quad . \end{aligned}$$

B) Ferner erhält man durch dieselbe Änderung, wenn $m \gtrless -1$,
$$2) \quad \left\{ \begin{aligned} \int x^m\, lx\, dx &= \int e^{(m+1)y} \cdot y\, dy \\ &= \frac{1}{(m+1)^2} e^{(m+1)y}[(m+1)y - 1] + C \\ &= \frac{1}{(m+1)^2} x^{m+1}[(m+1)\,lx - 1] + C \quad . \end{aligned} \right.$$

Dies hätte man auch leicht durch teilweise Integration finden können.

C) Auf letzterem Wege ergibt sich

$$3) \qquad \int f(x)\, lx\, dx = lx \int f(x)\, dx - \int \frac{\int f(x)\, dx}{x} dx + C \quad .$$

Ist $f(x)$ eine ganze rationale Funktion von x, so sind die rechts vorkommenden Integrale ausführbar; das Integral 2) ist ein besonderer Fall von Formel 3).

D) Ebenso erhält man

$$4) \quad \int x^n\, l(a + b x^m)\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}\, l(a + b x^m) - \frac{b m}{n+1} \int \frac{x^{m+n}}{a + b x^m} dx \quad .$$

E) Allgemeiner ergibt sich

$$5) \qquad \int f(x)\, l\varphi(x)\, dx = l\varphi(x) \int f(x)\, dx - \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \left(\int f(x)\, dx \right) dx \quad .$$

Ist $f(x)$ eine ganze Funktion und $\varphi(x)$ eine rationale, so ist das Integral vollständig ausführbar; doch führt die Formel 5) auch nicht selten in andern Fällen zum Ziele, insbesondere dann, wenn $\int f(x)\, dx$ algebraisch ist.

F) Man bemerke noch das Integral

$$6) \qquad \int \frac{lx}{x} dx = \frac{1}{2} (lx)^2 + C \quad .$$

G) Macht man in $\int \frac{dx}{lx}$ die Änderung $lx = y$, so erhält man

$$7) \qquad \int \frac{dx}{lx} = \int \frac{e^y}{y} dy \quad .$$

---

4. Integrale goniometrischer Funktionen. Wir bemerken hier zunächst folgende einfache Integralformeln

$$1) \qquad \int \operatorname{tang} x\, dx = \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = -l \cos x + C \quad ,$$

$$2) \qquad \int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x} = l \sin x + C \quad ,$$

$$3) \quad \int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x} = \int \frac{d \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} x} = l \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} x + C \quad ,$$

$$4) \qquad \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = l \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C \quad .$$

5. Integrale goniometrischer Funktionen können durch verschiedene Änderungen in Integrale algebraischer verwandelt werden. Hat man

$$\int f(\sin x, \cos x)\, dx \quad ,$$

so setze man $\operatorname{tang} \frac{1}{2} x = z$; dann ist

$$dx = \frac{2\, dz}{1 + z^2}, \qquad \sin x = 2 \sin \tfrac{1}{2} x \cos \tfrac{1}{2} x = \frac{2z}{1 + z^2}, \qquad \cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2} \quad .$$

Das Integral geht somit über in

$$\int f\left(\frac{2z}{1 + z^2}, \frac{1 - z^2}{1 + z^2} \right) \frac{2\, dz}{1 + z^2} \quad .$$

Ist f eine rationale Funktion von $\sin x$ und $\cos x$, so hat man eine rationale Funktion von z zu integrieren.

Hiernach ist

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} = \int \frac{2\,dz}{2\,a\,z + b - b\,z^2} = \frac{2}{b} \int \frac{dz}{1 + \frac{a^2}{b^2} - \left(z - \frac{a}{b}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, l \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a + b\,z}{\sqrt{a^2 + b^2} + a - b\,z} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, l \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a + b \operatorname{tang} \frac{1}{2} x}{\sqrt{a^2 + b^2} + a - b \operatorname{tang} \frac{1}{2} x} + C \ .$$

Dieses Integral kann auch auf folgendem Wege gefunden werden. Man kann setzen

$$a = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos \mu \,, \qquad b = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin \mu \ .$$

Dadurch erhält man

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \int \frac{dx}{\sin (x + \mu)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot l \operatorname{tang} \frac{x + \mu}{2} + C \ .$$

Um dieses Ergebnis mit dem vorhergehenden zu vereinen, bemerke man, daß

$$\operatorname{tang} \frac{x + \mu}{2} = \frac{\sin \frac{\mu}{2} + \cos \frac{\mu}{2} \operatorname{tang} \frac{x}{2}}{\cos \frac{\mu}{2} - \sin \frac{\mu}{2} \operatorname{tang} \frac{x}{2}} \,,$$

$$\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\mu}{2} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{\sqrt{a^2 + b^2}}} \,, \qquad \sqrt{2} \cdot \cos \frac{\mu}{2} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{\sqrt{a^2 + b^2}}} \ .$$

Hiernach erhält man

$$l \operatorname{tang} \frac{x + \mu}{2} = l \frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a} + \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a} \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} x}{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a} - \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a} \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} x} \ .$$

Addiert man hierzu den konstanten Betrag

$$l \frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a}}{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a}} \,,$$

so erhält man

$$l \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a + b \operatorname{tang} \frac{1}{2} x}{\sqrt{a^2 + b^2} + a - b \operatorname{tang} \frac{1}{2} x} \ .$$

Allgemeiner ergibt sich

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c} = 2 \int \frac{dz}{b + c + 2\,a\,z + (c - b)\,z^2} \ .$$

Für die weitere Ausführung ist zu unterscheiden, ob der Nenner im rechts stehenden Integrale in reale oder in komplexe Faktoren zerfällt.

6. Ersetzt man in dem Integrale

$$\int f(\sin x, \cos x, \operatorname{tang} x)\, dx$$

den Cosinus und die Tangente durch den Sinus, so erhält man ein Integral von der Form

$$\int \varphi(\sin x)\, dx \quad .$$

Setzt man nun weiter $\sin x = z$, so ist

$$dx = \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \quad ,$$

und man erhält

$$\int \varphi(\sin x)\, dx = \int \varphi(z) \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \quad .$$

Unter Umständen ist es zweckmäßiger, den Sinus und die Tangente durch den Cosinus auszudrücken; man kommt damit auf ein Integral von der Form

$$\int \psi(\cos x)\, dx \quad ;$$

durch die Änderung $\cos x = z$ erhält man dann

$$\int \psi(\cos x)\, dx = -\int \psi(z) \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \quad .$$

Auf diesem Wege ergibt sich

$$\int \sin^n x\, dx = \int \frac{z^n}{\sqrt{1 - z^2}}\, dz \quad .$$

Ist n eine ganze positive Zahl, so folgt nach § 4, Nr. 4, 1) für ein gerades n

$$\int \frac{z^n}{\sqrt{1 - z^2}}\, dz = -\frac{1}{n}\left[z^{n-1} + \frac{n-1}{n-2} z^{n-3} + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)} z^{n-5} + \ldots\right]\sqrt{1 - z^2}$$
$$+ \frac{1}{n} \cdot \frac{(n-1)(n-3)\ldots 5 \cdot 3}{(n-2)(n-4)\ldots 4 \cdot 2} \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \quad ;$$

daher hat man in diesem Falle

$$\int \sin^n x\, dx = -\frac{1}{n}\left[\sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n-2} \sin^{n-3} x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)} \sin^{n-5} x + \ldots\right] \cos x$$
$$+ \frac{1}{n} \cdot \frac{(n-1)(n-3)\ldots 5 \cdot 3}{(n-2)(n-4)\ldots 4 \cdot 2} \cdot x + C \quad .$$

Für ein ungerades n ist

$$\int \frac{z^n}{\sqrt{1 - z^2}}\, dz = -\frac{1}{n}\left[z^{n-1} + \frac{n-1}{n-2} z^{n-3} + \ldots + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 4 \cdot 2}{(n-2)(n-4)\ldots 3 \cdot 1}\right]\sqrt{1 - z^2} + C \quad ,$$

$$\int \sin^n x\, dx = -\frac{1}{n}\left[\sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n-2} \sin^{n-3} x + \ldots + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 4 \cdot 2}{(n-2)(n-4)\ldots 3 \cdot 1}\right] \cos x + C \quad .$$

7. In manchen Fällen empfiehlt es sich, in dem Integrale

$$\int f(\sin x, \cos x, \operatorname{tang} x)\, dx$$

den Sinus und Cosinus durch die Tangente auszudrücken; man erhält dann

$$\int \varphi(\operatorname{tang} x)\, dx \quad ;$$

setzt man nun $\operatorname{tang} x = z$, so entsteht

$$\int \varphi(z) \frac{dz}{1 + z^2} \quad .$$

Diese Änderung wird insbesondere dann von Nutzen sein, wenn φ rational ist. Hiernach ist

$$\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\cos^2 x} = \int \frac{dz}{a z^2 + b}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \operatorname{tang} x\right) + C, \quad \frac{a}{b} > 0$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\, l\, \frac{b + \sqrt{-ab} \cdot \operatorname{tang} x}{b - \sqrt{-ab} \cdot \operatorname{tang} x} + C, \quad \frac{a}{b} < 0 \quad .$$

8. Für die Entwicklung des Integrals

$$\int \sin^n x \cos^m x \, dx \quad ,$$

worin n und m natürliche Zahlen sein mögen, kann folgender Weg eingeschlagen werden.

Ist m ungerade, $m = 2r + 1$, so hat man

$$\int \sin^n x \cos^{2r+1} x \, dx = \int \sin^n x (1 - \sin^2 x)^r \cos x \, dx$$

$$= \int \left[\sin^n x - \binom{r}{1} \sin^{n+2} x + \binom{r}{2} \sin^{n+4} x - \binom{r}{3} \sin^{n+6} x + \ldots\right] \cos x \, dx$$

$$= \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} x - \frac{1}{n+3} \cdot \binom{r}{1} \sin^{n+3} x + \frac{1}{n+5} \cdot \binom{r}{2} \sin^{n+5} x - \ldots + C \; .$$

Ist n ungerade, so setzt man

$$\int \sin^{2r+1} x \cos^m x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^r \cos^m x \cdot \sin x \, dx$$

$$= \int \left[\cos^m x - \binom{r}{1} \cos^{m+2} x + \binom{r}{2} \cos^{m+4} x - \ldots\right] \cdot \sin x \, dx$$

$$= -\frac{1}{m+1} \cdot \cos^{m+1} x + \frac{1}{m+3} \cdot \binom{r}{1} \cos^{m+3} x - \frac{1}{m+5} \cdot \binom{r}{2} \cos^{m+5} x + \ldots + C.$$

Sind m und n beide gerade, $m = 2q$, $n = 2r$, so hat man

$$\int \sin^{2q} x \cos^{2r} x \, dx = \int \sin^{2q} x (1 - \sin^2 x)^r dx$$

$$= \int \left[\sin^{2q} x - \binom{r}{1} \sin^{2q+2} x + \binom{r}{2} \sin^{2q+4} x - \binom{r}{3} \sin^{2q+6} x + \ldots\right] dx \quad .$$

Hier kann jedes Glied nach Nr. 6 integriert werden.

9. Sind r und n natürliche Zahlen, so ist

$$1) \quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{\sin^{2r+1} x \, dx}{\cos^n x} = \int \frac{(1 - \cos^2 x)^r}{\cos^n x} \sin x \, dx \\ \displaystyle\qquad = \int \left[\frac{1}{\cos^n x} - \binom{r}{1} \frac{1}{\cos^{n-2} x} + \binom{r}{2} \frac{1}{\cos^{n-4} x} - \ldots\right] \sin x \, dx . \end{cases}$$

Ist $n = 2q$, so erhält man hieraus bei der Integration lauter ungerade Potenzen von $\cos x$; ist $n = 2q + 1$, und $q > r$, so erhält man außer geraden Potenzen von $\cos x$ noch ein Glied von der Form

$$A \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x} = -A \, l \cos x + C \quad .$$

Sind r und q natürliche Zahlen, so ist

$$2)\qquad \left\{\begin{aligned}\int \frac{\sin^{2r} x}{\cos^{2q-1} x}\,dx &= \int \frac{\sin^{2r} x}{\cos^{2q} x}\cos x\,dx\\ &= \int \frac{\sin^{2r} x}{(1-\sin^2 x)^q}\,d\sin x \quad .\end{aligned}\right.$$

Dieses Integral ist nach den Regeln für die Integration einer gebrochenen rationalen algebraischen Funktion (der Veränderlichen $\sin x$) weiter zu behandeln.

Für die Entwicklung des Integrales

$$\int \frac{\sin^{2r} x}{\cos^{2q} x}\,dx$$

wird man von der Änderung $\cos x = z$ Gebrauch machen.

Ersetzt man in diesen Integralen x durch $\frac{1}{2}\pi - x$, so erhält man Integrale von der Form

$$\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}\,dx \quad .$$

10. Durch teilweise Integration findet man

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx \quad ,$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx \quad .$$

Hieraus ergibt sich

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C \quad ,$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C \quad .$$

Ersetzt man x durch $-x$, so folgt

$$\int e^{-ax}\sin bx\,dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx + b\cos bx) + C \quad ,$$

$$\int e^{-ax}\cos bx\,dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx - b\sin bx) + C \quad .$$

11. Durch teilweise Integration ergibt sich

$$\int f(x)\arcsin x\,dx = \arcsin x\int f(x)\,dx - \int\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int f(x)\,dx\right]dx \quad ,$$

$$\int f(x)\arccos x\,dx = \arccos x\int f(x)\,dx + \int\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int f(x)\,dx\right]dx \quad ,$$

$$\int f(x)\,\mathrm{arc\,tang}\,x\,dx = \mathrm{arc\,tang}\,x\int f(x)\,dx - \int\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\int f(x)\,dx\right]dx \quad .$$

Ist $\int f(x)\,dx$ algebraisch, so hat man schließlich nur noch eine algebraische Funktion zu integrieren.

12. Durch die Änderung

$$\arcsin x = z\,, \quad \text{also} \quad x = \sin z$$

erhält man

$$1)\qquad \int f(\arcsin x)\,dx = \int f(z)\cos z\,dz \quad .$$

Ebenso erhält man durch

$$\operatorname{arc\,cos} x = z\,, \quad \text{bezw.} \quad \operatorname{arc\,tang} x = z$$

die Reduktionen

2) $$\int f(\operatorname{arc\,cos} x)\, dx = -\int f(z) \sin z\, dz \quad ,$$

3) $$\int f(\operatorname{arc\,tang} x)\, dx = \int f(z) \frac{dz}{\cos^2 z} \quad .$$

§ 6. Integration durch unendliche Reihen.

1. Hat man mit Hilfe des TAYLORschen Satzes die Entwicklung

1) $$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + R_n \quad ,$$

und ist für Werte von x, die innerhalb gewisser Grenzen liegen

$$\lim R_n = 0\,, \quad n = \infty \quad ,$$

so ist zunächst

2) $$\begin{cases} \int f(x)\, dx = \int (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + R_n)\, dx \\ = A_0 x + \frac{1}{2} A_1 x^2 + \frac{1}{3} A_2 x^3 + \ldots + \frac{1}{n+1} A_n x^{n+1} + \int R_n dx \quad . \end{cases}$$

Das Integral $\int_a^x R_n\, dx$ bedeutet geometrisch den Inhalt einer Fläche, die von der Abscissenachse und von der Kurve $y = R_n$ begrenzt wird, und zwar das Stück dieser Fläche, das zwischen den zu den Abscissen a und x gehörigen Ordinaten liegt. Die Abscisse a ist dabei willkürlich, sie soll nur kleiner als x sein; sie mag daher so gewählt werden, daß für alle Werte der Veränderlichen von a bis x die Reihe 1) noch konvergiert.

Unter dieser Voraussetzung und für einen endlichen Wert von x ist $\int_a^x R_n\, dx$ eine ganz im Endlichen liegende Fläche, deren Ordinaten sämtlich verschwinden: daher verschwindet auch die Fläche und man hat

$$\int_a^x R_n\, dx = 0\,, \qquad \text{also} \qquad \int R_n\, dx = \text{Konst.}$$

Für alle Werte von x, für welche die Reihe gilt

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots \quad ,$$

ist daher

$$\int f(x)\, dx = A_0 x + \tfrac{1}{2} A_1 x^2 + \tfrac{1}{3} A_2 x^3 + \tfrac{1}{4} A_3 x^4 + \ldots + C \quad .$$

2. Wir benutzen diesen Satz zunächst, um einige in der Differentialrechnung gegebene Reihenentwicklungen auf einem neuen Wege abzuleiten.

A) Für jedes echt gebrochene x ist

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots, \quad x^2 < 1 \quad ,$$

Hieraus folgt

$$\int \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots + C \quad ,$$

Da nun

$$\int \frac{dx}{1+x} = l(1+x) + C_1 \quad ,$$

so ist, indem man C_1 und C vereint,

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots + C \quad .$$

Den besondern Wert, den die Konstante zur Erfüllung dieser Gleichung haben muß, bestimmt man, indem man x einen besondern Wert beilegt, für den die Reihensumme sich leicht angeben läßt. Wir nehmen $x = 0$ und erhalten

$$0 = C \quad ,$$

also

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots, \quad x < 1 \quad .$$

B) Aus der Entwicklung

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots, \quad x^2 < 1 \quad ,$$

folgt

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots + C \quad .$$

Daher hat man

$$\operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots + C, \quad x^2 < 1 \quad .$$

Da für $x = 0$ die Reihe sowie $\operatorname{arc\,tang} x$ verschwinden, so folgt $C = 0$, also

$$\operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots, \quad x^2 < 1 \quad .$$

C) Nach dem binomischen Satze ist

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \ldots, \quad x^2 \leq 1 \quad .$$

Hieraus folgt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots + C \quad .$$

Mithin ist

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots + C \quad .$$

Für $x = 0$ verschwinden die Reihe und $\arcsin x$; also ist $C = 0$ und man hat

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots, \quad x^2 < 1 \quad .$$

3. Wenn man $f(x)$ in eine Reihe nach TAYLOR entwickeln und das Integral $\int f(x)\,dx$ auf bisher bekannte Funktionen zurückführen kann, so dient der Satz in Nr. 1 dazu, die Funktion $\int f(x)\,dx$ in eine unendliche Reihe zu entwickeln. Aus der Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot x^6 + \ldots, \quad x^2 \leq 1 \quad ,$$

folgt durch Integration

$$l(x+\sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots + C \ .$$

Setzt man $x = 0$, so findet man $C = 0$. Also hat man die neue Reihenentwicklung

$$l(x+\sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} = \ldots, \qquad x^2 \leqq 1 \ .$$

4. Die wichtigste Anwendung der Integration durch unendliche Reihen besteht darin, daß man hierdurch in den Stand gesetzt ist, ein irreduktibles Integral $\int f(x)\,dx$ in eine Potenzreihe zu entwickeln, sobald die Funktion $f(x)$ dieser Entwicklung fähig ist.

Aus der für alle Werte von x gültigen Entwicklung

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$$

folgt, ebenfalls für alle Werte von x,

$$\frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$$

Die Funktion $e^x : x$ ist für alle endlichen von Null verschiedenen Werte von x endlich und wird nur unendlich groß für $x = 0$. Schließen wir diesen Wert aus, so ist für *jedes endliche positive* x

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx = lx + x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + C \ .$$

Ist x negativ, so setze man $x = -y$; dann erhält man

$$e^{-y} = 1 - \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1\cdot 2} - \frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{y^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots$$

Daher ist

$$\int \frac{e^{-y}}{y}\,dy = ly - y + \frac{1}{2}\cdot\frac{y^2}{1\cdot 2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{y^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots + C \ .$$

Ersetzt man nun hier wieder y durch $-x$, so findet man für *negative Werte* von x

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx = l(-x) + x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + C \ .$$

5. Für alle endlichen x gilt die Reihe

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \ldots$$

Daher ist auch unbeschränkt

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \ldots$$

und mithin

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$= x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \ldots + C \ .$$

6. Bei dem Integrale

$$\int \frac{l(1+x)}{x}\,dx$$

muß x wegen $l(1+x)$ größer als -1 sein. Ist nun $-1 < x < +1$, so hat man

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Daher ist

$$\int \frac{l(1+x)}{x}\,dx = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \ldots + C$$
$$-1 < x < +1 \quad .$$

Ist $x > 1$, so benutze man

$$l(1+x) = lx + l\left(1+\frac{1}{x}\right) = lx + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^4} + \ldots$$

Da nun

$$\int \frac{lx}{x}\,dx = \int lx \cdot d\,lx = \frac{1}{2}(lx)^2 + C \quad ,$$

so folgt

$$\int \frac{l(1+x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}(lx)^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2^2 x^2} - \frac{1}{3^2 x^3} + \frac{1}{4^2 x^4} - \ldots + C \quad ,$$
$$x > 1 \quad .$$

§ 7. Einfache bestimmte Integrale.

1. Unter dem bestimmten Integrale

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

verstehen wir nach § 1, Nr. 5 die Fläche, die von der Kurve $y = f(x)$, der Abscissenachse und den zu den Abscissen a und x gehörigen Ordinaten eingeschlossen wird, unter der Voraussetzung, daß $x > a$ und daß $f(x)$ innerhalb der Grenzen a und x nicht unendlich wird. Wir haben gesehen, daß dieses bestimmte Integral ein besonderer Wert des vollständigen (unbestimmten) Integrals

$$\int f(x)\,dx$$

ist; wenn daher

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C \quad ,$$

so geht das bestimmte Integral

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

aus $\varphi(x) + C$ hervor, indem man der Konstanten C einen geeigneten besondern Wert C_1 erteilt, so daß man hat

$$1) \qquad \int_a^x f(x)\,dx = \varphi(x) + C_1 \quad .$$

Nun folgt unmittelbar aus der Definition, daß $\int_a^x f(x)$ verschwindet, wenn man x den besondern Wert a erteilt; daher ist

$$2) \qquad 0 = \varphi(a) + C_1 \quad .$$

Durch Subtraktion folgt nun aus 1) und 2)

$$3)\qquad \int_a^x f(x)\,dx = \varphi(x) - \varphi(a) \quad .$$

In dieser Gleichung erscheint nun x in doppelter Bedeutung. Insofern es in $f(x)\,dx$ auftritt, soll man sich unter x die veränderliche Abscisse denken, die von einem gegebenen Anfangswerte a bis zu einem unbestimmt gelassenen Endwerte wächst, und dann bedeutet wieder x diesen Endwert, und tritt in dieser Bedeutung als obere Grenze an dem Integralzeichen, sowie auf der rechten Seite in $\varphi(x)$ auf.

Will man die Unbestimmtheit des x in der letztern Bedeutung aufheben, so wird man zweckmäßig ein andres Zeichen dafür setzen, etwa b, und hat daher

$$4)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a) \quad ,$$

$$b > a \quad .$$

Um die Beschränkung $b > a$ aufheben zu können, benutzen wir als Definition des bestimmten Integrals die Gleichung § 1, Nr. 5, 9)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_0^n f(a + k\delta)\,\delta \quad ,$$

und halten nur daran fest, daß $f(x)$ für keine Abscisse, die zwischen a und b liegt, unendlich groß wird. Hierbei ist

$$\delta = \frac{b-a}{n} \quad ,$$

also ist

$$5)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_0^n f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n} \quad .$$

Nun ist, wie man sofort sieht,

$$a + k\frac{b-a}{n} = b + (n-k)\frac{a-b}{n} \quad .$$

Setzt man $n - k = k'$, so geht k' von n bis 0, wenn k die Werte von 0 bis n durchläuft. Daher hat man

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_n^0 f\left(b + k' \cdot \frac{a-b}{n}\right)\frac{b-a}{n} \quad .$$

Kehrt man hier die Ordnung der Summanden um, so hat man

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_0^n f\left(b + k' \cdot \frac{a-b}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

$$= -\lim \sum_0^n f\left(b + k' \cdot \frac{a-b}{n}\right)\frac{a-b}{n} \quad .$$

Vergleicht man die rechte Seite mit 5), so sieht man, daß gemäß dieser Definition

$$\lim \sum_0^n f\left(b + k' \cdot \frac{a-b}{n}\right) \cdot \frac{a-b}{n} = \int_b^a f(x)\,dx \quad .$$

Hieraus folgt die Gleichung

$$6)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad .$$

Daher der Satz: Vertauscht man die Grenzen eines bestimmten Integrals, so wechselt das Integral das Vorzeichen.

Aus der für $b > a$ gültigen Gleichung 4)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

folgt nun mit Hilfe der Gleichung 6)

$$\int_b^a f(x)\,dx = -[\varphi(b) - \varphi(a)] = \varphi(a) - \varphi(b) \quad .$$

Mithin gilt die Gleichung 4) unabhängig davon, ob $a \gtrless b$.

2. Ist $a < b < c$, so folgt aus der geometrischen Bedeutung des bestimmten Integrals die Gleichung

$$1)\qquad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \quad .$$

Hieraus ergibt sich weiter

$$\int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \quad .$$

Benutzt man nach Nr. 1

$$-\int_b^c f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx \quad ,$$

so erhält man

$$2)\qquad \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \quad .$$

Der Satz 1) gilt also auch, wenn man die Grenzen b und c gegeneinander vertauscht.

Ferner folgt aus 1)

$$-\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx \quad ,$$

also ist

$$3)\qquad \int_b^a f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx \quad .$$

Der Satz 1) gilt daher auch, wenn man a und b vertauscht.

Aus der Anordnung $a\,c\,b$ (2) erhält man durch Vertauschung der ersten und zweiten Grenze (nach 3) die Reihenfolge $c\,a\,b$, hieraus durch Vertauschung der zweiten und dritten $c\,b\,a$, und daraus endlich durch Vertauschung der ersten und zweiten $b\,c\,a$. Hieraus ergibt sich, daß der Satz

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

unabhängig davon gilt, wie die drei Zahlen a, b, c der Größe nach geordnet sind.

3. Nicht selten hat man es mit Funktionen $f(x)$ zu tun, welche die Eigenschaft haben, daß

$$f(a) = 0 \,, \quad \text{und} \quad f(a+z) = -f(a-z) \quad .$$

Hierher gehören z. B. alle ungeraden Potenzen von $a - x$; denn es ist

$$(a-a)^{2n+1} = 0 \,, \quad [a-(a+z)]^{2n+1} = -[a-(a-z)]^{2n+1} \quad ;$$

ferner alle goniometrischen Funktionen von x. Man hat z. B.

$$\operatorname{tang} 0 = 0 \,, \quad \operatorname{tang} z = -\operatorname{tang}(-z) \quad ,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\pi = 0 \,, \quad \cos(\tfrac{1}{2}\pi + z) = -\cos(\tfrac{1}{2}\pi - z) \quad .$$

Für derartige Funktionen ist

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)\,dx = 0 \quad .$$

Ersetzt man nämlich x durch $a + z$, also dx durch dz, so entsprechen den Werten $a - b$ und $a + b$ von x die Werte $(-b)$ und b der neuen Veränderlichen z; daher hat man

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)\,dx = \int_{-b}^{b} f(a+z)\,dz \quad .$$

Nun ist weiter

$$1) \qquad \int_{-b}^{b} f(a+z)\,dz = \int_{-b}^{0} f(a+z)\,dz + \int_{0}^{b} f(a+z)\,dz \quad .$$

Ferner ist

$$\int_{-b}^{0} f(a+z)\,dz = -\int_{0}^{-b} f(a+z)\,dz \quad .$$

Ersetzt man rechts z durch $-z$, also dz durch $-dz$, so erhält man

$$\int_{-b}^{0} f(a+z)\,dz = \int_{0}^{b} f(a-z)\,dz \quad .$$

Nun ist aber nach der Voraussetzung

$$f(a-z) = -f(a+z) \quad ;$$

daher hat man

$$\int_{-b}^{0} f(a+z)\,dz = -\int_{0}^{b} f(a+z)\,dz \quad .$$

Setzt man dies in 1) ein, so ergibt sich der Lehrsatz:

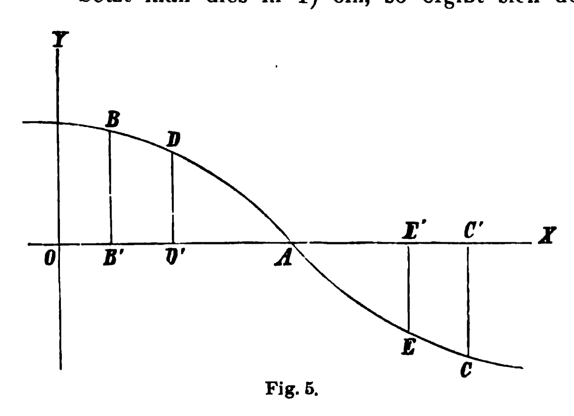


Fig. 5.

Ist $f(a) = 0$ und $f(a+z) = -f(a-z)$, so ist

$$\int_{a-b}^{a+b} f(z)\,dz = 0 \quad .$$

Diesen Satz kann man geometrisch leicht erläutern.

Die Kurve $y = f(x)$ schneidet die Abscissenachse in dem zu $x = a$ gehörigen Punkte A. (Fig. 5). Nach der Voraussetzung $f(a+z) = -f(a-z)$ sind die Ordinaten, welche zu zwei gleichweit von A liegenden Punkten D' und E' der Abscissenachse gehören, entgegengesetzt gleich, $D'D = -E'E$; ist daher $B'A = AC' = b$, so sind die Figuren $BB'A$ und $CC'A$ kongruent.

Da nun aber zu negativen Ordinaten negative Flächen gehören, so folgt, daß die Flächen $BB'A$ und $AC'C$ entgegengesetzt gleich sind, mithin verschwindet ihre Summe, es ist also

$$\int_{a-b}^{a+b} f(z)\,dz = 0 \quad .$$

Als Beispiele hierzu haben wir:

$$\int_{-b}^{b} (Ax^5 + Bx^3 + Cx)\,dx = 0 \quad ,$$

$$\int_{-b}^{b} \sin x\,dx = 0 \quad ,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}-b}^{\frac{\pi}{2}+b} \cos x\,dx = 0 \quad ,$$

$$\int_{-b}^{b} \arcsin x\,dx = 0 \quad .$$

4. Hat die Kurve $y = f(x)$ eine zur Y-Achse im Abstande a parallele Symmetrieachse, ist also

$$f(a+z) = f(a-z) \quad ,$$

und nimmt man an dem Integrale

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)\,dx$$

dieselbe Ersetzung und Zerlegung vor, wie in Nr. 3, so erhält man

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)\,dx = \int_{-b}^{0} f(a+z)\,dz + \int_{0}^{b} f(a+z)\,dz = \int_{0}^{b} f(a-z)\,dz + \int_{0}^{b} f(a+z)\,dz \quad .$$

Daher ist jetzt

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)\,dx = 2\int_{a}^{a+b} f(x)\,dx \quad .$$

Die Eigenschaft $f(a+z) = f(a-z)$ besitzen alle geraden Potenzen von $(a-x)$; ferner die goniometrischen Funktionen Sinus und Cosinus, denn es ist

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad ,$$

$$\cos x = \cos(-x) \quad .$$

Man hat daher z. B. die Reduktionen:

$$\int_{a-b}^{a+b} (a-x)^2\,dx = 2\int_{a}^{a+b} (a-x)^2\,dx \quad ,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}-b}^{\frac{\pi}{2}+b} \sin x\,dx = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+b} \sin x\,dx \quad ,$$

$$\int_{-b}^{b} \cos x\,dx = 2\int_{0}^{b} \cos x\,dx \quad .$$

Um auch diesen Satz geometrisch anschaulich zu machen, sei $OA' = a$, $B'A' = A'C' = b$ (Fig. 6); dann sind die Flächen $BB'A'A$ und $AA'C'C$ gleich, und es ist daher $BB'C'C = 2\,AA'C'C$, also

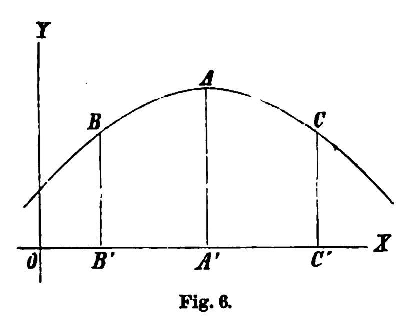


Fig. 6.

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)\,dx = 2\int_{a}^{a+b} f(x)\,dx \quad .$$

5. Ist $n \gtrless -1$, sowie $a > 0$, $b > 0$, so ist

$$1) \quad \int_a^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}) \quad .$$

Ist $n > 0$, so bleibt x^n für alle endlichen Werte von x endlich, und die Formel 1) gilt daher für alle endlichen a und b. Ist n negativ, so wird x^n unendlich groß, wenn $x = 0$ ist; in diesem Falle ist die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

nicht unbeschränkt anwendbar.

Wird $f(x)$ für die untere Grenze $a\,(< b)$, oder für die obere b, oder für einen zwischen den Grenzen liegenden Wert c unendlich groß, so verstehen wir unter

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

den Grenzwert, gegen welchen das Integral

$$\int_{a+\delta}^b f(x)\,dx\,, \quad \text{bezw.} \quad \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx$$

bezw. die Summe

$$\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

für verschwindende Werte der positiven Größen δ und ε konvergieren.

Demnach ist, wenn a eine negative, b eine positive Zahl bezeichnen

$$\int_0^b x^n\,dx = \lim \int_\delta^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - \lim \delta^{n+1}) \quad ,$$

$$\int_a^b x^n\,dx = \lim\left(\int_a^{-\delta} x^n\,dx + \int_\varepsilon^b x^n\,dx\right) = \frac{1}{n+1}[b^{n+1} - a^{n+1} + \lim(-\delta)^{n+1} - \lim \varepsilon^{n+1}].$$

Ist nun $n > -1$, so ist $n + 1 > 0$, und daher

$$\lim(-\delta)^{n+1} = \lim \varepsilon^{n+1} = 0 \quad ,$$

also ist

$$\int_0^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,b^{n+1}\,, \quad \int_a^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}) \quad ;$$

die Formel 1) gilt also für alle Werte von a und b, wenn $n > -1$.

Ist hingegen $n < -1$, so ist $n + 1 < 0$ und

$$\lim(-\delta)^{n+1} = \infty\,, \quad \lim \varepsilon^{n+1} = \infty \quad .$$

Daher ist in diesem Falle

$$\int_0^b x^n\,dx = -\infty\,, \quad \int_a^0 x^n\,dx = \infty \quad .$$

Das von der negativen Grenze a bis zur positiven b genommene Integral ist die Differenz zweier unendlich großen Werte; da δ und ε unabhängig voneinander der Grenze Null sich nähern, so ist diese Differenz unbestimmt.

Für $n = 1$ und positive Werte von a und b hat man

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = l\frac{b}{a} \quad .$$

Geht man zur Grenze $a = 0$ über, so erhält man

$$\int_0^b \frac{dx}{x} = \infty \quad .$$

6. Oft läßt sich ein bestimmtes Integral ermitteln, ohne daß man nötig hat, die unbestimmte Integration vollständig durchzuführen.

Aus dem unbestimmten Integrale

$$\int e^{mx}\,dx = \frac{1}{m}e^{mx} + C$$

ergibt sich das bestimmte

$$\int_a^b e^{mx}\,dx = \frac{1}{m}(e^{mb} - e^{ma}) \quad .$$

Insbesondere ist

$$\int_0^1 e^{mx}\,dx = \frac{1}{m}(e^m - 1) \quad ,$$

$$\int_0^a e^{-x}\,dx = 1 - e^{-a} \quad .$$

Geht man zur Grenze $a = \infty$ über, so ergibt sich

$$1) \qquad \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1 \quad .$$

Aus der Reduktion

$$\int x^m e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a}x^m e^{-ax} + \frac{m}{a}\int x^{m-1}e^{-ax}\,dx$$

folgt, wenn m und a positiv sind,

$$2) \qquad \int_0^\infty x^m e^{-ax}\,dx = \frac{m}{a}\int_0^\infty x^{m-1}e^{-ax}\,dx \quad .$$

Denn $x^m e^{-ax}$ verschwindet, wenn $x = 0$; daß diese Größe auch für $x = \infty$ verschwindet, erkennt man an der Reihenentwicklung

$$e^{ax} = 1 + ax + \frac{a^2x^2}{1\cdot 2} + \frac{a^3x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

die auch für $x = \infty$ gilt; man erhält hiernach

$$x^m e^{-ax} = 1 : \left(\frac{1}{x^m} + \frac{a}{x^{m-1}} + \frac{a^2}{2!\,x^{m-2}} + \ldots + \frac{a^m}{m!} + \frac{a^{m+1}x}{(m+1)!} + \ldots\right) .$$

Die ersten m Glieder des Divisors verschwinden für $x = \infty$; das $(m+1)$-te und alle folgenden werden unendlich groß; daher verschwindet der Quotient.

Ist nun m eine positive ganze Zahl, so gewinnt man durch wiederholte Anwendung von 2)

$$\int_0^\infty x^m e^{-ax}\,dx = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{a^m}\int_0^\infty e^{-ax}\,dx .$$

Ersetzt man rechts ax durch z, so erhält man

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-z}\,dz .$$

Daher hat mit Rücksicht auf 1)

$$\text{3)} \qquad \int_0^\infty x^m e^{-ax}\,dx = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{a^{m+1}}, \quad a > 0 .$$

Ist m eine positive gemischte Zahl, die aus der ganzen Zahl q und dem echten Bruche r besteht, so kommt man durch wiederholte Anwendung der Formel 2) auf die Reduktion

$$\text{4)} \qquad \int_0^\infty x^m e^{-ax}\,dx = \frac{m(m-1)\ldots(m-q)}{a^{q+1}}\int_0^\infty x^r e^{-ax}\,dx .$$

7. Durch teilweise Integration findet man

$$\int \sin^m x\,dx = -\sin^{m-1}x\cos x + (m-1)\int \cos^2 x \sin^{m-2}x\,dx .$$

Ersetzt man im letzten Integrale $\cos^2 x$ durch $1 - \sin^2 x$, so erhält man

$$\int \sin^m x\,dx = -\sin^{m-1}x\cos x + (m-1)\int \sin^{m-2}x\,dx - (m-1)\int \sin^m x\,dx ,$$

daher ist

$$\int \sin^m x\,dx = -\frac{1}{m}\sin^{m-1}x\cos x + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2}x\,dx .$$

Führt man hier die Integrationsgrenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ ein, so erhält man, sobald $m > 1$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx = \frac{m-1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}x\,dx .$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Reduktion gelangt man, je nachdem m gerade oder ungerade ist, schließlich zu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \text{oder} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1 .$$

Daher erhält man

$$1)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)(m-3)(m-5)\ldots 3\cdot 1}{m(m-2)(m-4)\ldots 4\cdot 2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & m \text{ gerade} \\[2ex] \dfrac{(m-1)(m-3)\ldots 4\cdot 2}{m(m-2)\ldots 5\cdot 3}, & m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Ersetzt man $\sin x$ durch z, so ist $\cos x\,dx = dz$, also $dx = dz : \sqrt{1-z^2}$, und den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ für x entsprechen für z die Grenzen 0 und 1. Vertauscht man nach der Ersetzung wieder die Buchstaben z und x, da, wie man sieht, die Bezeichnung der Integrationsveränderlichen bei einem bestimmten Integral zwischen konstanten Grenzen ganz willkürlich ist, so erhält man

$$2)\qquad \int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \dfrac{(m-1)(m-3)\ldots 3\cdot 1}{m(m-2)\ldots 4\cdot 2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & m \text{ gerade} \\[2ex] \dfrac{(m-1)(m-3)\ldots 4\cdot 2}{m(m-2)\ldots 3\cdot 1}, & m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

8. Enthält $f(x)$ eine von den Grenzen a und b unabhängige Größe y, so ist

$$\int_a^b f(x, y)\,dx$$

eine Funktion von y. Setzen wir daher

$$\int_a^b f(x, y)\,dx = F(y) \quad ,$$

so ist

$$\frac{dF(y)}{dy} = \lim\left[\int_a^b f(x, y+\Delta y)\,dx - \int_a^b f(x, y)\,dx\right] : \Delta y \quad .$$

Nun ist

$$\int_a^b f(x, y+\Delta y)\,dx - \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)]\,dx \quad .$$

Folglich hat man

$$\frac{dF(y)}{dy} = \lim\int_a^b \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\,dx$$

$$= \int_a^b \lim\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\,dx = \int_a^b \frac{df(x, y)}{dy}\,dx \quad .$$

Daher hat man die Gleichung

$$\frac{d\int_a^b f(x, y)\,dx}{dy} = \int_a^b \frac{df(x, y)}{dy}\,dx \quad .$$

Wir werden von derselben wiederholt Gebrauch machen, um aus einfachern Integralen minder einfache abzuleiten.

9. Das unbestimmte Integral

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{a} + C$$

liefert die bestimmten

$$1) \quad \int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{4a} , \qquad 2) \quad \int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a} .$$

Ersetzt man im letztern Integral a^2 durch b, so erhält man

$$\int_0^\infty \frac{dx}{b+x^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{b}} .$$

Differenziert man dies $(n-1)$-mal nach b und macht dabei von den Formeln Gebrauch

$$\frac{d^{n-1}(b+x^2)^{-1}}{db^{n-1}} = (-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot \frac{1}{(b+x^2)^n} ,$$

$$\frac{d^{n-1} b^{-\frac{1}{2}}}{db^{n-1}} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{b^{2n-1}}} ,$$

so erhält man, wenn man schließlich wieder b durch a^2 ersetzt,

$$3) \quad \int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-1)} \cdot \frac{\pi}{a^{2n-1}} .$$

§ 8. Berechnung von ebenen Flächen, Kurvenbogen, Raumteilen und unebenen Flächen durch einfache bestimmte Integrale.

1. Wenn der Kurvenzug $y = f(x)$ (Fig. 7) zwischen den Punkten A und B, deren Abscissen a und b sind, stetig verläuft, und so beschaffen ist, daß, während ein Punkt P auf der Kurve sich von A und B so bewegt, daß jeder Kurvenpunkt nur einmal durchlaufen wird, die Horizontalprojektion P' von P immer in derselben Richtung von A' nach B' gelangt, so ist die Fläche $A'ABB'$ (§ 1, Nr. 5)

$$1) \qquad F = \int_a^b f(x)\,dx .$$

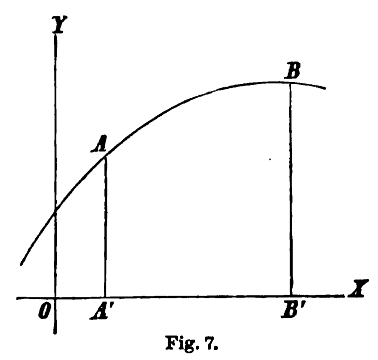


Fig. 7.

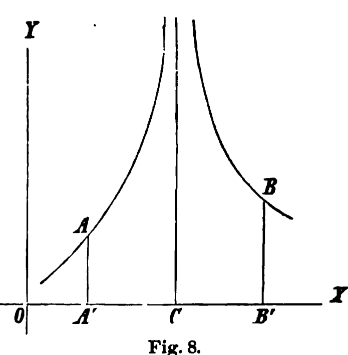


Fig. 8.

Wird die Ordinate für eine zwischen a und b liegende Abscisse $OC = c$ unendlich groß (Fig. 8), so ergibt sich die Fläche

$$2) \qquad F = \lim \int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \lim \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx .$$

Ist die Gleichung $y = f(x)$ auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem bezogen mit dem Achsenwinkel α (Fig. 9), so ist der zu Δx gehörige, der Ordinatenachse parallele Flächenstreifen zwischen den Grenzen enthalten

$$y \sin\alpha\, \Delta x < \Delta F < (y + \Delta y) \sin\alpha\, \Delta x \quad .$$

Also ist

$$y \sin\alpha < \frac{\Delta F}{\Delta x} < (y + \Delta y) \sin\alpha \quad .$$

Geht man zur Grenze $\Delta x = 0$ über, so erhält man

$$\frac{dF}{dx} = y \sin\alpha \quad ,$$

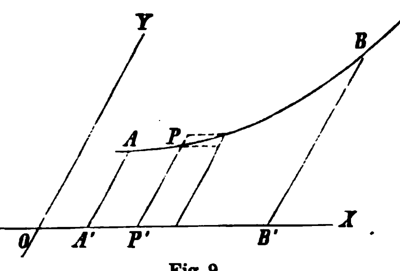


Fig. 9.

mithin für die Fläche $AA'B'B$ (unter übrigens gleichen Voraussetzungen wie oben)

$$3) \qquad F = \sin\alpha \int_a^b y\, dx \quad .$$

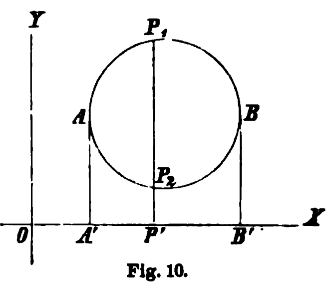


Fig. 10.

Ist in rechtwinkligen Koordinaten $y = f(x)$ die Gleichung einer geschlossenen Kurve (Fig. 10), die von den Loten zur Abscissenachse in zwei Punkten getroffen wird, so bestimme man zunächst auf analytisch-geometrischem Wege die Abscissen a und b der beiden die Kurve berührenden Ordinaten, zwischen denen die Kurve liegt. Bezeichnet nun y_1 die zu einer Abscisse x gehörige größere, y_2 die zugehörige kleinere Ordinate, und sind beide positiv, so ist die gesuchte Fläche

$$F = \int_a^b y_1\, dx - \int_a^b y_2\, dx \quad ,$$

mithin

$$4) \qquad F = \int_a^b (y_1 - y_2)\, dx \quad .$$

Für schiefwinklige Koordinaten erhält man (Fig. 11)

$$5) \qquad F = \sin\alpha \cdot \int_a^b (y_1 - y_2)\, dx \quad .$$

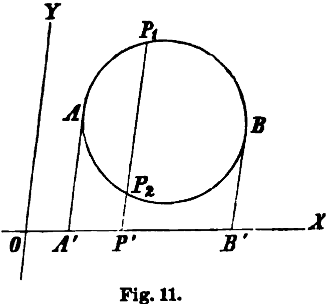


Fig. 11.

2. Eine Parabel, deren Achse in die Y-Achse und deren Scheitel in den Nullpunkt fällt (Fig. 12), hat die Gleichung

$$y = \frac{x^2}{2p} \quad .$$

Daher ist die Fläche $P_1' P_1 P_3 P_3'$

$$1) \qquad F = \int_{x_1}^{x_3} \frac{x^2}{2p}\, dx = \frac{1}{6p}(x_3^3 - x_1^3) \quad .$$

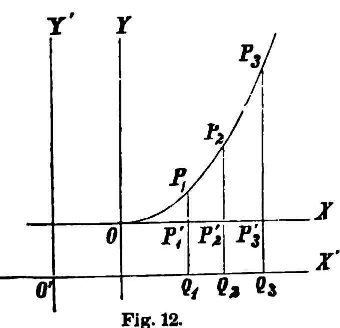


Fig. 12.

Wird die Fläche vom Scheitel an gerechnet, so ist $x_1 = 0$, daher, und wenn man x statt x_3 setzt,

$$2) \qquad F = \frac{x^3}{6p} = \frac{1}{3} xy \quad .$$

Die Fläche ist daher der dritte Teil des Rechtecks aus der Abscisse und Ordinate des Punktes P.

Die Formel 1) läßt eine bemerkenswerte Umgestaltung zu. Man hat nämlich zunächst

$$F = \frac{x_3 - x_1}{6p}(x_1^2 + x_3 x_1 + x_3^2) \quad .$$

Wird $x_3 - x_1$ mit $2d$ bezeichnet, so erhält man

$$\begin{aligned} F &= \frac{d}{3p}[x_1^2 + x_1(x_1 + 2d) + (x_1 + 2d)^2] \quad , \\ &= \frac{d}{6p}(6x_1^2 + 12\,d x_1 + 8\,d^2) \quad , \\ &= \frac{d}{6p}[x_1^2 + 4(x_1 + d)^2 + (x_1 + 2d)^2] \quad . \end{aligned}$$

Bezeichnet man die zu den Abscissen x_1, $x_1 + d$, $x_1 + 2d$ gehörenden Ordinaten der Reihe nach durch η_1, η_2, η_3, so hat man

$$F = \frac{d}{3}(\eta_1 + 4\eta_2 + \eta_3) \quad .$$

Verschiebt man die Achsen, und hat O im neuen Systeme $X'O'Y'$ die Ordinate a, so ist

$$F' = P_1 Q_1 Q_3 P_3 = F + 2ad = \frac{d}{3}[(\eta_1 + a) + 4(\eta_2 + a) + (\eta_3 + a)] \quad .$$

Werden die Ordinaten im neuen Systeme mit η_1', η_2', η_3' bezeichnet, so hat man daher

$$F = \frac{d}{3}(\eta_1' + 4\eta_2' + \eta_3') \quad .$$

Durch drei Punkte und die Bedingung, daß die Hauptachse der Ordinatenachse parallel geht, ist eine Parabel eindeutig bestimmt. Hat man daher drei Punkte P_1, P_2, P_3, und ist die Ordinate η_2 des mittlern Punktes P_2 gleich weit (um d) von den Ordinaten η_1, η_3 der andern entfernt, so schließen die Abscissenachse, die Ordinaten η_1, η_3 und der Parabelbogen, der durch P_1, P_2, P_3 geht und dessen Hauptachse der Y-Achse parallel ist, die Fläche ein

$$F = \frac{d}{3}(\eta_1 + 4\eta_2 + \eta_3) \quad .$$

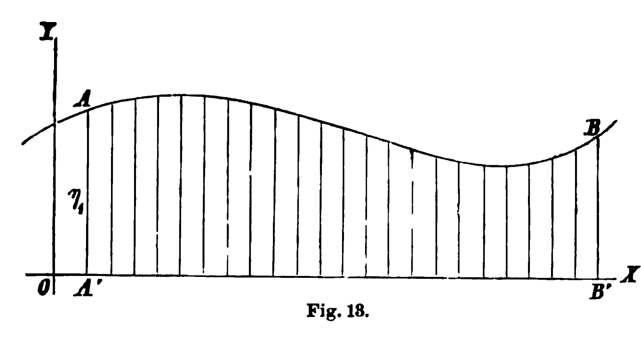


Fig. 13.

Es ist bemerkenswert, daß dieser Ausdruck den Parameter und die Ordinaten des Scheitels nicht explizite enthält.

Man hat diese Formel dazu benutzt, den Inhalt einer Fläche angenähert zu bestimmen. Um die Fläche $AA'B'B$ (Fig. 13) angenähert zu erhalten, teile man $A'B'$ in $2n$ gleiche Teile, und ziehe in allen Teilpunkten die Ordinaten, von $A'A$ aus begonnen seien dieselben η_1, η_2, η_3, ... η_{2n+1}.

Ersetzt man nun die Kurve durch n Parabelbogen, die der Reihe nach von η_1 bis η_3, η_3 bis η_5, ... η_{2n-1} bis η_{2n+1} reichen und deren Achsen lotrecht

zur X-Achse sind, so ist die Summe der von diesen Bogen begrenzten Flächen, wenn $AB : 2n = d$ gesetzt wird,

$$F = \frac{d}{3}[(\eta_1 + 4\eta_2 + \eta_3) + (\eta_3 + 4\eta_4 + \eta_5) + \ldots]$$

$$= \frac{d}{3}[\eta_1 + 4(\eta_2 + \eta_4 + \ldots + \eta_{2n}) + 2(\eta_3 + \eta_5 + \eta_7 + \ldots + \eta_{2n-1}) + \eta_{2n+1}] \ ,$$

und dies kann als angenäherter Wert der gesuchten Fläche benutzt werden. Diese Formel ist unter dem Namen der SIMPSONschen Regel bekannt.*)

3. Für den zwischen zwei parallelen Sehnen AA_1 und BB_1 gelegenen Teil einer Kreisfläche (Fig. 14) ist

$$f = 2\int_a^b y\,dx \quad .$$

Bezeichnet φ den Polwinkel von P, und r den Halbmesser des Kreises, so ist

$$x = r\cos\varphi \ , \quad y = r\sin\varphi \ , \quad dx = -r\sin\varphi\,d\varphi \quad .$$

Sind ferner α und β die Mittenwinkel der Sehnen AA_1 und BB_1, so entsprechen den Abscissen a und b die Werte $\varphi_1 = \frac{1}{2}\alpha$, $\varphi_2 = \frac{1}{2}\beta$, und man hat daher

$$f = -2r^2\int_{\frac{1}{2}\alpha}^{\frac{1}{2}\beta}\sin^2\varphi\,d\varphi \quad .$$

Fig. 14.

Da nun

$$\int\sin^2\varphi\,d\varphi = \int\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi = \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} + C \ ,$$

so folgt

$$f = \frac{r^2}{2}(\alpha - \beta - \sin\alpha + \sin\beta) \quad .$$

Hieraus ergibt sich die ganze Kreisfläche, wenn man $\beta = 0$ und $\alpha = 2\pi$ setzt.

4. Für den Teil einer Ellipsenfläche, der zwischen zwei zu einer Hauptachse lotrechten Sehnen liegt (Fig. 15), ist

$$f = 2\int_a^b y\,dx \quad ,$$

sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Halbachsen, so kann man $x = \mathfrak{a}\cos\varphi$, $y = \mathfrak{b}\sin\varphi$ setzen, mithin ist $dx = -\mathfrak{a}\sin\varphi\,d\varphi$.

Gehören zu den Punkten A und B die Werte $\varphi = \frac{1}{2}\alpha$ und $\varphi = \frac{1}{2}\beta$, so erhält man

$$f = -2\mathfrak{a}\mathfrak{b}\int_{\frac{1}{2}\alpha}^{\frac{1}{2}\beta}\sin^2\varphi\,d\varphi \quad ,$$

daher folgt schließlich

$$f = \tfrac{1}{2}\mathfrak{a}\mathfrak{b}(\alpha - \beta - \sin\alpha + \sin\beta) \quad .$$

Fig. 15.

Die ganze Ellipsenfläche F folgt hieraus, wenn man $\beta = 0$, $\alpha = 2\pi$ setzt, zu

$$F = \pi \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{b} \quad .$$

*) Über den Genauigkeitsgrad der SIMPSONschen Regel vergleiche man SCHLOEMILCH, Kompendium der höheren Analysis, 4. Aufl., Bd. I., § 82.

5. Die Hyperbelfläche, die von der Hyperbel und einer zur Hauptachse lotrechten Sehne begrenzt wird, beträgt, wenn x die Abscisse der begrenzenden Sehne ist, und a und b die Halbachsen der Hyperbel sind,

$$f = \frac{b}{a}\int_a^x \sqrt{x^2 - a^2}\,dx \quad .$$

Nun ist, wie sich nach § 4, Nr. 4 ergibt,

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2\,l\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)\right] + C \quad .$$

Daher hat man

$$f = \frac{b}{2a}\left(x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2\,l\,\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right) \quad .$$

Hierfür kann man setzen

$$f = \frac{1}{2}\left[xy - \frac{b}{a}\,l\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\right] \quad .$$

Wählt man die Asymptoten zu Koordinatenachsen, so ist die Hyperbelgleichung

$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4} \quad .$$

Ist α der halbe Winkel der Asymptoten, so ist

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\operatorname{tang}\alpha}{1 + \operatorname{tang}^2\alpha} = \frac{2ab}{a^2 + b^2} \quad .$$

Daher liegt zwischen zwei Ordinaten η_1 und η_2, die dasselbe Vorzeichen haben, die Fläche

$$f = \sin 2\alpha \cdot \frac{a^2 + b^2}{4}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{dx}{x} = \frac{ab}{2}\,l\,\frac{\xi_2}{\xi_1} \quad .$$

6. Die Gleichungen einer Cykloide seien

$$x = a(\varphi - \sin\varphi)\,, \quad y = a(1 - \cos\varphi) \quad .$$

Alsdann ist

$$dx = a(1 - \cos\varphi)\,d\varphi \quad ,$$

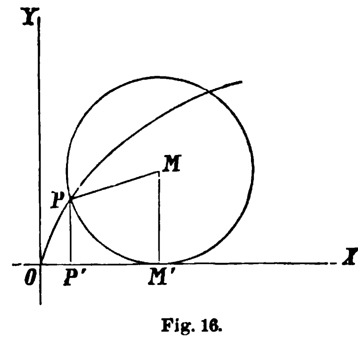


Fig. 16.

und für die Fläche, die von dem im Nullpunkte beginnenden Cykloidenbogen und den Koordinaten des Cykloidenpunktes P eingeschlossen wird (Fig. 16), ergibt sich

$$f = \int_0^x y\,dx = a^2\int_0^\varphi (1 - \cos\varphi)^2\,d\varphi \quad .$$

Da nun

$$(1 - \cos\varphi)^2 = 1 - 2\cos\varphi + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)$$
$$= \tfrac{3}{2} - 2\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi \quad ,$$

so ist

$$\int_0^\varphi (1 - \cos\varphi)^2\,d\varphi = \frac{3\varphi}{2} - 2\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4} \quad .$$

Folglich hat man

$$1)\qquad f = \frac{a^2}{4}(6\varphi - 8\sin\varphi + \sin 2\varphi) \quad .$$

Die von PP', $P'M'$ und dem Bogen PM' des erzeugenden Kreises eingeschlossene Fläche ist

$$f_1 = \frac{PP' + MM'}{2} \cdot P'M' - \frac{a^2\varphi}{2} = \frac{a^2}{2}(2\sin\varphi - \cos\varphi\sin\varphi - \varphi) \quad .$$

Daher hat man für die von der Abscissenachse, dem Cykloidenbogen OP und dem Kreisbogen PM' eingeschlossene Fläche

$$2)\qquad OPM' = f + f_1 = a^2(\varphi - \sin\varphi) = a \cdot OP' \quad .$$

Also ist diese Fläche gleich dem Rechtecke aus dem Halbmesser des erzeugenden Kreises und der Abscisse des Punktes P.

Aus 1) erhält man für $\varphi = 2\pi$ die Fläche, die von dem zu einer vollen Umdrehung gehörigen Cykloidenbogen und der Abscissenachse eingeschlossen wird

$$3)\qquad f = 3\pi a^2 \quad .$$

7. Ist die Gleichung einer Kurve in Polarkoordinaten

$$r = f(\varphi) \quad ,$$

so läßt sich leicht der Sektor angeben, der von den Radien zweier zu den Polwinkeln α und β gehöriger Kurvenpunkte A und B und dem Kurvenbogen AB begrenzt wird.

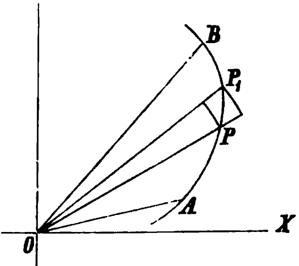


Fig. 17.

Haben P und P_1 die Koordinaten φ, r und $\varphi + \Delta\varphi$, $r + \Delta r$ (Fig. 17), so kann $\Delta\varphi$ immer so klein genommen werden, daß der Kurvensektor $OPP_1 = \Delta S$ zwischen den Kreissektoren enthalten ist, die den Mittenwinkel $\Delta\varphi$ und die Radien r und $r + \Delta r$ haben; alsdann ist

wenn $\Delta r > 0$:

$$\tfrac{1}{2} r^2 \Delta\varphi < \Delta S < \tfrac{1}{2}(r + \Delta r)^2 \Delta\varphi \quad ,$$

wenn $\Delta r < 0$:

$$\tfrac{1}{2} r^2 \Delta\varphi > \Delta S > \tfrac{1}{2}(r + \Delta r)^2 \Delta\varphi \quad .$$

Dividiert man Glied für Glied durch $\Delta\varphi$ und geht zur Grenze $\Delta\varphi = 0$ über, so konvergieren beide Begrenzungen des Quotienten $\Delta S : \Delta\varphi$ gegen den Grenzwert $\frac{1}{2}r^2$; daher hat man

$$\frac{dS}{d\varphi} = \lim \frac{\Delta S}{\Delta\varphi} = \tfrac{1}{2} r^2 \quad .$$

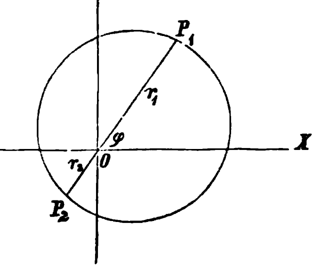


Fig. 18.

Hieraus folgt unter der Voraussetzung, daß der Kurvenbogen AB kontinuierlich ist und ganz im Endlichen liegt, und daß φ nur wächst, wenn ein Punkt ohne umzukehren den Bogen von A bis B durchläuft

$$1)\qquad S = \tfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\varphi \quad .$$

Für den Inhalt einer geschlossenen Kurve, welche von den Radien in zwei realen Punkten geschnitten wird (Fig. 18), hat man, wenn der Nullpunkt im Innern der Fläche liegt,

$$2)\qquad S = \tfrac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} r^2\, d\varphi \quad .$$

Dem Polwinkel φ gehören r_1 und r_2 zu; bei Anwendung von 1) hat man nur einen, r_1 oder r_2, mit φ zu verbinden und dann die volle Umdrehung auszuführen. Statt dessen kann man auch beide berücksichtigen, und kommt dann mit einer halben Umdrehung aus, indem man hat

$$3)\quad \begin{cases} S = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi r_1^2\,d\varphi + \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi r_2^2\,d\varphi \quad , \\ = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi (r_1^2 + r_2^2)\,d\varphi \quad . \end{cases}$$

Liegt der Nullpunkt außerhalb der gesuchten Fläche (Fig. 19), so bestimme man die Polwinkel α und β, deren Polabstände die Kurve berühren, zwischen denen also die Fläche gelegen ist; gehören nun zu φ die Polabstände r_1 und r_2, und ist $r_1 > r_2$, so ist die gesuchte Fläche

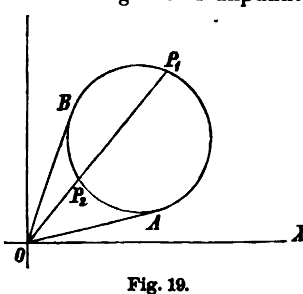


Fig. 19.

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r_1^2\,d\varphi - \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r_2^2\,d\varphi \quad ,$$

also

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta (r_1^2 - r_2^2)\,d\varphi \quad .$$

8. Die Gleichung der Fußpunktkurve der Ellipse ist

$$r^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi \quad .$$

Daher hat man für einen an der X-Achse beginnenden Ausschnitt dieser Kurve

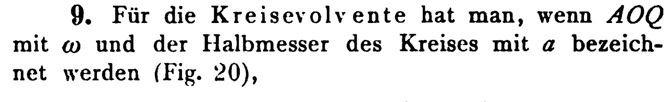
$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^\varphi (a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^\varphi [a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2\varphi]\,d\varphi$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{4}\varphi + \frac{c^2}{8}\sin 2\varphi \quad .$$

Einen Quadranten erhält man für $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$S = \frac{a^2 + b^2}{8}\pi \quad ,$$

die ganze Fläche ist daher das arithmetische Mittel der beiden über den Hauptachsen gezeichneten Kreise.



9. Für die Kreisevolvente hat man, wenn AOQ mit ω und der Halbmesser des Kreises mit a bezeichnet werden (Fig. 20),

$$r^2 = a^2(1 + \omega^2)\,, \quad \operatorname{tang}(\omega - \varphi) = \omega \quad .$$

Aus der letztern Gleichung folgt

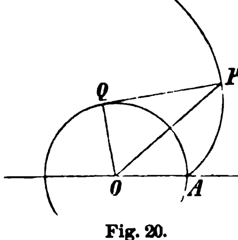


Fig. 20.

$$d\omega - d\varphi = \cos^2(\omega - \varphi)\,d\omega \quad ,$$

mithin

$$d\varphi = \frac{\omega^2}{1 + \omega^2}\,d\omega \quad .$$

Daher ist der Ausschnitt AOP

$$S = \frac{1}{2}a^2\int\limits_0^\omega \omega^2\,d\omega = \frac{1}{6}a^2\omega^3 \quad .$$

10. Legt man bei einer Kurve dritter Ordnung mit Doppelpunkt den Nullpunkt in den Doppelpunkt, so ist die Gleichung der Kurve von der Form

$$1)\qquad Ax^2 + Bxy + Cy^2 = Dx^3 + Ex^2y + Fxy^2 + Gy^3 \quad ,$$

die Glieder ersten und nullten Grades fehlen.

Setzt man

$$\operatorname{tang}\varphi = t \quad ,$$

so ist

$$y = xt\,, \quad r^2 = x^2(1 + t^2) \quad ,$$

$$d\varphi = \frac{dt}{1 + t^2} \quad ,$$

und daher die Fläche des Ausschnitts, für dessen Endpunkte t die Werte a und b hat,

$$S = \tfrac{1}{2}\int_a^b x^2\,dt \quad .$$

Führt man $y = tx$ in 1) ein, so entsteht für x die lineare Gleichung

$$A + Bt + Ct^2 = (D + Et + Ft^2 + Gt^3)\cdot x \quad .$$

Hier setzen wir zur Abkürzung

$$A + Bt + Ct^2 = T\,, \quad D + Et + Ft^2 + Gt^3 = \mathrm{T} \quad ,$$

und erhalten somit

$$x = \frac{T}{\mathrm{T}} \quad ;$$

daher ergibt sich

$$S = \tfrac{1}{2}\int_a^b \frac{T^2}{\mathrm{T}^2}\,dt \quad .$$

Dieses Integral kann in jedem Falle nach den Regeln über die Integration echt gebrochener rationaler Funktionen ausgeführt werden. Es ist bemerkenswert, daß diese Sektoren mithin durch algebraische Funktionen, Logarithmen und Arcustangens ausgedrückt werden können.

Wählt man bei einer symmetrischen Kurve dritter Ordnung mit Doppelpunkt die Symmetrieachse zur Y-Achse, so ist die Gleichung für x geraden Grades, mithin

$$B = D = F = 0 \quad ,$$

und die Gleichung 1) beschränkt sich auf

$$2)\qquad Ax^2 + Cy^2 = Ex^2y + Gy^3 \quad .$$

Die Richtungen der Asymptoten bestimmen sich aus der kubischen Gleichung

$$Et + Gt^3 = 0 \quad ;$$

diese ergibt eine der X-Achse parallele Asymptote $t = 0$ und die beiden Asymptotenrichtungen

$$t = \sqrt{-E : G} \quad .$$

Setzt man zur Bestimmung der Ordinate k der erstern Asymptote $y = k$ in 2), so folgt

$$(A - Ek)x^2 = Gk^3 - Ck^2 \quad .$$

Hieraus folgen für x zwei unendlich große Wurzeln, wenn

$$k = A : E \quad .$$

Die in diesem Abstande der X-Achse parallele Gerade hat also mit der Kurve drei unendlich ferne Punkte gemein, ist somit Wendetangente mit unendlich fernem Wendepunkte.

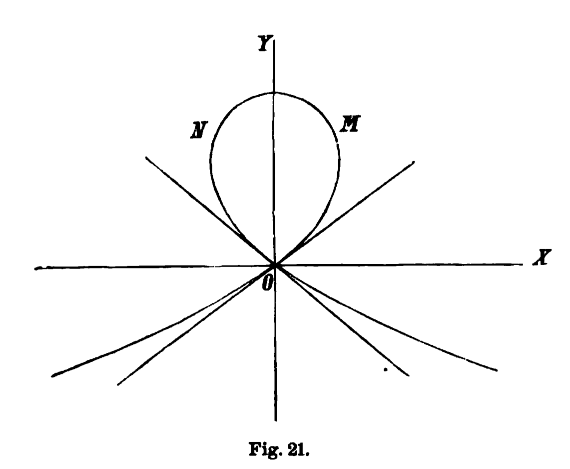


Fig. 21.

Diese Wendetangente wird selbst unendlich fern, und gleichzeitig auch die andern beiden Asymptoten, wenn $E = 0$.

Da G alsdann von Null verschieden sein muß, sobald es sich um eine eigentliche Kurve dritter Ordnung handelt, so kann man die Gleichung durch G dividieren und in der Form angeben

$$A x^2 + C y^2 = y^3 \quad .$$

Für diese Kurve (Fig. 21) hat man nun

$$T = A + C t^2, \quad \mathrm{T} = t^3 \quad ,$$

$$S = \frac{1}{2}\int_a^t \frac{(A + C t^2)^2}{t^6} dt = \frac{1}{2}\int_a^t \left(\frac{A^2}{t^6} + \frac{2AC}{t^4} + \frac{C^2}{t^2}\right) dt$$

$$= \frac{A^2}{10}\left(\frac{1}{a^5} - \frac{1}{t^5}\right) + \frac{AC}{3}\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{t^3}\right) + \frac{C^2}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{t}\right) \quad .$$

Für die Doppelpunktstangenten hat man die Gleichung

$$A + C t^2 = 0 \quad .$$

Haben A und C verschiedene Vorzeichen, so sind die Tangenten real und man hat für den zwischen ihnen liegenden Kurvensektor, für die Schleife OMN,

$$S = 2\sqrt{-\frac{C}{A}}\left[\frac{A^2}{10}\cdot\left(-\frac{C}{A}\right)^2 + \frac{AC}{3}\cdot\left(-\frac{C}{A}\right) + \frac{C^2}{2}\right] \quad ,$$

$$= \frac{8}{15} C^2 \sqrt{-\frac{C}{A}} \quad .$$

Es ist hervorzuheben, daß die Sektoren dieser Kurven rationale algebraische Funktionen des Parameters t sind.

---

11. Das Differential ds eines Bogens der ebenen Kurve $y = f(x)$ ist

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx \quad .$$

Daher ist der Bogen zwischen den Punkten A und B, deren Abscissen a und b sind

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dz \quad .$$

Hierbei werden rechtwinklige Koordinaten vorausgesetzt. Bei schiefwinkligen Parallelkoordinaten mit dem Achsenwinkel α erscheint ds als der Grenzwert der

Seite eines Dreiecks, das die Seiten Δx und Δy und den von ihnen eingeschlossenen Winkel $\pi - \alpha$ hat; daher ist

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \lim \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + 2\,\Delta x\,\Delta y \cos\alpha}{\Delta x^2}$$

$$= 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{dy}{dx}\cos\alpha \quad ,$$

und man hat somit

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + 2y'\cos\alpha + y'^2}\,dx \quad .$$

12. Für einen im Scheitel anfangenden Bogen der Parabel

$$y = \frac{x^2}{2p}$$

ist

$$y' = \frac{x}{p} \quad ,$$

und daher

$$1) \quad \left\{ \begin{aligned} s &= \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{x}{p}\right)^2}\,dx = \frac{1}{p}\int_0^x \sqrt{p^2 + x^2}\,dx \\ &= \frac{x}{2p}\sqrt{p^2 + x^2} + \frac{p}{2}\,l\,\frac{x + \sqrt{p^2 + x^2}}{p} \quad . \end{aligned} \right.$$

Für die Ellipse ist

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,, \quad y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} \quad .$$

Bezeichnet man die numerische Excentricität mit ε, so erhält man für einen auf der Y-Achse beginnenden Bogen

$$2) \qquad s = \int_0^x \sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}}\,dx \quad .$$

Dieses Integral ist irreduktibel.

Für die Hyperbel ist

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\,, \quad y' = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}} \quad .$$

Bezeichnet man auch hier die numerische Excentricität durch ε, so ergibt sich für einen im Scheitel beginnenden Bogen

$$3) \qquad s = \int_0^x \sqrt{\frac{\varepsilon^2 x^2 - a^2}{x^2 - a^2}} \cdot dx \quad .$$

Auch dieses Integral ist irreduktibel; beide Integrale gehören zur Klasse der elliptischen Integrale, auf die wir im nächsten Buche eingehen werden.

13. Für die Cykloide ist

$$x = a(t - \sin t)\,, \quad y = a(1 - \cos t) \quad ,$$

$$dx = a(1 - \cos t)\,dt\,, \quad dy = a\sin t\,dt \quad ;$$

daher ist ein im Nullpunkte beginnender Bogen

$$s = a\int_0^t \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\,dt = 2a\int_0^t \sin\frac{t}{2}\,dt \quad .$$

Dies ergibt

$$s = 4a(1 - \cos\tfrac{1}{2}t) \quad .$$

Die Länge der ganzen Cykloide erhält man hieraus für $t = 2\pi$; sie ergibt sich zu

$$s = 8a \quad .$$

14. Für die Kurve dritter Ordnung

$$Ax^2 + Cy^2 = y^3$$

ist, wenn man wieder $y = tx$ setzt,

$$x = \frac{A + Ct^2}{t^3}, \quad dx = -\frac{3A + Ct^2}{t^4}dt, \quad dy = -\frac{2A}{t^3} \quad .$$

Folglich ist für einen zwischen den Richtungen $t = a$ und $t = b$ liegenden Kurvenbogen

$$s = \int_a^b \frac{1}{t^4}\sqrt{(Ct^2 + 3A)^2 + 4A^2t^2}\,dt \quad .$$

Dieses Integral ist im allgemeinen elliptisch. Ist $C = 0$, so erhält man die NEILsche oder semikubische Parabel $Ax^2 = y^3$ und hat

$$s = A\int_a^b \frac{\sqrt{9 + 4t^2}}{t^4}\,dt \quad .$$

Hierbei ist $y = tx$, mithin

$$x = \frac{A}{t^3}, \quad y = \frac{A}{t^2} \quad .$$

Setzt man in dem Integrale $t = 1 : z$, so erhält man

$$1) \qquad s = A\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} \sqrt{9z^2 + 4}\cdot z\,dz \quad .$$

Nun ist bekanntlich

$$\int \sqrt{9z^2 + 4}\cdot z\,dz = \frac{1}{27}(9z^2 + 4)^{\frac{3}{2}} + C \quad .$$

Ersetzt man hier

$$z^2 = \frac{1}{t^2} = \frac{y}{A} \quad ,$$

und führt die Grenzen 0 und y ein, so erhält man schließlich

$$s = \frac{1}{27\sqrt{A}}\left[\sqrt{(9y + 4A)^3} - 8\sqrt{A^3}\right] \quad .$$

15. Will man Polarkoordinaten verwenden, so macht man die Änderungen

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \quad ,$$

$$dx = \cos\varphi\,dr - r\sin\varphi\,d\varphi, \quad dy = \sin\varphi\,dr + r\cos\varphi\,d\varphi \quad .$$

Daher ist

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad ,$$

und man hat

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi \quad .$$

16. Die Spirale des ARCHIMEDES hat die Gleichung

$$r = a\varphi \quad ;$$

hier ist $r' = a$, und man erhält den vom Nullpunkt an gerechneten Bogen

$$s = a\int_0^{\varphi} \sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi$$

$$= \frac{a}{2}\left[\varphi\sqrt{\varphi^2 + 1} + l(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1})\right] \quad .$$

Für die hyperbolische Spirale ist

$$r = \frac{a}{\varphi}, \quad r' = -\frac{a}{\varphi^2}, \quad s = a\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sqrt{\varphi^2 + 1}}{\varphi^2}\, d\varphi \quad .$$

Daher ist nach § 4, Nr. 5

$$s = a\left[{}_{\varphi_1}^{\varphi_2}\, l(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}) - \frac{1}{\varphi}\sqrt{\varphi^2 + 1}\right] \quad ,$$

wobei durch das Zeichen

$$\left[{}_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\varphi)\right]$$

die Differenz $f(\varphi_2) - f(\varphi_1)$ angedeutet werden soll.

17. Aus den Gleichungen der Kreisevolvente (Nr. 9) ergibt sich

$$r\,d\varphi = \frac{a^2\omega^2}{r}\,d\omega\,, \quad dr = \frac{a^2\omega}{r}\,d\omega\,, \quad ds = a\,\omega\,d\omega \quad ;$$

man erhält daher für den Bogen, dessen Endpunkte den Wälzungswinkeln 0 und ω zugehören

$$s = \tfrac{1}{2}\,a\,\omega^2 \quad .$$

---

18. Das Bogendifferential einer Raumkurve ist (2. Band, 4. Buch, § 6, Nr. 8)

$$1) \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad .$$

Sind die Gleichungen der Horizontal- und der Vertikalprojektion gegeben

$$y = f_1(x)\,, \quad z = f_2(x) \quad ,$$

so hat man

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot dx \quad ;$$

daher ist der zwischen den Abscissen x_1 und x_2 enthaltene Bogen

$$2) \qquad s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot dx \quad .$$

Sind x, y und z als Funktionen eines Parameters t gegeben, so ist

$$3) \qquad s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \cdot dt \quad .$$

19. Die Kegelspirale hat die Gleichungen

$$x = a t \cos t\,,\quad y = a t \sin t\,,\quad z = b t\quad,$$

daher ist

$$x' = a(\cos t - t\sin t)\,,\quad y' = a(\sin t + t\cos t)\,,\quad z' = b\quad,$$

$$ds^2 = a^2 + a^2 t^2 + b^2\quad,$$

$$s = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2 + a^2 t^2}\,dt = \frac{t}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + a^2 t^2} + \frac{a^2 + b^2}{2a}\, l\,\frac{at + \sqrt{a^2 + b^2 + a^2 t^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ .$$

20. Die Raumkurve dritter Ordnung

$$1)\qquad x = a t\,,\quad y = b t^2\,,\quad z = c t^3$$

ist der gemeinsame Durchschnitt der Flächen zweiter Ordnung, deren Gleichungen durch Entfernung von t aus den drei Gleichungen 1) erhalten werden:

$$2)\qquad b x^2 - a^2 y = 0\,,\quad b^2 x z - a c y^2 = 0\,,\quad c x y - a b z = 0\quad;$$

sie stellen einen parabolischen Cylinder, einen Kegel und ein hyperbolisches Paraboloid dar.

Aus den Kurvengleichungen erhält man

$$\frac{dx}{dt} = a\,,\quad \frac{dy}{dt} = 2 b t\,,\quad \frac{dz}{dt} = 3 c t^2\quad,$$

daher ist die Länge eines im Nullpunkte beginnenden Bogens

$$s = \int_0^t \sqrt{a^2 + 4 b^2 t^2 + 9 c^2 t^4}\,dt\quad.$$

Dieses Integral ist im allgemeinen elliptisch; es wird algebraisch, wenn

$$4 b^4 - 9 a^2 c^2 = 0\quad.$$

Setzt man $2 b^2 = 3 a c$ voraus, so nimmt der Kegel die besondere Gleichung an

$$3 x z - 2 y = 0\quad,$$

während die beiden andern Flächen keine Besonderheiten erhalten.

Das Integral 1) wird jetzt

$$s = \int_0^t (a + 3 c t^2)\,dt = a t + c t^3 = x + z\quad.$$

---

21. Schneidet man aus einem begrenzten Raume durch zwei zu derselben Geraden G lotrechte Ebenen Q und Q_1 eine Schicht ΔV, und ist die Schnittebene Q von einem gewissen Nullpunkte auf der Geraden um p, die andre Q_1 um $p + \Delta p$ entfernt, hat ferner die Schnittfläche auf Q den Inhalt q, so ist die Schicht ΔV von dem Cylinder $q \cdot \Delta p$ um so weniger verschieden, je kleiner Δp ist, und stimmt mit dem Cylinder bis zu jedem Genauigkeitsgrade überein, wofern nur Δp hinlänglich klein ist; daher ist

$$\lim \frac{\Delta V}{\Delta p} = \frac{dV}{dp} = q\quad.$$

Hieraus folgt durch Integration für die Schicht, deren Grenzen vom Nullpunkte um a und b abstehen

$$V = \int_a^b q\,dp\quad.$$

Ist die Schicht lotrecht zur X-Achse und bezeichnet man einen Querschnitt in diesem Falle mit q_x, so hat man

$$V = \int_{x_1}^{x_2} q_x \, dx \quad .$$

Um die zwischen zwei Parallelkreisen enthaltene Schicht eines Umdrehungskörpers zu erhalten, läßt man G mit der Achse zusammenfallen; ist nun die Gleichung eines Meridians, in einem rechtwinkligen Systeme, dessen Achsen G und ein Lot zu G sind, und in welchem die zu G lotrechte Koordinate mit r bezeichnet wird,

$$r = f(p) \quad ,$$

so ist die Schicht

$$V = \pi \int_a^b r^2 \, dp \quad .$$

22. Ein zur X-Achse lotrechter Querschnitt q_x des dreiachsigen Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

ist eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \, , \quad \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad .$$

Daher ist die Fläche desselben

$$q_x = \pi \frac{b\,c}{a^2} (a^2 - x^2) \quad ;$$

mithin hat man für eine Schicht, die von der YZ-Ebene und einer dazu parallelen begrenzt wird,

$$V = \pi \frac{b\,c}{a^2} \int_0^x (a^2 - x^2) \, dx$$

$$= \pi \frac{b\,c}{a^2} (a^2 x - \tfrac{1}{3} x^3) \quad .$$

Das ganze Ellipsoid ist

$$V = \pi \frac{b\,c}{a^2} \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2) \, dx = 2\,\pi \frac{b\,c}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) \, dx = \frac{4\,\pi}{3} a\,b\,c \quad .$$

Schneidet man das einschalige Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

senkrecht zur Z-Achse, so ist der Querschnitt eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{a}{c} \sqrt{z^2 + c^2} \, , \quad \frac{b}{c} \sqrt{z^2 + c^2} \quad .$$

Eine Schicht zwischen der XY-Ebene und einer parallelen Ebene ist daher

$$V = \pi \frac{a\,b}{c^2} \int_0^z (z^2 + c^2) \, dz \quad ,$$

$$= \pi \frac{a\,b}{c^2} (\tfrac{1}{3} z^3 + c^2 z) \quad .$$

Die Schicht zwischen den Ebenen $z = -c$ und $z = c$ beträgt

$$\frac{8\pi}{3} abc \quad ,$$

und ist daher doppelt so groß, wie ein Ellipsoid mit den Halbachsen a, b, c.

Im zweischaligen Hyperboloide

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

ist ein Querschnitt lotrecht zur X-Achse eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\,, \quad \frac{c}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \quad ,$$

Die vom Scheitel bis zu diesem Querschnitte reichende Schicht ist daher

$$V = \pi \frac{bc}{a^2}\int_a^x (x^2 - a^2)\,dx \quad ,$$

$$= \pi \frac{bc}{a^2}\left(\tfrac{1}{3}x^3 - a^2 x + \tfrac{2}{3}a^3\right) \quad .$$

23. Das elliptische Paraboloid

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z = 0$$

hat lotrecht zur Z-Achse einen elliptischen Querschnitt mit den Halbachsen $\sqrt{2az}$ und $\sqrt{2bz}$. Der von diesem Querschnitte begrenzte Teil des Körpers ist daher

$$V = 2\pi\sqrt{ab}\int_0^z z\,dz \quad ,$$

$$= \pi\sqrt{ab}\cdot z^2 \quad .$$

Ist F die Grenzfläche dieses Abschnitts, so ist

$$F = 2\pi\sqrt{ab}\cdot z \quad ,$$

und man hat daher

$$V = \tfrac{1}{2}Fz \quad ,$$

also die Hälfte des Cylinders von der Grundfläche F und der Höhe z.

Vom hyperbolischen Paraboloide

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - 2z = 0$$

berechnen wir den oberhalb der XY-Ebene entlang der positiven X-Achse sich erstreckenden und von einem zur X-Achse lotrechten Querschnitte begrenzten Teil.

Eine zur X-Achse lotrechte Ebene schneidet die Fläche in einer Parabel, deren Scheitel in der Höhe $x^2 : 2a$ über der XY-Ebene liegt, und die von der XY-Ebene in einer Sehne von der Länge $2x\sqrt{b:a}$ geschnitten wird. Der Inhalt dieses parabolischen Querschnitts ist daher

$$\frac{2}{3a}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x^3 \quad ;$$

mithin ist die gesuchte Schicht

$$V = \frac{2}{3a}\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\int_0^x x^3\,dx = \frac{2}{3a}\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\frac{x^4}{4} \quad ,$$

oder, wenn mit F der die Schicht begrenzende Querschnitt bezeichnet wird

$$V = \frac{1}{4} F \cdot x \quad ,$$

also ein Viertel des Cylinders von der Grundfläche F und der Höhe x.

24. Dreht sich eine Ellipse um eine Gerade OY, die in der Ebene der Ellipse liegt, parallel zu einer Hauptachse der Ellipse ist, und die Ellipse nicht schneidet, so entsteht ein symmetrischer Ring (Fig. 22). Ein Querschnitt q dieses Ringes, der durch Π lotrecht zur Drehungsachse gelegt wird, ist der Unterschied der beiden Kreise, deren Halbmesser ΠP_1 und ΠP_2 sind; daher ist, wenn e den Abstand des Ellipsenmittelpunktes von der Drehungsachse bezeichnet,

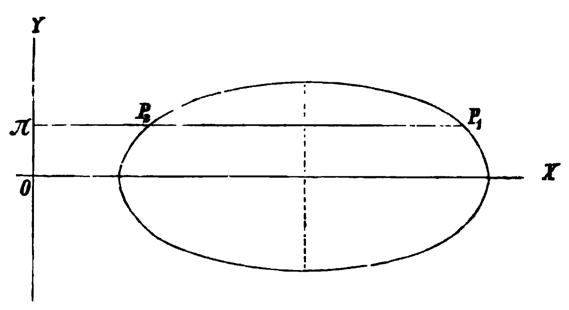


Fig. 22.

$$q = \pi \cdot (\Pi P_1 + \Pi P_2)(\Pi P_1 - \Pi P_2) \quad ,$$
$$= \frac{4 \pi a e}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \quad .$$

Folglich ist der Ring

$$V = \frac{4 \pi a e}{b} \int_{-b}^{b} \sqrt{b^2 - y^2}\, dy = \frac{8 \pi a e}{b} \int_{0}^{b} \sqrt{b^2 - y^2}\, dy \quad .$$

Setzt man $y = b \cos\varphi$, so erhält man

$$\int_0^b \sqrt{b^2 - y^2}\, dy = b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{4} b^2 \quad .$$

Hieraus folgt

$$V = 2 \pi^2 \cdot a b e \quad .$$

Bezeichnet E die Fläche der Ellipse und w den Weg ihres Mittelpunktes, so ist

$$V = E \cdot w \quad .$$

Dieselbe Formel gilt auch, wie man sofort sieht, für jeden zwischen zwei Meridianen gelegenen Ausschnitt dieses Ringes, sobald w den innerhalb des Ausschnitts gelegenen Teil des vom Mittelpunkte beschriebenen Weges bezeichnet.

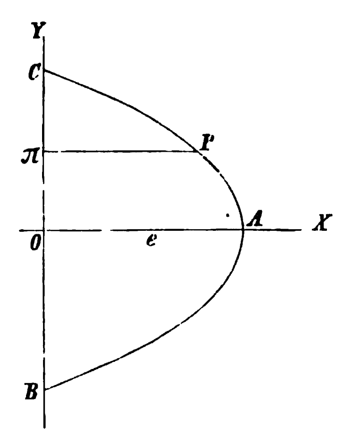


Fig. 23.

Dreht sich ein Parabelabschnitt ABC (Fig. 23) um die zur Parabelachse lotrechte Ordinate BC, und ist die Parabelgleichung $y^2 = 2a(e - x)$, so ist die Fläche des zur Ordinate $O\Pi = y$ gehörigen Parallelkreises

$$q = \pi x^2 = \frac{\pi}{4 a^2} (2 a e - y^2)^2 \quad .$$

Daher ist der von dem Parabelabschnitte beschriebene Körper

$$V = \frac{\pi}{4a^2}\int_{-\sqrt{2ae}}^{\sqrt{2ae}}(2ae - y^2)^2\,dy = \frac{\pi}{2a^2}\int_0^{\sqrt{2ae}}(2ae - y^2)^2\,dy\ ,$$

$$= \frac{16\pi}{15}e^2\sqrt{2ae}\ .$$

Bezeichnet F die rotierende Fläche, so ist

$$F = \frac{4}{3}e\sqrt{2ae}\ ;$$

daher hat man

$$V = \frac{4\pi}{5}eF\ .$$

---

25. Wir beschließen diesen Abschnitt mit Formeln und Beispielen über den Inhalt von Umdrehungsflächen.

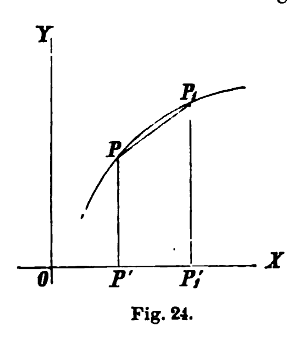


Fig. 24.

Um eine zwischen zwei Parallelkreisen enthaltene Zone einer Fläche zu berechnen, die durch Umdrehung der Kurve $y = f(x)$ um die X-Achse entsteht, betrachten wir zwei auf einem Meridiane gelegene Punkte P und P_1 mit den Koordinaten x, y und $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ (Fig. 24). Die Kegelzone, welche die Sehne PP_1 beschreibt, hat den Inhalt

$$\Delta S = 2\pi\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\,(y + \tfrac{1}{2}\Delta y)\ .$$

Die zwischen denselben Parallelkreisen enthaltene Flächenzone sei ΔF. Nähert sich Δx dem Grenzwerte Null, so nähert sich der Quotient $\Delta F : \Delta x$ dem Grenzwerte von $\Delta S : \Delta x$; daher hat man

$$\frac{dF}{dx} = \lim\frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim\frac{\Delta S}{\Delta x} = 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ .$$

Hiernach ergibt sich für die Zone, deren Parallelkreise die Abscissen a und b haben,

$$F = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx\ .$$

26. Dreht sich die Parabel $y^2 = 2px$ um die X-Achse, so ist die vom Scheitel bis zu einem Parallelkreise sich erstreckende Fläche des Paraboloids

$$F = 2\pi\int_0^x \sqrt{2px}\sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\,dx\ ,$$

$$= 2\pi\sqrt{p}\int_0^x \sqrt{2x + p}\,dx\ ,$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[(2x + p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}\right]\ .$$

Wird die Parabel um die Y-Achse gedreht, so entsteht eine Fläche vierten Grades, die im Nullpunkte eine Spitze hat. Für die von der Spitze bis zu einem Parallelkreise reichende Zone derselben ist

$$F = 2\pi \int_0^y x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \frac{\pi}{p^2} \int_0^y y^2 \sqrt{p^2 + y^2}\, dy \quad .$$

Nun ist (§ 4, Nr. 4)

$$\int y^2 \sqrt{p^2 + y^2}\, dy = \frac{1}{8}(2y^3 + p^2 y)\sqrt{p^2 + y^2} - \frac{p^4}{8} \int \frac{dy}{\sqrt{p^2 + y^2}} \quad .$$

Daher ist

$$F = \frac{\pi}{8p^2}(2y^3 + p^2 y)\sqrt{p^2 + y^2} - \frac{\pi p^2}{8} l \frac{y + \sqrt{p^2 + y^2}}{p} \quad .$$

27. Für die Oberfläche des Ellipsoids, das durch Drehung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

um die X-Achse entsteht, hat man

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} \,, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \frac{b}{a^2} \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{y} \quad .$$

Daher ist eine in der YZ-Ebene beginnende Zone des Umdrehungsellipsoids

$$F = \frac{2\pi b}{a^2} \int_0^x \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}\, dx \quad .$$

Nach § 4, Nr. 4 ist

$$\int \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2} + \frac{a^4}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}} \quad .$$

Ist $a > b$, das Ellipsoid also durch Drehung um die große Achse entstanden, so ist, wenn c die Excentricität des Meridians bezeichnet,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^4 - c^2 x^2}} = \frac{1}{c} \arcsin \frac{cx}{a^2} + C \quad .$$

Ist dagegen $a < b$, so hat man

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^4 + c^2 x^2}} = \frac{1}{c} l\left(cx + \sqrt{a^4 + c^2 x^2}\right) + C \quad .$$

Daher ergibt sich schließlich,

wenn $a > b$,

$$F = \frac{\pi b}{a^2} x \sqrt{a^4 - c^2 x^2} + \frac{\pi a^2 b}{c} \arcsin \frac{cx}{a^2} \quad ;$$

wenn $a < b$,

$$F = \frac{\pi b}{a^2} x \sqrt{a^4 + c^2 x^2} + \frac{\pi a^2 b}{c} l \frac{cx + \sqrt{a^4 + c^2 x^2}}{a^2} \quad .$$

Die ganze Oberfläche erhält man, wenn man x durch a ersetzt und mit 2 multipliziert,

$$F = 2\pi b\left(b + \frac{a^2}{c}\arc\sin\frac{c}{a}\right), \quad a > b \quad ;$$

$$F = 2\pi b\left(b + \frac{a^2}{c}\, l\, \frac{b+c}{b}\right), \quad a < b \quad .$$

28. Dreht sich die Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

um die X-Achse, so ist die von einem Scheitel bis zu einem Parallelkreise sich erstreckende Fläche des zweischaligen Umdrehungshyperboloids, wenn die Excentricität wieder mit c bezeichnet wird,

$$1) \quad \begin{cases} F = \dfrac{2\pi b}{a^2}\displaystyle\int_a^x \sqrt{c^2x^2 - a^4}\, dx \\[2ex] \quad = \dfrac{\pi b}{a^2}\left[x\sqrt{c^2x^2 - a^4} - a^2 b - \dfrac{a^4}{c}\, l\, \dfrac{cx + \sqrt{c^2x^2 - a^4}}{a(b+c)}\right] \end{cases} .$$

Dreht sich dieselbe Hyperbel um die Y-Achse, so entsteht ein einschaliges Umdrehungshyperboloid. Für eine von der XY-Ebene bis zu einem Parallelkreise reichende Zone ist

$$F = 2\pi\int_0^y x\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \quad .$$

Da nun

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}, \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{ay}{b\sqrt{b^2 + y^2}}, \qquad \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{a\sqrt{b^4 + c^2y^2}}{b^2 x}c \quad ,$$

so hat man

$$2) \quad \begin{cases} F = \dfrac{2\pi a}{b^2}\displaystyle\int_0^y \sqrt{b^4 + c^2y^2}\, dy \quad , \\[2ex] \quad = \dfrac{\pi a}{b^2}\left(y\sqrt{b^4 + c^2y^2} + \dfrac{b^4}{c}\, l\, \dfrac{cy + \sqrt{b^4 + c^2y^2}}{b^2}\right) \end{cases} .$$

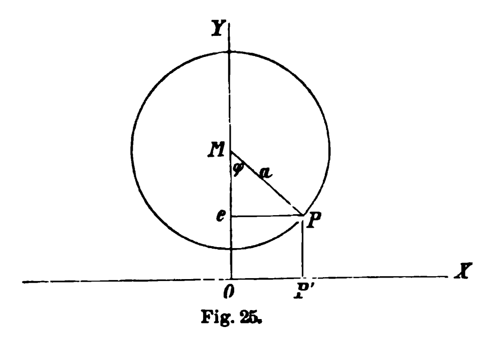


Fig. 25.

29. Bezeichnet ds das Bogendifferential eines Meridians, so kann man die Zone der Umdrehungsfläche kürzer in der Form angeben

$$F = 2\pi\int y\, ds \quad .$$

Hier erscheint s als die Integrationsveränderliche, und y ist durch s auszudrücken. Statt dessen kann man unter Umständen auch y und ds durch eine andre unabhängige Veränderliche t ausdrücken; die Grenzen des Integrals sind dann die für die Endpunkte des Meridians der Zone geltenden Werte von t.

Dreht sich ein Kreis mit dem Halbmesser a um eine Gerade OX, die in seiner Ebene um e vom Mittelpunkte entfernt liegt (Fig. 25), und nimmt man den Winkel φ zur unabhängigen Veränderlichen, so ist

$$y = e - a\cos\varphi\,, \qquad ds = a\,d\varphi \quad .$$

Will man die ganze Oberfläche des Ringes berechnen, so gelten für φ die Grenzen 0 und 2π; daher ist

$$F = 2\pi a\int_0^{2\pi}(e - a\cos\varphi)\,d\varphi = 4\pi^2 a e \quad .$$

§ 9. Bestimmte Doppelintegrale.

1. Das einfache bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

haben wir als den Grenzwert definiert, dem sich die Summe

$$\sum_0^n f\left(a + k\cdot\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

nähert, wenn n unendlich wächst, und haben, wenn $a < b$, diesen Grenzwert als den Inhalt der Fläche erkannt, die von der Kurve $y = f(x)$, der X-Achse und den zu den Abscissen a und b gehörigen Ordinaten $f(a)$ und $f(b)$ eingeschlossen wird. Die Abscissendifferenz $b - a$ erscheint dabei in n gleiche Teile geteilt, ein solcher Teil ist $(b - a):n$ und der Funktionswert

$$f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

ist die Ordinate, die zum k-ten Teilpunkte gehört.

Setzen wir

$$\frac{b-a}{n} = \varDelta x\,, \qquad f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = y \quad ,$$

so haben wir einfacher

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \Sigma y\,\varDelta x \quad .$$

Die Voraussetzungen, daß alle $\varDelta x$ gleich und daß die y die zu den Teilpunkten gehörigen Ordinaten sind, können aufgegeben werden; teilt man die Differenz $b - a$ in n Teile $\varDelta_1 x$, $\varDelta_2 x, \ldots \varDelta_n x$ von beliebigem Verhältnis und ist y_k eine Ordinate der Kurve $y = f(x)$, die zu einem innerhalb $\varDelta_k x$ gelegenen Punkte der Abscissenachse gehört, so ist

$$\lim \Sigma y_k\,\varDelta_k x$$

ebenfalls die obige Fläche.

Ist nämlich die Kurve $y = f(x)$ zwischen A und B beständig steigend oder beständig fallend, und bezeichnet man mit η_k und Y_k die größte und kleinste innerhalb $\varDelta_k x$ fallende Ordinate, und mit F die Fläche $AA'B'B$, so gelten die Begrenzungen

$$\Sigma \eta_k\,\varDelta_k x < F < \Sigma Y_k\,\varDelta_k x \quad ,$$

$$\Sigma \eta_k\,\varDelta_k x < \Sigma y_k\,\varDelta_k x < \Sigma Y_k\,\varDelta_k x \quad .$$

Der Unterschied der Grenzen ist

$$\Sigma Y_k\,\varDelta_k x - \Sigma \eta_k\,\varDelta_k x = \Sigma(Y_k - \eta_k)\,\varDelta_k x \quad .$$

Bezeichnet Δ den größten der Teile

$$\Delta_1 x,\ \Delta_2 x,\ \Delta_3 x, \ldots \Delta_n x \quad ,$$

so ist offenbar

$$\Sigma(Y_k - \eta_k)\Delta_k x < \Delta \cdot \Sigma(Y_k - \eta_k) \quad .$$

Da die Kurve nach der Voraussetzung nur steigt oder fällt, so sind Y_k und η_k die beiden Ordinaten in den Endpunkten von $\Delta_k x$; im ersten Falle ist daher $\eta_k = y_{k-1}$, $Y_k = y_k$; im andern umgekehrt $\eta_k = y_k$, $Y_k = y_{k-1}$.

Folglich ist im ersten Falle

$$\sum_1^n (Y_k - \eta_k) = (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \cdots + y_n - y_{n-1} = y_n - y_0 ,$$

im letzten

$$\sum_1^n (Y_k - \eta_k) = (y_0 - y_1) + (y_1 - y_2) + (y_2 - y_3) + \cdots + (y_{n-1} - y_n) = y_0 - y_n .$$

Sind nun die Ordinaten alle endlich, so verschwindet das Produkt

$$\Delta \cdot \Sigma(Y_k - \eta_k) = \pm \Delta \cdot (y_n - y_0)$$

mit Δ zugleich; daher hat man in der Tat

$$F = \lim \Sigma y_k \Delta_k x \quad ,$$

oder kürzer mit Hinweglassung des Index k

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \Sigma y \Delta x \quad ,$$

wobei man zu merken hat, daß die Summe über alle innerhalb der Begrenzung liegenden x zu erstrecken ist,

$$a < x < b \quad .$$

Wenn die Kurve abwechselnd steigt und fällt, so kann man die soeben durchgeführten Betrachtungen mit den für denselben Fall in § 1, Nr. 5 angestellten vereinigen; man kommt dadurch zu der Erkenntnis, daß auch für diesen Fall

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \Sigma y \Delta x \quad ,$$

wenn nur y_k für alle zwischen den Grenzen a und b enthaltene Werte von x endlich bleibt.

Anstatt dieses Integral als das zwischen den Grenzen a und b genommene Integral von $f(x)\,dx$ zu bezeichnen, kann man es geometrisch anschaulicher das über die Strecke $A'B'$ ausgedehnte Integral von $f(x)\,dx$ nennen.

2. Ist z eine Funktion zweier Veränderlichen,

$$z = \varphi(x, y) \quad ,$$

und betrachten wir x und y als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes der Ebene, so gehört zu jedem Punkte der Ebene ein bestimmter Wert von z. Ist nun in der Ebene eine begrenzte Fläche f gegeben, und teilen wir dieselbe in beliebig gestaltete kleine Teile Δf, multiplizieren jeden Teil $\Delta_k f$ mit einem z_k, welches zu irgend einem innerhalb Δf gelegenen Punkte gehört, so verstehen wir unter dem über die Fläche f ausgedehnten Integrale

$$\int z\,df$$

den Grenzwert, gegen den die Summe

$$\Sigma z_k \Delta_k f$$

konvergiert, wenn sämtliche $\Delta_k f$ verschwinden; hierbei ist die Summe über alle im Innern von f liegende Flächenteile Δf zu erstrecken; man hat also

$$\int z\,df = \lim \Sigma z_k \Delta_k f \quad .$$

...ckten Integrals wird geometrisch
(Fig. 26)

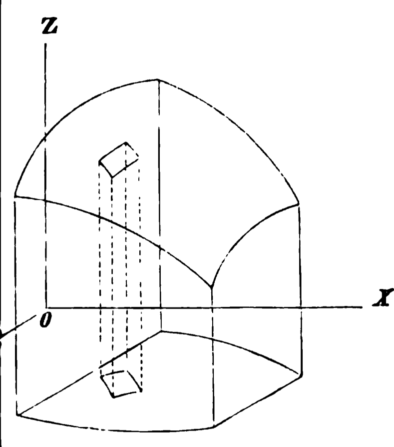


Fig. 26.

...leine Δf über, so fallen die Be-

$$\ldots \Delta_k f$$

$$\ldots = V \quad .$$

...ersten Abscissen der Fläche F in
...enz der äußersten Ordinaten CD

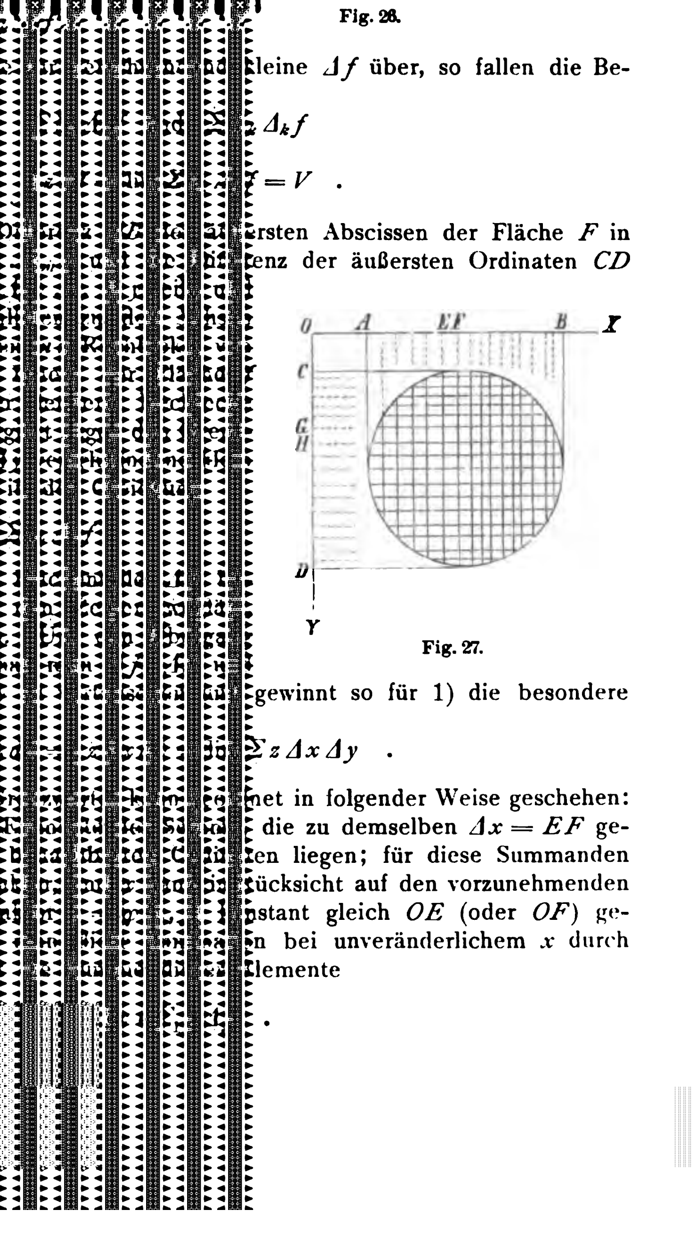


Fig. 27.

...gewinnt so für 1) die besondere

$$\ldots \Sigma z \Delta x \Delta y \quad .$$

...net in folgender Weise geschehen:
... die zu demselben $\Delta x = EF$ ge-
...en liegen; für diese Summanden
...ücksicht auf den vorzunehmenden
...nstant gleich OE (oder OF) ge-
...n bei unveränderlichem x durch
...lemente

Geht man hier zur Grenze für verschwindende Δy über, so entsteht

$$\Delta x \lim \Sigma_1 z \Delta y \quad .$$

Nun ist aber der Grenzwert das bestimmte Integral von $z\,dy$, ausgedehnt über den im Innern der Fläche f liegenden Teil der in E (oder F) errichteten Ordinate; unter Berücksichtigung dieser Grenzen ist daher

$$\Delta x \lim \Sigma_1 z \Delta y = \Delta x \cdot \int z\,dy \quad .$$

Setzt man hierin für Δx der Reihe nach alle Teile von AB, addiert die so erhaltenen Produkte, und geht dann zur Grenze für verschwindende Δx über, so erhält man

$$\begin{aligned}\lim \Sigma z \Delta x \Delta y &= \lim \Sigma \Delta x \lim \Sigma_1 z \Delta y \\ &= \lim \Delta x \int z\,dy \quad .\end{aligned}$$

Das innerhalb der angegebenen Grenzen genommene Integral

$$\int z\,dy$$

ist eine Funktion von x allein; der Grenzwert rechts ist das von der kleinsten bis zur größten Abscisse der Fläche f erstreckte Integral

$$\int\left(\int z\,dy\right)dx \quad .$$

Es ist gebräuchlich die Klammern wegzulassen und das Differential der Veränderlichen, nach welcher zuerst integriert wird, an die letzte Stelle zu setzen.

Das über eine begrenzte Fläche f erstreckte Integral

$$\int \varphi(x, y)\,df$$

wird daher durch zweimalige Integration gefunden; man denke sich zunächst x konstant und berechne das bestimmte Integral

$$\int \varphi(x, y)\,dy \quad ,$$

erstreckt über den Teil des durch das Ende von x gehenden Lotes zu OX, der innerhalb der Fläche f liegt; dieses Integral ist eine Funktion von x allein; hierauf berechne man das Integral

$$\int\left[\int \varphi(x, y)\,dy\right]dx$$

erstreckt von der kleinsten bis zur größten Abscisse der Fläche f.

Man kann in dieser Betrachtung die Koordinaten x und y gegeneinander vertauschen und gewinnt dann die folgende Regel: Um das über die Fläche f erstreckte Integral

$$\int \varphi(x, y)\,df$$

zu erhalten, denke man sich zunächst y konstant (z. B. gleich OG) und berechne das bestimmte Integral

$$\int \varphi(x, y)\,dx \quad ,$$

erstreckt über den Teil des zu y gehörigen Lotes zu OY, der innerhalb f liegt; dieses Integral ist eine Funktion von y allein; hierauf berechne man das Integral

$$\int\left[\int \varphi(x, y)\,dx\right]dy \quad ,$$

erstreckt von der kleinsten bis zur größten Ordinate der Fläche f.

Da die über Flächen erstreckten Integrale durch zweimalige bestimmte Integration gefunden werden, so bezeichnet man sie als bestimmte Doppelintegrale.

4. Wir wollen nun an einigen Beispielen die Grenzen der aufeinander folgenden Integrationen bestimmen.

A) Ist die Fläche f ein Rechteck $ABCD$, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel sind, und in welchen AD und BC die Abscissen a und a_1, AB und DC die Ordinaten b und b_1 haben (Fig. 28), so ist

$$\int z\,df = \int_a^{a_1}\int_b^{b_1} z\,dx\,dy \quad ,$$

$$= \int_b^{b_1}\int_a^{a_1} z\,dy\,dx \quad .$$

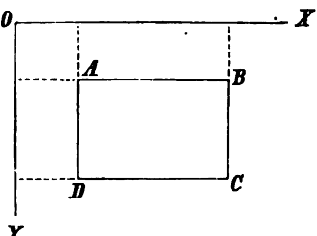


Fig. 28.

Wenn beide Integrationen zwischen konstanten Grenzen erfolgen, so kann daher die Reihenfolge der Integrationen ohne Änderung der Grenzen gewechselt werden.

Die Bedingung, daß das Doppelintegral über die Fläche des Rechtecks ausgedehnt werden soll, kann durch die Ungleichungen ersetzt werden

$$a < x \leqq a_1 \; ; \quad b \leq y \leqq b_1 \quad .$$

B) Ist die Fläche f das Dreieck OAB, dessen Hypotenuse AB (Fig. 29) die Gleichung hat

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0 \quad ,$$

so gehört zu einer gegebenen Abscisse die Ordinate

$$y = \frac{b}{a}(a - x) \quad ,$$

zu einer gegebenen Ordinate die Abscisse

$$x = \frac{a}{b}(b - y) \quad .$$

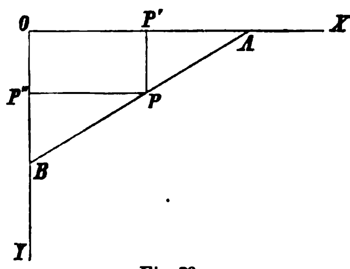


Fig. 29.

Integriert man zuerst nach y bei unverändertem x, so hat sich diese Integration über die $P'P$ zu erstrecken, also von $y = 0$ bis $y = b(a - x) : a$; die nachfolgende Integration in Bezug auf x erstreckt sich über OA, also von $x = 0$ bis $x = a$; daher hat man

$$\int z\,df = \int_0^a \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} z\,dx\,dy \quad .$$

Integriert man dagegen zuerst nach x bei unverändertem y, so erstreckt sich diese Integration über die Strecke $P''P$, und die darauf folgende Integration nach y über die Strecke OB; folglich ist

$$\int z\,df = \int_0^a \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} z\,dx\,dy = \int_0^b \int_0^{a\left(1-\frac{y}{b}\right)} z\,dy\,dx \quad .$$

Um den Spielraum für x und y analytisch zu bestimmen, bemerken wir, daß die Funktion

$$T(x, y) \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1$$

für alle Punkte auf derselben Seite der Geraden AB dasselbe Vorzeichen hat,

also für alle mit O auf derselben Seite liegenden Punkte negativ ist, da für die Koordinaten des Nullpunktes sich $T(0,0) = -1$ ergibt. Die Bedingung, daß das Doppelintegral

$$\int\int z\,dx\,dy$$

über die Dreiecksfläche OAB auszudehnen ist, kann also durch die Bedingung ersetzt werden, daß x und y alle positiven Werte annehmen, für die

$$-1 < \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 < 0 \quad ,$$

oder

$$0 < \frac{x}{a} + \frac{y}{b} < 1 \quad .$$

C) Ist das Integral $\int z\,df$ über eine Ellipse erstreckt, deren Halbachsen a und b den Koordinatenachsen parallel sind und deren Mitte die Koordinaten γ und δ hat (Fig. 30), und beginnt man die Berechnung mit der Integration nach y, so erstreckt sich diese über P_1P_2, und die nachfolgende Integration nach x über $A_1'A_2'$. Beginnt man dagegen mit der Integration in Bezug auf x, so erstreckt sich diese über R_1R_2 und die dann eintretende Integration nach y über $B_1''B_2''$. Da nun

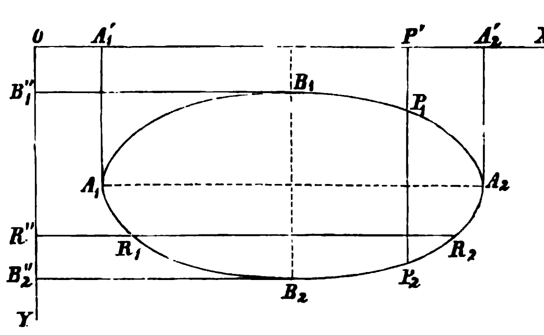


Fig. 30.

$$P'P_1 = \delta - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (x-\gamma)^2}\,, \quad P'P_2 = \delta + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (x-\gamma)^2} \quad ,$$

$$R''R_1 = \gamma - \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - (y-\delta)^2}\,, \quad R''R_2 = \gamma + \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - (y-\delta)^2} \quad ,$$

wobei die Wurzeln positiv zu rechnen sind, so ergeben sich die Grenzen

$$\int z\,df = \int\limits_{\gamma-a}^{\gamma+a}\;\int\limits_{\delta-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-(x-\gamma)^2}}^{\delta+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-(x-\gamma)^2}} z\,dx\,dy \quad ,$$

$$= \int\limits_{\delta-b}^{\delta+b}\;\int\limits_{\gamma-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-(y-\delta)^2}}^{\gamma+\frac{a}{b}\sqrt{b^2-(y-\delta)^2}} z\,dy\,dx \quad .$$

Für alle Punkte des Umfangs von f ist

$$\varphi(x,y) \equiv \frac{(x-\gamma)^2}{a^2} + \frac{(y-\delta)^2}{b^2} - 1 = 0 \quad ;$$

für alle Punkte außerhalb der geschlossenen Ellipsenfläche hat die Funktion φ dasselbe Zeichen, für alle Punkte innerhalb das entgegengesetzte. Da nun für die Mitte der Ellipse $\varphi(\gamma,\delta) = -1$ ist, so folgt, daß φ für alle Punkte im

Innern von f negativ ist. Beachten wir ferner, daß φ in der Mitte den kleinsten Wert hat, so haben wir für das Doppelintegral die analytische Begrenzung

$$-1 < \frac{(x-\gamma)^2}{a^2} + \frac{(y-\delta)^2}{b^2} - 1 < 0 \quad .$$

D) Wird die Fläche f von den Koordinatenachsen, von einer zur Abscisse $OA = a$ gehörigen Parallelen zur Y-Achse und von einer Parabel begrenzt, die den Scheitel B, die Achse OY und den Parameter $2p$ hat (Fig. 31), so hat man, wenn $OB = b$ ist,

$$P'P = b - \frac{x^2}{2p} \quad .$$

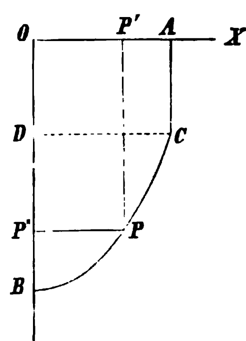


Fig. 31.

Folglich ist

$$\int z\,df = \int_0^a \int_0^{b-\frac{x^2}{2p}} z\,dx\,dy \quad .$$

Will man zuerst nach x integrieren, so zerlegt man die Fläche f in das Rechteck $OACD$, dessen Seiten sind

$$OA = a\,, \quad OD = AC = b - \frac{a^2}{2p}\,,$$

und in den Parabelabschnitt DBC; man hat nun

$$\int z\,df = \int_0^{b-\frac{a^2}{2p}} \int_0^a z\,dy\,dx + \int_{b-\frac{a^2}{2p}}^{b} \int_0^{\sqrt{2p(b-y)}} z\,dy\,dx \quad .$$

Die Funktion

$$x^2 - 2p(b-y)$$

verschwindet für die Punkte der Parabel, und ist für alle Punkte im Innern der Fläche f größer, als für O, und von demselben Vorzeichen; statt anzugeben, daß das Doppelintegral $\int\int z\,dy\,dx$ über die Fläche $OACB$ zu erstrecken ist, hat man daher die Bedingungen

$$0 < x \leq a\,; \quad y > 0\,; \quad -2pb < x^2 - 2p(b-y) < 0 \quad .$$

5. Wir beschäftigen uns nun mit der Einführung neuer Veränderlicher in Doppelintegrale, und beginnen diese Untersuchung mit einem besonders einfachen Beispiele. Will man in das Doppelintegral

$$\int\int z\,dx\,dy$$

Polarkoordinaten r und φ einführen, so hat man in z die rechtwinkligen Koordinaten x und y durch r und φ nach den bekannten Gleichungen zu ersetzen

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi \quad .$$

Ferner hat man das Flächendifferential df durch r und φ auszudrücken.

Fig. 32.

Haben P und P_1 die Polarkoordinaten r, φ und $r + \Delta r$, $\varphi + \Delta\varphi$, so ist das kleine Flächenstück $PP_2P_1P_3$ (Fig. 32)

$$\Delta f = \tfrac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\varphi - \tfrac{1}{2}r^2\Delta\varphi = (r + \tfrac{1}{2}\Delta r)\Delta r\,\Delta\varphi \quad .$$

Geht man zur Grenze für verschwindende Δr und $\Delta\varphi$ über, so erhält man

$$df = r\,dr\,d\varphi \quad .$$

Daher

$$1)\qquad \iint z\,dx\,dy = \iint z\,r\,d\varphi\,dr \quad .$$

Will man, wie hier angedeutet, zuerst nach r integrieren, so hat man das Integral über die Strecke P_1P_2 (Fig. 33) des Strahles OP_2 auszudehnen, die im Innern von f liegt; die Grenzen für die darauf folgende Integration nach φ sind der größte und kleinste Wert von φ, die bei f vorkommen, also die Arcus der Winkel AOX und BOX.

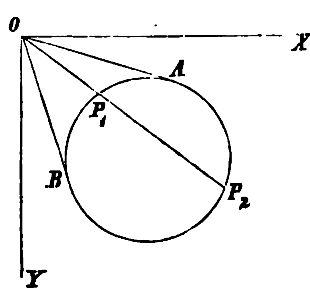


Fig. 33.

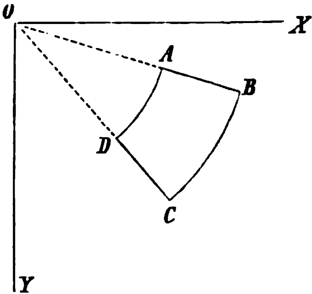


Fig. 34.

Ist f ein Ausschnitt eines Kreisringes $ABCD$ mit Centrum O, dessen äußerste Halbmesser und Polwinkel a, a_1 und β, β_1 sind, so wird die Integration nach y und x wegen der Begrenzung von f sehr unbequem; man müßte das Integral in drei Teile zerfällen; für Polarkoordinaten wird die Arbeit viel einfacher, denn man hat

$$\int z\,df = \int_\beta^{\beta_1}\int_a^{a_1} z\,r\,d\varphi\,dr \quad .$$

Ist f eine Kreisfläche um O mit dem Halbmesser a, so hat man

$$\int z\,df = \int_0^{2\pi}\int_0^a z\,r\,d\varphi\,dr \quad .$$

6. Die Änderungsgleichung Nr. 5, 1) kann auch unabhängig von geometrischen Betrachtungen in folgender Weise hergestellt werden.

In dem gegebenen Integrale ersetze man die Veränderliche y, mit der die Integration beginnen soll, durch die neue Veränderliche r. Die Ersetzungsformel für y wird aus den beiden Gleichungen

$$x = r\cos\varphi\ ,\quad y = r\sin\varphi$$

durch Beseitigung von φ gewonnen.

Wenn x und y sich um dx und dy ändern, so hat man für die zugehörigen Änderungen von r und φ

$$1)\qquad dx = \cos\varphi\,dr - r\sin\varphi\,d\varphi \quad ,$$

$$2)\qquad dy = \sin\varphi\,dr + r\cos\varphi\,d\varphi \quad .$$

Bei der Integration nach y bleibt x unverändert, daher hat man in 1) $dx = 0$ zu nehmen, und aus den beiden Gleichungen

$$0 = \cos\varphi\,dr - r\sin\varphi\,d\varphi \quad ,$$

$$dy = \sin\varphi\,dr + r\cos\varphi\,d\varphi$$

das Differential $d\varphi$ zu entfernen; man erhält

$$3)\qquad \sin\varphi\,dy = dr\ ,\quad dy = \frac{dr}{\sin\varphi} \quad .$$

Setzt man dies in das gegebene Integral, so entsteht

$$4)\qquad \iint z\,dx\,dy = \iint z\cdot\frac{1}{\sin\varphi}\,dx\,dr \quad ,$$

wobei man sich $\sin\varphi$ durch x und r ausgedrückt denken muß. Die Grenzen der Integration nach r sind hier den Grenzen der Integration nach y entsprechend zu nehmen; der analytische Spielraum für x und r ergibt sich aus der Ungleichung bezw. den Ungleichungen, die den Spielraum von x und y angeben, indem man in denselben y durch r und x ausdrückt.

In dem Integrale

$$\iint z\,\frac{1}{\sin\varphi}\,dx\,dr$$

ändere man nun die Anordnung der Integrationen und bestimme der neuen Anordnung entsprechend die Grenzen; in dem somit erhaltenen Integrale

$$\iint z\cdot\frac{1}{\sin\varphi}\,dr\,dx$$

ersetze man x durch r und φ. Da bei der Integration nach x die Veränderliche r ungeändert bleibt, so hat man für dx den Wert zu setzen, der sich aus

$$x = r\cos\varphi$$

unter Voraussetzung eines konstanten r ergibt, also

$$5)\qquad dx = -r\sin\varphi\,d\varphi \quad .$$

Die Grenzen der Integration nach φ sind denen für die Integration nach x entsprechend zu bestimmen. Man gewinnt somit

$$6)\qquad \iint z\,dx\,dy = -\iint z\,r\,d\varphi\,dr \quad .$$

Aus 5) geht hervor, daß im Quadranten XOY bei unverändertem r die Veränderliche φ abnimmt, wenn x wächst; dem größten Werte von x entspricht daher der kleinste von φ und umgekehrt. Nach dem Begriffe des über eine Fläche genommenen Integrals werden die untern Grenzen kleiner vorausgesetzt als die obern. Vertauscht man im letzten Integrale die Grenzen für φ, so hat man das Vorzeichen zu wechseln. Unter dieser Voraussetzung erhält man nun in Übereinstimmung mit Nr. 5, 1)

$$\iint z\,dx\,dy = \iint z\,r\,d\varphi\,dr \quad .$$

7. Wir wenden uns nun zu den allgemeinen Änderungsformeln für Doppelintegrale.

Um für x und y neue Veränderliche λ und μ einzuführen, die mit x und y durch die Gleichungen zusammenhängen

$$1)\qquad x = \psi(\lambda, \mu)\,,\quad y = \chi(\lambda, \mu) \quad ,$$

betrachten wir die Kurven, für deren Punkte λ, bezw. μ konstant sind; die Gleichung einer Kurve der ersten Art erhalten wir, indem wir μ aus 1) entfernen, die einer Kurve der zweiten Art durch Entfernung von λ. Diese Kurven bezeichnen wir als die Parameterkurven λ und μ, und die Werte λ und μ, die einem gegebenen Punkte P entsprechen, als die Parameter (oder Koordinaten im weitesten Sinne) des Punktes.

Für Polarkoordinaten r und φ sind die Parameterkurven $\varphi = \varphi_0$ Strahlen durch den Nullpunkt und die Parameterkurven $r = r_0$ Kreise um den Nullpunkt.

Wir werden uns auf solche Änderungen beschränken, bei denen im allgemeinen zu jedem realen Wertepaare x, y ein und nur ein reales Wertepaar λ, μ gehört, bei welchen also jeder Punkt einen realen Parameter λ und einen realen

Parameter μ besitzt. Alsdann geht durch jeden Punkt P im allgemeinen eine Parameterkurve λ und eine Parameterkurve μ; dies mögen die Kurven Λ und M sein (Fig. 35). Wächst λ um $\Delta\lambda$ und μ um $\Delta\mu$, so erhält man zwei neue Parameterkurven Λ' und M'; da nach der Voraussetzung zu jedem P nur ein λ und μ gehört, so schneiden sich Λ und Λ' nicht, ebensowenig M und M'. Geht man nun für $\Delta\lambda$ und $\Delta\mu$ zur Grenze Null über, so wird $PP_2P_1P_3$ ein verschwindend kleines Viereck, und die Kurvenbogen können mit den Sehnen verwechselt werden. Da PP_3 und P_2P_1, sowie PP_2 und P_3P_1 dabei zu unendlich nahen Geraden werden, und sich nicht schneiden, so folgt, daß $PP_2P_1P_3$ beim Übergange zur Grenze ein verschwindend kleines Parallelogramm wird. Der Inhalt desselben ist

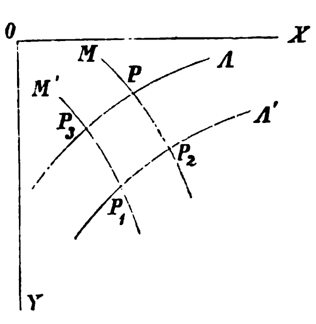


Fig. 35.

$$df = \sin\tau\, d\varrho\, d\sigma \quad ,$$

wenn man mit τ den Winkel bezeichnet, unter dem sich die Parameterkurven in P durchschneiden, und mit $d\varrho$ und $d\sigma$ die an P liegenden Bogenelemente von Λ und M.

Die unendlich kleinen Änderungen, die man den Koordinaten von P erteilen muß, um zum Punkte P_3 zu gelangen, gehen durch Differentiation aus 1) hervor unter der Voraussetzung, daß λ konstant ist. Man hat daher

$$2) \qquad dx = \frac{\partial \psi}{\partial \mu}\, d\mu\,, \quad dy = \frac{\partial \chi}{\partial \mu}\, d\mu \quad .$$

Sind ferner $\mathfrak{d}x$ und $\mathfrak{d}y$ die unendlich kleinen Änderungen, welche man den Koordinaten von P erteilen muß, um zu P_2 zu gelangen, so hat man

$$3) \qquad \mathfrak{d}x = \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}\, d\lambda\,, \quad \mathfrak{d}y = \frac{\partial \chi}{\partial \lambda}\, d\lambda \quad .$$

Ferner ist

$$4) \qquad d\varrho = \sqrt{dx^2 + dy^2}\,, \quad d\sigma = \sqrt{\mathfrak{d}x^2 + \mathfrak{d}y^2}\,, \quad \sin\tau = \frac{dx}{d\varrho} \cdot \frac{\mathfrak{d}y}{d\sigma} - \frac{\mathfrak{d}x}{d\sigma} \cdot \frac{dy}{d\varrho} \quad .$$

Hieraus folgt weiter

$$df = \sin\tau\, d\varrho\, d\sigma = dx\,\mathfrak{d}y - dy\,\mathfrak{d}x \quad ,$$

und daher mit Hilfe der Werte 2) und 3)

$$df = \pm\left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \mu} - \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \lambda}\right) d\mu\, d\lambda \quad .$$

Da df positiv ist, so ist das obere oder untere Vorzeichen anzuwenden, je nachdem der Klammerinhalt positiv oder negativ ist.

Damit erhalten wir schließlich

$$\iint z\, dx\, dy = \pm \iint z \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \mu} - \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \lambda}\right) d\lambda\, d\mu \quad .$$

Beginnt man, wie hier angedeutet, mit der Integration nach μ, so hat man die Grenzen so zu bestimmen, daß sie dem innerhalb f liegenden Teile einer Parameterkurve Λ entsprechen; für die nachfolgende Integration nach λ sind die Grenzen der kleinste und größte auf f vorkommende Wert von λ.

8. Zur weitern Erläuterung diene die Einführung elliptischer Koordinaten (2. Band, 2. Buch, § 15, Nr. 14).

Sind a und b positive Zahlen und ist $a > b$, so genügen der Gleichung

$$\frac{x^2}{a+\tau} + \frac{y^2}{b+\tau} - 1 = 0$$

bekanntlich zwei reale Werte von τ, von denen der eine λ zwischen $-a$ und $-b$ liegt, und der andre μ größer ist als $-b$.

Nimmt man λ und μ als neue Veränderliche, so sind die Parameterkurven Kegelschnitte, die der Ellipse

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 1 = 0$$

brennpunktsgleich sind; und zwar sind die Kurven Λ Hyperbeln, die Kurven M Ellipsen. Die Parameter λ, μ eines Punktes hängen mit den Koordinaten x, y durch die Gleichungen zusammen

$$\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} = 1\,, \qquad \frac{x^2}{a+\mu} + \frac{y^2}{b+\mu} = 1 \quad .$$

Aus ihnen ergeben sich

$$x = \sqrt{\frac{(a+\lambda)(a+\mu)}{a-b}}\,, \qquad y = \sqrt{\frac{(b+\lambda)(b+\mu)}{b-a}} \quad .$$

Für die Punkte der Y-Achse ist $\lambda = -a$, hat also den kleinsten vorkommenden Wert; der andre Parameter μ ergibt sich aus der Gleichung $y = \sqrt{b+\mu}$; für die Punkte der X-Achse ist $\lambda = -b$; μ ergibt sich aus $x = \sqrt{a+\mu}$.

Für ein Bogendifferential auf Λ hat man

$$d\varrho^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2\right] d\mu^2 = \frac{d\mu^2}{4} \cdot \frac{\mu-\lambda}{(a+\mu)(b+\mu)} \quad ;$$

für ein Bogendifferential auf M

$$d\sigma^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2\right] d\lambda^2 = \frac{d\lambda^2}{4} \cdot \frac{\lambda-\mu}{(a+\lambda)(b+\lambda)} \quad .$$

Da die Parameterkurven Λ und M sich unter rechten Winkeln schneiden, so ist ein beliebiges Bogendifferential

$$ds^2 = d\varrho^2 + d\sigma^2 = \frac{\mu-\lambda}{4}\left[\frac{d\mu^2}{(a+\mu)(b+\mu)} - \frac{d\lambda^2}{(a+\lambda)(b+\lambda)}\right] \quad ,$$

und das Flächendifferential

$$df = d\varrho\, d\sigma = \frac{1}{4} \cdot \frac{(\mu-\lambda)\, d\lambda\, d\mu}{\sqrt{-(a+\mu)(b+\mu)(a+\lambda)(b+\lambda)}} \quad .$$

Man hat daher die Änderung

$$1)\quad \left\{\begin{aligned} &\iint \varphi(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{4}\iint \varphi\left(\sqrt{\frac{(a+\lambda)(a+\mu)}{a-b}}\,,\ \sqrt{\frac{(b+\lambda)(b+\mu)}{b-a}}\right) \\ &\qquad \times \frac{\mu-\lambda}{\sqrt{-(a+\mu)(b+\mu)(a+\lambda)(b+\lambda)}}\, d\lambda\, d\mu \quad . \end{aligned}\right.$$

Soll das Integral über den innerhalb XOY liegenden Quadranten der Ellipse

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 1 = 0$$

ausgedehnt werden, und beginnt man mit der Integration nach λ, so hat man diese über den Quadranten der Ellipse zu erstrecken

$$\frac{x^2}{a+\mu}+\frac{y^2}{b+\mu}-1=0 \quad .$$

Dem auf der X-Achse liegenden Scheitel dieser Ellipse gehört der Parameter $\lambda=-b$, dem auf der Y-Achse liegenden $\lambda=-a$ zu; die Integration nach λ erfolgt daher zwischen den Grenzen $-a$ und $-b$. Da ferner für die an die X-Achse sich anschmiegende Kurve M der Parameter $\mu=-b$ und für die begrenzende Kurve $\mu=0$ ist, so hat man

$$2)\qquad \int_0^a\int_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\varphi\,dx\,dy=\frac{1}{4}\int_{-b}^{0}\int_{-a}^{-b}\varphi\cdot\frac{\mu-\lambda}{\sqrt{-(a+\mu)(b+\mu)(a+\lambda)(b+\lambda)}}\,d\mu\,d\lambda \quad .$$

---

9. Berechnung von Oberflächen. Um das Stück F der Oberfläche $\varphi(x,y,z)=0$ zu erhalten, das einen gegebenen Grundriß f hat, zerlegen wir f in kleine Teile Δf und durchschneiden F durch die Mäntel der parallel der Z-Achse erstreckten Cylinder, welche Δf zu Richtschnitten haben; hierdurch zerfällt F in ebensoviel Teile wie f, die wir mit ΔF bezeichnen. Legen wir nun in irgend einem Punkte innerhalb jedes ΔF eine Berührungsebene an F und bezeichnen das Stück derselben, dessen Grundriß mit Δf zusammenfällt, mit ΔT, so stimmen die Summen $\Sigma\Delta F$ und $\Sigma\Delta T$ um so genauer überein, je kleiner die Δf sind. Geht man zur Grenze für verschwindend kleine Δf über, so erhält man

$$F=\lim\Sigma\Delta F=\lim\Sigma\Delta T \quad .$$

Ist τ der Winkel, unter dem T gegen die XY-Ebene geneigt ist, so ist

$$\Delta T=\frac{\Delta f}{\cos\tau} \quad ,$$

daher hat man

$$F=\lim\Sigma\frac{\Delta f}{\cos\tau} \quad ,$$

oder

$$1)\qquad F=\int\frac{1}{\cos\tau}\cdot df=\iint\frac{1}{\cos\tau}\,dx\,dy \quad .$$

Ist die Gleichung der Fläche $z=\varphi(x,y)$, so ist dem absoluten Werte nach (2. Band, 4. Buch, § 6, Nr. 1)

$$\cos\tau=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

und daher

$$2)\qquad F=\iint\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy \quad .$$

Aus der Gleichung $\varphi(x,y,z)=0$ folgt

$$3)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos\tau&=\frac{\partial\varphi}{\partial z}:\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2} \quad ,\\ F&=\iint\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}\cdot dx\,dy \quad .\end{aligned}\right.$$

10. Für das elliptische Paraboloid ist

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{b},$$

$$\frac{1}{\cos\tau} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2},$$

$$F = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}\, dx\, dy .$$

Führt man neue Veränderliche durch die Gleichungen ein

$$x = a\lambda\cos\mu, \quad y = b\lambda\sin\mu,$$

so sind die Parameterkurven Λ Ellipsen

$$\left(\frac{x}{a\lambda}\right)^2 + \left(\frac{y}{b\lambda}\right)^2 = 1,$$

und die Kurven M sind Strahlen durch den Nullpunkt, deren Winkel ψ mit der X-Achse sich ergibt aus

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{b}{a}\operatorname{tang}\mu .$$

Nimmt man als Grundriß f einen Quadranten der Parameterkurve $\lambda = k$, so sind die Grenzbedingungen für x und y

$$0 < \frac{x^2}{k^2 a^2} + \frac{y^2}{k^2 b^2} \leqq 1, \quad x \geqq 0, \quad y > 0 .$$

Die Grenzbedingung für λ ist

$$0 < \lambda \leqq k .$$

Die Grenzen für ψ sind 0 und $\frac{\pi}{2}$; dieselben Grenzen ergeben sich für μ. Ferner ist

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = a\cos\mu, \quad \frac{\partial x}{\partial \mu} = -a\lambda\sin\mu,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = b\sin\mu, \quad \frac{\partial y}{\partial \mu} = b\lambda\cos\mu,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial x}{\partial \mu}\cdot\frac{\partial y}{\partial \lambda} = ab\lambda .$$

Daher hat man für die gesuchte Fläche

$$F = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^k \sqrt{1+\lambda^2}\cdot\lambda\, d\mu\, d\lambda,$$

$$= \frac{\pi}{6}ab\left[(1+k^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$$

Für das hyperbolische Paraboloid ist

$$z = \frac{x^2}{2a} - \frac{y^2}{2b}$$

und daher

$$\frac{1}{\cos\tau} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad ,$$

$$F = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}\, dx\, dy \quad .$$

Hieraus erkennt man: Berührungsebenen, welche die beiden Paraboloide

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z = 0\,, \quad \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - 2z = 0$$

in Punkten berühren, die dasselbe Richtbild auf die XY-Ebene haben, sind gleich geneigt gegen die XY-Ebene. Flächenstücke beider Paraboloide, die dasselbe Richtbild auf die XY-Ebene haben, sind gleich.

11. Die Gleichung eines Kegels zweiter Ordnung, bezogen auf seine Symmetrieebenen, ist

$$z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \quad .$$

Hieraus findet man

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{cx}{a^2} : \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\,, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{cy}{b^2} : \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \quad ,$$

$$\frac{1}{\cos\tau} = \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 x^2}{a^2} + \frac{\beta^2 y^2}{b^2}\right) : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)} \quad ,$$

wenn man abkürzungsweise setzt

$$\frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{a} = \alpha\,, \quad \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{b} = \beta \quad .$$

Führt man dieselben Parameter ein wie im vorigen Beispiele, und erstreckt das Integral wieder über einen Quadranten der Parameterkurve $\lambda = k$, so erhält man

$$1)\quad \begin{cases} F = ab\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^k \sqrt{\alpha^2\cos^2\mu + \beta^2\sin^2\mu} \cdot \lambda\, d\mu\, d\lambda \\ \quad = \dfrac{abk^2}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\alpha^2\cos^2\mu + \beta^2\sin^2\mu}\, d\mu \quad . \end{cases}$$

Die Punkte

$$x = A\sin\mu\,, \quad y = B\sin\mu$$

liegen auf einer Ellipse mit den Halbachsen A und B. Ein Bogendifferential dieser Ellipse ist

$$ds = \sqrt{A^2\cos^2\mu + B^2\sin^2\mu}\, d\mu$$

und daher der Umfang eines Quadranten

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{A^2\cos^2\mu + B^2\sin^2\mu}\, d\mu \quad .$$

Ersetzt man 1) durch

$$F = \frac{ak}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\alpha^2 k^2 b^2 \cos^2\mu + \beta^2 k^2 b^2 \sin^2\mu}\, d\mu \quad ,$$

so bemerkt man den Satz: **Der Teil des auf einer Seite der Spitze liegenden Kegelmantels, dessen Grundriß eine Ellipse mit den Halbachsen ak und bk ist, ist dem Mantel eines geraden elliptischen Cylinders gleich, der die Höhe $\frac{1}{2}ak$ und im Richtschnitte die Halbachsen $\alpha k b$ und $\beta k b$ hat.**

12. Wählt man die Achse einer **normalen axialen Schraubenfläche** zur Z-Achse und ihre Horizontalspur zur X-Achse, so ist die Gleichung

$$z = c \cdot \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} \quad .$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{cy}{x^2 + y^2}\ , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{cx}{x^2 + y^2}\ , \quad \frac{1}{\cos\tau} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + c^2}{x^2 + y^2}}\quad ,$$

$$F = \iint \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + c^2}{x^2 + y^2}}\, dx\, dy \quad .$$

Führt man Polarkoordinaten ein und integriert über eine Fläche, die zwischen den Kreisbogen $r = r_0$ und $r = r_1$, und den Richtungen $\varphi = \varphi_0$ und $\varphi = \varphi_1$ liegt, so hat man

$$1)\quad \begin{cases} F = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int\limits_{r_0}^{r_1} \sqrt{r^2 + c^2}\, d\varphi\, dr \quad , \\ \quad = \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_0)\left[r_1\sqrt{r_1^2 + c^2} - r_0\sqrt{r_0^2 + c^2} + c^2\, l\, \frac{r_1 + \sqrt{r_1^2 + c^2}}{r_0 + \sqrt{r_0^2 + c^2}}\right] \quad . \end{cases}$$

Dieses Ergebnis kann auch auf einem andern Wege gefunden werden, den wir angeben, weil er eine allgemeinere Bedeutung hat.

Ist F eine Regelfläche, sind l und l' zwei benachbarte Lagen der die Fläche beschreibenden Geraden, und ist ihr kürzester (unendlich kleiner) Abstand $d\zeta$, ihr (unendlich kleiner) Winkel $d\varphi$, so kann man ein zwischen l und l' enthaltenes Stück der Fläche F leicht angeben. Ist N der Fußpunkt von $d\zeta$ auf l, und teilt man auf l von N aus kleine Strecken Δr ab, und legt durch die Teilpunkte Lote zu l, die l' treffen, so ist für das Lot dm, das von l die Strecke $NP = r$ abschneidet,

$$dm = \sqrt{r^2\, d\varphi^2 + d\zeta^2} \quad .$$

Daher ist

$$dF = \sqrt{r^2\, d\varphi^2 + d\zeta^2}\, dr \quad ,$$

$$F = \iint \sqrt{r^2\, d\varphi^2 + d\zeta^2}\, dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_{r_0}^{r_1} \left[r\sqrt{r^2 \frac{d\varphi^2}{d\zeta^2} + 1} + \frac{d\zeta}{d\varphi}\, l\left(r\frac{d\varphi}{d\zeta} + \sqrt{r^2\frac{d\varphi^2}{d\zeta^2} + 1}\right)\right] \cdot d\zeta \quad .$$

Für eine normale axiale Schraube ist $d\zeta : d\varphi = c$, also hat man

$$F = \frac{1}{2c}\int_{z_0}^{z_1} \left[r\sqrt{r^2 + c^2} + c^2\, l\, \frac{r + \sqrt{r^2 + c^2}}{c}\right]_{r_0}^{r_1} d\zeta$$

in Übereinstimmung mit 1).

13. Sind die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte einer Fläche als Funktionen zweier unabhängigen Parameter λ, μ gegeben (2. Band, 4. Buch, § 10)

$$x = \varphi(\lambda, \mu), \quad y = \psi(\lambda, \mu), \quad z = \chi(\lambda, \mu) \quad ,$$

so ist das zur Fortschrittsrichtung

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = k$$

gehörige Bogenelement auf der Fläche, wenn, wie dort, die Hauptgrößen erster Ordnung mit e, f, g bezeichnet werden,

$$ds = \sqrt{e + 2fk + gk^2} \cdot d\lambda \quad .$$

Für die am Punkte λ, μ liegenden Elemente der Parameterkurven ds und ds' ist

$$k = 0 \,, \quad \text{bezw.} \quad k' = \infty \quad ,$$

daher ist

$$ds = \sqrt{e} \cdot d\lambda \,, \quad ds' = \sqrt{g} \cdot d\mu \quad .$$

Der Cosinus ihres Winkels ist

$$\cos\vartheta = \frac{f}{\sqrt{eg}} \quad ,$$

daher folgt

$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{eg - f^2}}{\sqrt{eg}} \quad .$$

Hieraus ergibt sich für das Flächenelement

$$dF = \sin\vartheta \cdot ds\, ds' = \sqrt{eg - f^2}\, d\lambda\, d\mu \quad ,$$

wobei die Integrationsgrenzen der Begrenzung des Flächenstücks F zu entsprechen haben.

Wir wenden diese Formel auf räumliche Polarkoordinaten an, und benutzen als solche den Abstand r eines Punktes vom Nullpunkte, den Winkel μ, den r mit OX einschließt und den Winkel λ, unter dem die Ebene des Winkels μ gegen die XY-Ebene geneigt ist. Die Formeln zum Übergange aus rechtwinkligen Koordinaten sind

$$x = r\cos\mu \,, \quad y = r\sin\mu\cos\lambda \,, \quad z = r\sin\mu\sin\lambda \quad .$$

Aus der Gleichung der Fläche in Polarkoordinaten

$$r = f(\lambda, \mu)$$

kann man r in x, y, z einsetzen, und erhält dann die Koordinaten der Flächenpunkte durch die Parameter λ und μ ausgedrückt.

Für die partialen Differentialquotienten der rechtwinkligen Koordinaten nach λ und μ ergibt sich nun

$$1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial\lambda} = \cos\mu\dfrac{\partial r}{\partial\lambda} \,, & \dfrac{\partial x}{\partial\mu} = \cos\mu\dfrac{\partial r}{\partial\mu} - r\sin\mu \quad , \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial\lambda} = \sin\mu\left(\cos\lambda\dfrac{\partial r}{\partial\lambda} - r\sin\lambda\right), & \dfrac{\partial y}{\partial\mu} = \cos\lambda\left(\sin\mu\dfrac{\partial r}{\partial\mu} + r\cos\mu\right) \quad , \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial\lambda} = \sin\mu\left(\sin\lambda\dfrac{\partial r}{\partial\lambda} + r\cos\lambda\right), & \dfrac{\partial z}{\partial\mu} = \sin\lambda\left(\sin\mu\dfrac{\partial r}{\partial\mu} + r\cos\mu\right) \quad . \end{cases}$$

Hieraus ergeben sich folgende Werte für e, f und g

$$2)\quad \begin{cases} e = \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2 + r^2 \sin^2\mu \quad , \\ f = \frac{\partial r}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial r}{\partial \mu} \quad , \\ g = \left(\frac{\partial r}{\partial \mu}\right)^2 + r^2 \quad , \end{cases}$$

sowie ferner

$$eg - f^2 = \left[r^4 + r^2 \left(\frac{\partial r}{\partial \mu}\right)^2\right] \sin^2\varphi + r^2 \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2 \quad .$$

Daher ist schließlich

$$3)\quad F = \iint \sqrt{\left[\left(\frac{\partial r}{\partial \mu}\right)^2 + r^2\right] \sin^2\mu + \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2} \cdot r \, d\lambda \, d\mu \quad .$$

Die Cosinus der Winkel des Flächenlotes mit den Achsen sind

$$\frac{L}{\sqrt{eg - f^2}}, \quad \frac{M}{\sqrt{eg - f^2}}, \quad \frac{N}{\sqrt{eg - f^2}} \quad ,$$

wenn

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \mu} \\ \frac{\partial z}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial \mu} \end{vmatrix} = L \, , \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial \mu} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial \mu} \end{vmatrix} = M \, , \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial \mu} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \mu} \end{vmatrix} = N \quad .$$

Aus 1) folgt

$$4)\quad \begin{cases} L = -r \sin\mu \left(\sin\mu \frac{\partial r}{\partial \mu} + r \cos\mu\right) \quad , \\ M = r \left[\left(\cos\mu \frac{\partial r}{\partial \mu} - r \sin\mu\right) \sin\mu \cos\lambda - \sin\lambda \frac{\partial r}{\partial \lambda}\right] \quad , \\ N = r \left[\left(\cos\mu \frac{\partial r}{\partial \mu} - r \sin\mu\right) \sin\mu \sin\lambda + \cos\lambda \frac{\partial r}{\partial \lambda}\right] \quad . \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich für den Winkel ν, den das Flächenlot mit OP bildet,

$$\cos\nu = -\frac{xL + yM + zN}{r\sqrt{eg - f^2}} = \frac{r^2 \sin\mu}{\sqrt{eg - f^2}} \quad .$$

Man hat daher auch

$$5)\quad F = \iint \frac{r^2}{\cos\nu} \sin\mu \, d\lambda \, d\mu \quad .$$

Zu derselben Formel gelangt man durch folgende geometrische Betrachtung.

Beschreibt man um den Nullpunkt eine Kugel, deren Halbmesser $= 1$ ist, bezeichnet ihren Schnittpunkt N mit der X-Achse als Pol und zählt die Meridiane von XY-Ebene an (Fig. 36), so ist μ der Polabstand und λ die Länge des Mittenbildes Π des Punktes P auf der Kugel. Das kleine Flächenstück $\Pi\Pi_1\Pi_3\Pi_2$ der Kugel, das zwischen den Meridianen λ und $\lambda + \Delta\lambda$ und den Breitenkreisen μ und $\mu + \Delta\mu$ liegt, nähert sich beim Übergange zu verschwindend kleinen $\Delta\lambda$ und $\Delta\mu$ einem Rechtecke aus den Seiten

$$\lim \Pi\Pi_1 = \sin\mu \, d\lambda \, , \quad \lim \Pi\Pi_2 = d\mu \quad .$$

Wir projizieren dieses Kugelelement $\Delta S = \Pi\Pi_1\Pi_3\Pi_2$ von O aus auf die Berührungsebene T der Fläche im Punkte P und auf eine Ebene, die durch Π parallel zu T gelegt ist: die erstere Projektion sei ΔF, die letztere $\Delta\Phi$; diese beiden Projektionen hängen durch die Gleichung zusammen

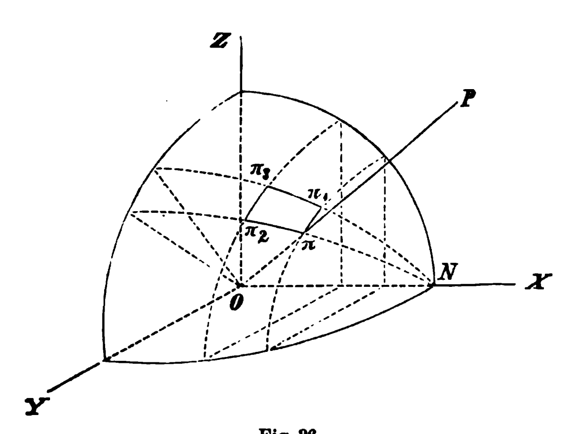


Fig. 36.

$$\Delta F = r^2 \cdot \Delta\Phi \quad .$$

Geht man nun zur Grenze für verschwindend kleine ΔS über, so kann man ΔF mit einem Elemente der gegebenen Oberfläche, und ΔS mit der Normalprojektion der Fläche $\Delta\Phi$ auf die Berührungsebene der Kugel in Π verwechseln; man hat daher

$$d\Phi = \frac{dS}{\cos\nu} = \frac{1}{\cos\nu}\sin\mu\, d\lambda\, d\mu \quad ,$$

folglich

$$dF = \frac{r^2}{\cos\nu}\sin\mu\, d\lambda\, d\mu \quad ,$$

und schließlich

$$F = \iint \frac{r^2}{\cos\nu}\sin\mu\, d\lambda\, d\mu \quad .$$

§ 10. Dreifache bestimmte Integrale.

1. Einen gegebenen begrenzten Raum v teilen wir auf irgendwelche Weise in kleine Teile

$$\Delta_1 v\,,\quad \Delta_2 v\,,\quad \Delta_3 v\,,\ \ldots\ \Delta_k v \ldots \quad ,$$

und bezeichnen mit $f_k(x, y, z)$ den Wert, den die Funktion $f(x, y, z)$ für irgend einen im Innern von Δv gelegenen Punkt annimmt.

Unter dem über den Raum v erstreckten Integrale

$$\int f(x, y, z)\, dv$$

verstehen wir alsdann den Grenzwert, gegen den die Summe

$$\Sigma f_k(x, y, z)\, \Delta_k v$$

für verschwindend kleine Werte der Δv konvergiert, wenn dabei die Summation über alle in v enthaltenen Raumteile ausgedehnt wird. Es ist also

$$1)\qquad \int f(x, y, z)\, dv = \lim \Sigma f(x, y, z)\, \Delta v \quad ,$$

wobei rechts der Zeiger k unterdrückt worden ist.

Dieses Integral hat eine einfache physikalische Bedeutung. Unter dem spezifischen Gewichte eines homogenen Körpers (d. i. bei welchem gleiche Räume gleiche Gewichte haben) versteht man das Gewicht der Raumeinheit; das Gewicht eines homogenen Körpers ist daher das Produkt aus dem Raume und dem spezifischen Gewichte. Ist ein Körper nicht homogen, so versteht man unter

dem an einem Punkte x, y, z vorhandenen spezifischen Gewichte den Grenzwert des Quotienten

$$\Delta\gamma : \Delta v \quad .$$

Hierbei bedeutet Δv einen kleinen Teil des Körpers, in welchem der Punkt x, y, z liegt, und $\Delta\gamma$ das Gewicht dieses Teiles.

Es bedeute nun die Funktion $f(x, y, z)$ das spezifische Gewicht im Punkte x, y, z eines Körpers vom Raume v; ferner bedeute $\mathfrak{f}_k(x, y, z)$ das kleinste und $\mathfrak{F}_k(x, y, z)$ das größte innerhalb $\Delta_k v$ vorhandene spezifische Gewicht. Ist nun G das Gewicht des Körpers, so hat man die Begrenzungen

$$\Sigma \mathfrak{f}_k(x, y, z)\, \Delta_k v < G < \Sigma \mathfrak{F}_k(x, y, z)\, \Delta_k v \quad ,$$

$$\Sigma \mathfrak{f}_k(x, y, z)\, \Delta_k v < \Sigma f_k(x, y, z)\, \Delta_k v < \Sigma \mathfrak{F}_k(x, y, z)\, \Delta_k v \quad .$$

Verschwinden die Δv, so gehen die Grenzen ineinander über, und man hat daher

$$\int f(x, y, z)\, dv = \lim \Sigma f(x, y, z)\, \Delta v = G \quad .$$

Das über einen Raum v erstreckte bestimmte Integral $\int f dv$ gibt also das Gewicht eines Körpers an, der den Raum v erfüllt, und dessen spezifisches Gewicht an jedem Punkte gleich dem Werte ist, den die Funktion f für diesen Punkt hat.

Über einen Raum erstreckte Integrale kommen aber auch in mehrfach andrer Bedeutung in der Mechanik vor, von denen wir nur noch eine andeuten wollen. Die Anziehung, die ein Körperelement auf einen Massenpunkt in einer bestimmten Richtung ausübt, ist verhältnisgleich dem Gewichte des Elements und einer Funktion φ der Koordinaten desselben, welche die besondere Art der Anziehung bezeichnet. Ist nun f das Produkt aus dem spezifischen Gewichte und der Funktion φ, so gibt $\int f dv$ bis auf einen vom anziehenden Körper unabhängigen, auf physikalischem Wege zu ermittelnden Faktor die Gesamtanziehung an, die der angezogene Punkt in der gegebenen Richtung von dem Körper erleidet.

2. Das Integral $\int f dv$ kann je nach der Art, wie man den Raum V einteilt auf sehr verschiedenen Wegen, und zwar immer durch drei aufeinander folgende einfache Integrationen berechnet werden.

Durch Parallelebenen zu den Koordinatenebenen zerfällt v in rechtwinklige Spate; sind Δx, Δy, Δz die den Achsen parallel gemessenen Kanten des Raumteils, in dessen Innern der Punkt x, y, z liegt, so hat man

$$\int f(x, y, z)\, dv = \lim \Sigma f(x, y, z)\, \Delta z\, \Delta y\, \Delta x \quad .$$

Addiert man zunächst die Elemente, die zwischen zwei folgenden Lotebenen zur X-Achse liegen, so haben dieselben Δx gemeinsam, und angesichts des Grenzübergangs hat x in der Funktion f für alle diese Elemente denselben Wert, ist also bei dieser Addition konstant. Dieser Teil der Summe ist daher

$$\Delta x \cdot \lim \Sigma f \cdot \Delta z\, \Delta y = \Delta x \int\!\!\int f\, dy\, dz \quad .$$

Dabei ist das Integral über den Querschnitt des Raumes v zu erstrecken, der die Abscisse x hat.

Man hat nun weiter

$$\lim \Sigma f \cdot \Delta z\, \Delta y\, \Delta x = \lim \Sigma \left(\int\!\!\int f\, dy\, dz\right) \Delta x = \int \left(\int\!\!\int f\, dy\, dz\right) dx \quad .$$

Die Grenzen des Integrals sind dabei die größte und kleinste Abscisse, zwischen denen v enthalten ist.

Unter Einhaltung der angegebenen Grenzen ist daher

$$\int f(x, y, z)\, dv = \int\!\!\int\!\!\int f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \quad .$$

3. Ist v ein zwischen den Ebenen $x = a_0$, $x = a_1$, $y = b_0$, $y = b_1$, $z = c_0$, $z = c_1$ enthaltener Spat, so sind diese Koordinaten die Grenzen der Integrale, es ist

$$\int f\,dv = \int_{a_0}^{a_1}\int_{b_0}^{b_1}\int_{c_0}^{c_1} f\,dx\,dy\,dz \quad .$$

Ordnet man in

$$\Sigma f\,\Delta z\,\Delta y\,\Delta x$$

die Reihenfolge der Addition anders, z. B. so, daß man erst die zwischen zwei Lotebenen zur Y-Achse enthaltenen Raumelemente addiert, so ergibt diese Teilsumme

$$\Delta y\,\Sigma f\,\Delta z\,\Delta x \quad .$$

Hierbei ist y in $f(x, y, z)$ konstant. Der Übergang zur Grenze für verschwindende Δz und Δx liefert

$$\Delta y \int_{a_0}^{a_1}\int_{c_0}^{c_1} f\,dx\,dz \quad .$$

Hieraus ergibt sich weiter

$$\int f\,dv = \lim \Sigma\,\Delta y \int_{a_0}^{a_1}\int_{c_0}^{c_1} f\,dx\,dz = \int_{b_0}^{b_1}\int_{a_0}^{a_1}\int_{c_0}^{c_1} f\,dy\,dx\,dz \quad .$$

Es ist daher

$$\int_{a_0}^{a_1}\int_{b_0}^{b_1}\int_{c_0}^{c_1} f\,dx\,dy\,dz = \int_{b_0}^{b_1}\int_{a_0}^{a_1}\int_{c_0}^{c_1} f\,dy\,dx\,dz \quad .$$

Auf diesem Wege gewinnt man den Satz: Wenn die Grenzen konstant sind, so kann die Reihenfolge der Integrationen geändert werden, ohne daß die Grenzen sich ändern.

Sind die Grenzen nicht konstant, so ändern sich mit der Reihenfolge der Integrationen auch die Grenzen.

4. Um die Integration $\int f\,dv$ in Polarkoordinaten auszuführen, ersetzen wir in f die Koordinaten x, y, z gemäß der Gleichungen

$$x = \varrho \cos\mu\,, \quad y = \varrho \sin\mu \cos\lambda\,, \quad z = \varrho \sin\mu \sin\lambda \quad .$$

Wir beschreiben Kugeln S um den Nullpunkt, und bezeichnen mit $\Delta\varrho$ die in Richtung eines Radius gemessene Dicke der Schicht zwischen zwei aufeinander folgenden Kugeln; hierauf Umdrehungskegel C, die OX zur Achse haben, und bezeichnen mit $\Delta\mu$ den Winkel der derselben Meridianebene angehörigen Mantellinien zweier aufeinander folgenden Kegel; schließlich Ebenen E durch die X-Achse und bezeichnen mit $\Delta\lambda$ den Winkel zweier aufeinander folgenden Ebenen.

Durch den Kegel, dessen Meridian den Winkel μ mit der Achse bildet, wird auf der Kugelfläche mit dem Halbmesser ϱ eine Kappe begrenzt, deren Höhe $\varrho(1 - \cos\mu)$ ist; also ist der auf ihr stehende Kugelausschnitt

$$1) \qquad 2\pi\varrho \cdot \varrho(1 - \cos\mu) \cdot \frac{\varrho}{3} = \frac{2\pi}{3}\varrho^3(1 - \cos\mu) \quad .$$

Wächst μ um $\Delta\mu$, so wächst dieser Ausschnitt um

$$\frac{2\pi}{3}\varrho^3[\cos\mu - \cos(\mu + \Delta\mu)] \quad .$$

Behält man angesichts des Grenzübergangs nur Glieder mit der ersten Potenz von $\Delta\mu$ bei, so erhält man

$$2) \qquad \frac{2\pi}{3}\varrho^3 \sin\mu\,\Delta\mu \quad .$$

Wächst ferner ϱ um $\Delta\varrho$, so wächst dieser Raum um den Ring

$$\frac{2\pi}{3}\sin\mu\,\Delta\mu\,[(\varrho+\Delta\varrho)^3-\varrho^3] \quad ;$$

behält man hier von dem Klammerinhalte nur Glieder mit der ersten Potenz von $\Delta\varrho$, so entsteht

$$3) \qquad 2\pi\varrho^2\sin\mu\,\Delta\mu\,\Delta\varrho \quad .$$

Der Teil dieses Ringes, der zwischen zwei benachbarten Ebenen E liegt, ist einer von den Raumteilen, in welche wir jetzt v zerlegt haben; er hat zum Ring 3) das Verhältnis $\Delta\lambda : 2\pi$; mithin folgt

$$\Delta v = \varrho^2\sin\mu\,\Delta\mu\,\Delta\lambda\,\Delta\varrho \quad .$$

Somit ergibt sich schließlich

$$\int f\,dv = \iiint f\cdot\varrho^2\sin\mu\,d\varrho\,d\lambda\,d\mu \quad .$$

Die Grenzen sind hier entsprechend zu bestimmen.

5. Drückt man x, y, z durch drei Parameter ϱ, λ, μ aus

$$1) \qquad x=\varphi(\varrho,\lambda,\mu)\,,\quad y=\psi(\varrho,\lambda,\mu)\,,\quad z=\chi(\varrho,\lambda,\mu) \quad ,$$

und wählt die Parameter so, daß im allgemeinen zu jedem Punkte von v ein und nur ein realer Parameterverein ϱ, λ, μ gehört, so kann man die Integration auch in den neuen Veränderlichen ϱ, λ, μ durchführen.

Denkt man sich in den Gleichungen 1) den Parameter ϱ gegeben und entfernt λ und μ, so erhält man eine Gleichung in x, y, z, die ϱ enthält; die Fläche, welche diese Gleichung darstellt, enthält alle die Punkte, denen der gegebene Parameterwert ϱ zugehört, wir wollen sie die Parameterfläche P nennen. In gleicher Weise erhalten wir die Parameterflächen Λ und M, welche die Punkte enthalten, denen dasselbe λ oder μ zugehört.

Der Voraussetzung nach schneiden sich zwei Parameterflächen derselben Art nicht, folglich kann der Raumteil, der von den drei Paar Parameterflächen ϱ, $\varrho+\Delta\varrho$, λ, $\lambda+\Delta\lambda$, μ, $\mu+\Delta\mu$ eingeschlossen wird, für verschwindende Werte von $\Delta\varrho$, $\Delta\lambda$, $\Delta\mu$ als Spat betrachtet werden.

Die drei dem Punkte P benachbarten Ecken P_1, P_2, P_3 dieses Raumteils erreicht man durch Verschiebungen von P, wenn dabei der Reihe nach λ und μ, μ und ϱ, ϱ und λ ungeändert bleiben.

Bezeichnet man die Koordinaten von P_i mit $x+\Delta_i x$, $y+\Delta_i y$, $z=\Delta_i z$, so ist daher

$$\Delta_1 x=\frac{\partial x}{\partial\varrho}\Delta\varrho\,,\quad \Delta_1 y=\frac{\partial y}{\partial\varrho}\Delta\varrho\,,\quad \Delta_1 z=\frac{\partial z}{\partial\varrho}\Delta\varrho \quad ;$$

$$\Delta_2 x=\frac{\partial x}{\partial\lambda}\Delta\lambda\,,\quad \Delta_2 y=\frac{\partial y}{\partial\lambda}\Delta\lambda\,,\quad \Delta_2 z=\frac{\partial z}{\partial\lambda}\Delta\lambda \quad ;$$

$$\Delta_3 x=\frac{\partial x}{\partial\mu}\Delta\mu\,,\quad \Delta_3 y=\frac{\partial y}{\partial\mu}\Delta\mu\,,\quad \Delta_3 z=\frac{\partial z}{\partial\mu}\Delta\mu \quad .$$

Das Tetraeder, dessen Ecken die Koordinaten $x_i y_i z_i$ haben, stimmt bekanntlich dem absoluten Werte nach überein mit

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad .$$

Zieht man die erste Zeile von jeder folgenden ab, so erhält man

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 - x_0, & y_1 - y_0, & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0, & y_2 - y_0, & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0, & y_3 - y_0, & z_3 - z_0 \end{vmatrix} .$$

Läßt man hier $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \Delta_3 x, \Delta_1 y, \ldots \Delta_3 z$ an die Stelle der Koordinatenunterschiede treten, so erhält man für den Spat aus den Kanten PP_1, PP_2, PP_3

$$\Delta v = \pm \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varrho} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial \mu} \\ \frac{\partial y}{\partial \varrho} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \mu} \\ \frac{\partial z}{\partial \varrho} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial \mu} \end{vmatrix} \cdot \Delta\mu \, \Delta\lambda \, \Delta\varrho .$$

Ersetzt man schließlich in f die rechtwinkligen Koordinaten durch ϱ, λ, μ, so hat man

$$\iiint f \, dx \, dy \, dz = \pm \iiint f \cdot J \cdot d\varrho \, d\lambda \, d\mu ,$$

wobei

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varrho} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial \mu} \\ \frac{\partial y}{\partial \varrho} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \mu} \\ \frac{\partial z}{\partial \varrho} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial \mu} \end{vmatrix} .$$

Die Grenzen sind hierbei wieder der Begrenzung von v entsprechend zu bestimmen und das Vorzeichen so zu wählen, daß es mit dem von J übereinstimmt.

6. Man kann diese Änderung auch unabhängig von geometrischen Betrachtungen durchführen. Aus den Gleichungen

$$1) \qquad x = \varphi(\varrho, \lambda, \mu) , \qquad y = \psi(\varrho, \lambda, \mu)$$

berechne man ϱ und λ und setze diese Werte in

$$z = \chi(\varrho, \lambda, \mu) \quad ;$$

dadurch erhält man z als Funktion von x, y und μ. Nimmt man nun x, y und μ als neue Veränderliche, so hat man dz durch μ auszudrücken. Bei der ersten Integration bleiben y und x unverändert; unter dieser Voraussetzung gewinnt man durch Differentiation der Gleichungen 1)

$$0 = \frac{\partial x}{\partial \varrho} d\varrho + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \mu} d\mu ,$$

$$0 = \frac{\partial y}{\partial \varrho} d\varrho + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial y}{\partial \mu} d\mu ,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \varrho} d\varrho + \frac{\partial z}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial z}{\partial \mu} d\mu .$$

Hieraus folgt

$$dz = \frac{J}{J_1} d\mu ,$$

wobei

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varrho} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial \varrho} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{vmatrix} .$$

Daher hat man zunächst

$$\iiint f\,dx\,dy\,dz = \iiint f\,\frac{J}{J_1}\,dx\,dy\,d\mu \quad ,$$

wobei man die Grenzen der Integration nach μ nach den Grenzen für z zu bestimmen hat.

Hierauf ändert man die Ordnung der ersten beiden Integrationen; nachdem die Grenzen entsprechend bestimmt worden sind, erhält man

$$\iiint f \cdot \frac{J}{J_1} \cdot dx\,d\mu\,dy \quad .$$

Nun entferne man aus den Gleichungen 1) den Parameter ϱ und drücke y als Funktion von λ, μ und x aus. Führt man durch diese Gleichung λ statt y in das Integral ein, so hat man dy durch $d\lambda$ zu ersetzen; dabei ist aber zu berücksichtigen, daß μ und x unverändert bleiben.

Unter dieser Voraussetzung erhält man

$$0 = \frac{\partial x}{\partial \varrho}\,d\varrho + \frac{\partial x}{\partial \lambda}\,d\lambda \quad ,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \varrho}\,d\varrho + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\,d\lambda \quad ,$$

und hat demnach

$$dy = \frac{J_1}{\dfrac{\partial x}{\partial \varrho}}\,d\lambda \quad ,$$

und daher die zweite Umformung

$$2) \qquad \iiint f\,dx\,dy\,dz = \iiint f \cdot \frac{J}{\dfrac{\partial x}{\partial \varrho}}\,dx\,d\mu\,d\lambda \quad ,$$

wobei die Grenzen für λ denen für y entsprechen müssen.

Hier ändert man nochmals die Ordnung der Integrationen und beginnt mit der nach x, bildet also, indem man die neuen Grenzen gehörig bestimmt,

$$\iiint f\,\frac{J}{\dfrac{\partial x}{\partial \varrho}}\,d\mu\,d\lambda\,dx \quad .$$

Nun kann man x durch ϱ gemäß der Gleichung

$$x = \varphi(\varrho, \lambda, \mu)$$

ersetzen; da bei der Integration nach x die Parameter λ und μ ungeändert bleiben, so hat man

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \varrho}\,d\varrho \quad .$$

Bestimmt man nun die Grenzen der Integration nach ϱ entsprechend denen für x, so hat man schließlich

$$3) \qquad \iiint f\,dx\,dy\,dz = \iiint f \cdot J \cdot d\mu\,d\lambda\,d\varrho \quad ,$$

in Übereinstimmung mit dem Resultat in Nr. 5, da die Ordnung der Integrationen unwesentlich ist.

Die in Nr. 5 gegebene Vorzeichenregel kommt zustande, wenn wir, wie in Nr. 5, die Bedingung stellen, daß die untern Grenzen der geänderten Integrale,

wie im ursprünglichen, kleiner als die obern sind. Aus

$$dz = \frac{J}{J_1}\,d\mu\,, \quad dy = \frac{J_1}{\frac{\partial x}{\partial \varrho}}\cdot d\lambda\,, \quad dx = \frac{\partial x}{\partial \varrho}\,d\varrho$$

erkennt man leicht, daß zu positiven $d\mu$, $d\lambda$, $d\varrho$ drei positive oder ein positiver und zwei negative Werte dz, dy, dx gehören, sobald $J > 0$; hingegen zwei positive und ein negativer oder drei negative, sobald $J < 0$. Ist nun z. B. dz negativ, so folgt, daß wachsenden z abnehmende μ entsprechen, daß also die auf μ bezügliche obere Grenze in 1) kleiner ist, als die untere, wenn im gegebenen Integrale alle untern kleiner sind als die obern. Will man daher in 3) die untere Grenze für μ kleiner haben als die obere, so muß man die Grenzen und damit das Vorzeichen des Integrals wechseln.

Hieraus folgt, daß wenn in 3) schließlich alle untern Grenzen kleiner als die obern sein sollen, das Integral 3) noch mit ± 1 zu multiplizieren ist, je nachdem $J \gtrless 0$.

7. Das Quadrat der Funktionaldeterminante J ist

$$J^2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & b_0 & b_1 \\ a_2 & b_1 & c_0 \end{vmatrix}\,,$$

wobei abkürzend gesetzt ist

$$\begin{aligned}
a_0 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varrho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varrho}\right)^2, & a_1 &= \frac{\partial x}{\partial \varrho}\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varrho}\frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial z}{\partial \varrho}\frac{\partial z}{\partial \lambda}\,, \\
b_0 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2, & a_2 &= \frac{\partial x}{\partial \varrho}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \varrho}\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial \varrho}\frac{\partial z}{\partial \mu}\,, \\
c_0 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2, & b_1 &= \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial z}{\partial \mu}\,.
\end{aligned}$$

Für die verschwindend kleinen Verschiebungen PP_1, PP_2, PP_3 (Nr. 5) ist nun

$$PP_1 = \sqrt{a_0}\,d\varrho\,, \quad PP_2 = \sqrt{b_0}\,d\lambda\,, \quad PP_3 = \sqrt{c_0}\,d\mu\,.$$

$$PP_1 \cdot PP_2 \cdot \cos P_1PP_2 = a_1\,d\varrho\,d\lambda\,,$$

$$PP_1 \cdot PP_3 \cdot \cos P_1PP_3 = a_2\,d\varrho\,d\mu\,,$$

$$PP_2 \cdot PP_3 \cdot \cos P_2PP_3 = b_1\,d\lambda\,d\mu\,.$$

Wenn sich je drei Parameterflächen P, Λ, M rechtwinklig schneiden, so sind P_1PP_2, P_1PP_3, P_2PP_3 rechte Winkel; man hat daher $a_1 = a_2 = b_1 = 0$. Die Determinante J^2 beschränkt sich alsdann auf ihr Diagonalglied, es ist

$$J = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varrho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varrho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varrho}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2}\,.$$

Dieser Fall tritt bei den gewöhnlichen räumlichen Polarkoordinaten (Nr. 4) ein.

8. Ein weiteres Beispiel für rechtwinklige Parameterflächen geben die elliptischen Raumkoordinaten.

Sind x, y, z die Koordinaten eines Punktes, und ist $a > b > c > 0$, so hat die kubische Gleichung der Unbekannten ν

$$1) \qquad \frac{x^2}{a+\nu} + \frac{y^2}{b+\nu} + \frac{z^2}{c+\nu} - 1 = 0$$

immer drei reale Wurzeln. Beseitigt man nämlich die Nenner, so erhält man

$$2)\quad \left\{\begin{aligned} F(\nu) = x^2(b+\nu)(c+\nu) + y^2(a+\nu)(c+\nu) + z^2(a+\nu)(b+\nu) \\ -(a+\nu)(b+\nu)(c+\nu) = 0 \quad . \end{aligned}\right.$$

Setzt man für ν der Reihe nach die Werte $-a$, $-b$, $-c$, ∞, so erhält man

$$F(-a) = x^2(b-a)(c-a)\,,\quad F(-b) = y^2(a-b)(c-b)\quad ,$$
$$F(-c) = z^2(a-c)(b-c)\,,\quad F(\infty) = \infty\quad .$$

Die Wurzeln der Gleichung 1) liegen daher zwischen den Grenzen ∞ und $-c$, $-c$ und $-b$, $-b$ und $-a$; wir bezeichnen sie der Reihe nach mit ϱ, λ, μ. Die Gleichungen der Parameterflächen sind

$$3)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{P} &\equiv \frac{x^2}{a+\varrho} + \frac{y^2}{b+\varrho} + \frac{z^2}{c+\varrho} - 1 = 0 \quad , \\ \mathrm{M} &\equiv \frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} + \frac{z^2}{c+\lambda} - 1 = 0 \quad , \\ \Lambda &\equiv \frac{x^2}{a+\mu} + \frac{y^2}{b+\mu} + \frac{z^2}{c+\mu} - 1 = 0 \quad . \end{aligned}\right.$$

Die Flächen P sind dreiachsige Ellipsoide, Λ sind einschalige und M sind zweischalige Hyperboloide. Da ϱ, λ, μ die Wurzeln der Gleichung 2) sind, so gilt die Identität

$$(a+\nu)(b+\nu)(c+\nu) - x^2(b+\nu)(c+\nu) - y^2(a+\nu)(b+\nu) - z^2(a+\nu)(b+\nu)$$
$$\equiv (\nu-\varrho)(\nu-\lambda)(\nu-\mu)\quad .$$

Ersetzt man hier ν der Reihe nach durch $-a$, $-b$, $-c$, so erhält man

$$4)\quad \left\{\begin{aligned} x^2 = \frac{(a+\varrho)(a+\lambda)(a+\mu)}{(b-a)(c-a)}\,,\quad y^2 = \frac{(b+\varrho)(b+\lambda)(b+\mu)}{(a-b)(c-b)}\quad , \\ z^2 = \frac{(c+\varrho)(c+\lambda)(c+\mu)}{(a-c)(b-c)}\quad . \end{aligned}\right.$$

Durch Subtraktion je zweier der Gleichungen 3) erhält man die Gleichungen

$$5)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{x^2}{(a+\varrho)(a+\lambda)} + \frac{y^2}{(b+\varrho)(b+\lambda)} + \frac{z^2}{(c+\varrho)(c+\lambda)} = 0 \quad , \\ \frac{x^2}{(a+\varrho)(a+\mu)} + \frac{y^2}{(b+\varrho)(b+\mu)} + \frac{z^2}{(c+\varrho)(c+\mu)} = 0 \quad , \\ \frac{x^2}{(a+\lambda)(a+\mu)} + \frac{y^2}{(b+\lambda)(b+\mu)} + \frac{z^2}{(c+\lambda)(c+\mu)} = 0 \quad . \end{aligned}\right.$$

Bezeichnet man mit ϱ_0, ϱ_1, ϱ_2, λ_0, λ_1, λ_2, μ_0, μ_1, μ_2 die Cosinus der Stellungswinkel der Berührungsebenen der Flächen P, Λ, M im Punkte P, so ist bekanntlich

$$6)\quad \left\{\begin{aligned} \varrho_0 : \varrho_1 : \varrho_2 &= \frac{x}{a+\varrho} : \frac{y}{b+\varrho} : \frac{z}{c+\varrho} \quad , \\ \lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2 &= \frac{x}{a+\lambda} : \frac{y}{b+\lambda} : \frac{z}{c+\lambda} \quad , \\ \mu_0 : \mu_1 : \mu_2 &= \frac{x}{a+\mu} : \frac{y}{b+\mu} : \frac{z}{c+\mu} \quad . \end{aligned}\right.$$

Die Gleichungen 5) sagen daher aus, daß diese Ebenen lotrecht zueinander sind, daß sich also die durch P gehenden Parameterflächen P, Λ, M unter rechten Winkeln schneiden.

Aus den Gleichungen 4) ergibt sich

$$2\frac{\partial x}{\partial \varrho} = \frac{x}{a+\varrho}, \quad 2\frac{\partial y}{\partial \varrho} = \frac{y}{b+\varrho}, \quad 2\frac{\partial z}{\partial \varrho} = \frac{z}{c+\varrho} \quad ;$$

$$2\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{x}{a+\lambda}, \quad 2\frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{y}{b+\lambda}, \quad 2\frac{\partial z}{\partial \lambda} = \frac{z}{c+\lambda} \quad ;$$

$$2\frac{\partial x}{\partial \mu} = \frac{x}{a+\mu}, \quad 2\frac{\partial y}{\partial \mu} = \frac{y}{b+\mu}, \quad 2\frac{\partial z}{\partial \mu} = \frac{z}{c+\mu} \quad ;$$

hieraus folgt weiter

$$7) \quad \begin{cases} J = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{x^2}{(a+\varrho)^2} + \frac{y^2}{(b+\varrho)^2} + \frac{z^2}{(c+\varrho)^2}} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{(a+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c+\lambda)^2}} \\ \cdot \sqrt{\frac{x^2}{(a+\mu)^2} + \frac{y^2}{(b+\mu)^2} + \frac{z^2}{(c+\mu)^2}} \quad . \end{cases}$$

Die Radikanden, die wir der Reihe nach mit $1 : R^2$, $1 : L^2$, $1 : M^2$, bezeichnen wollen, kann man in folgender Weise bestimmen. Für die in 6) enthaltenen Cosinus hat man die Werte

$$8) \quad \begin{cases} \varrho_0 = \frac{Rx}{a+\varrho}, \quad \varrho_1 = \frac{Ry}{b+\varrho}, \quad \varrho_2 = \frac{Rz}{c+\varrho} \quad , \\ \lambda_0 = \frac{Lx}{a+\lambda}, \quad \lambda_1 = \frac{Ly}{b+\lambda}, \quad \lambda_2 = \frac{Lz}{c+\lambda} \quad , \\ \mu_0 = \frac{Mx}{a+\mu}, \quad \mu_1 = \frac{My}{b+\mu}, \quad \mu_2 = \frac{Mz}{c+\mu} \quad . \end{cases}$$

Hieraus und mit Rücksicht auf die Gleichungen 3) ergibt sich

$$9) \quad \begin{cases} \varrho_0 x + \varrho_1 y + \varrho_2 z = R \quad , \\ \lambda_0 x + \lambda_1 y + \lambda_2 z = L \quad , \\ \mu_0 x + \mu_1 y + \mu_2 z = M \quad . \end{cases}$$

Diese Gleichungen lehren (2. Band, 3. Buch, § 2, Nr. 4), daß R, L, M die Koordinaten von P in einem Systeme sind, dessen Ebenen durch O parallel zu den Berührungsebenen der Parameterflächen P, Λ, M gelegt sind.

Bildet man in bekannter Weise die Formeln, welche x, y, z in den neuen Koordinaten R, L, M ausdrücken, so erhält man

$$10) \quad \begin{cases} x = \varrho_0 R + \lambda_0 L + \mu_0 M \quad , \\ y = \varrho_1 R + \lambda_1 L + \mu_1 M \quad , \\ z = \varrho_2 R + \lambda_2 L + \mu_2 M \quad . \end{cases}$$

Hierin ersetzen wir nun die $\varrho_0 \ldots \mu_2$ durch die Werte 8); dadurch entsteht

$$11) \quad \begin{cases} \frac{R^2}{a+\varrho} + \frac{L^2}{a+\lambda} + \frac{M^2}{a+\mu} = 1 \quad , \\ \frac{R^2}{b+\varrho} + \frac{L^2}{b+\lambda} + \frac{M^2}{b+\mu} = 1 \quad , \\ \frac{R^2}{c+\varrho} + \frac{L^2}{c+\lambda} + \frac{M^2}{c+\mu} = 1 \quad . \end{cases}$$

Diese Gleichungen lehren, daß die kubische Gleichung

$$\frac{R^2}{u+\varrho} + \frac{L^2}{u+\lambda} + \frac{M^2}{u+\mu} = 1$$

die Wurzeln a, b, c hat. Beseitigt man in dieser Gleichung die Nenner und wechselt die Zeichen, so erhält man

$$(u+\varrho)(u+\lambda)(u+\mu) - R^2(u+\lambda)(u+\mu) - L^2(u+\varrho)(u+\mu) \\ - M^2(u+\varrho)(u+\lambda) = 0 \quad .$$

Man hat daher die Identität

$$(u+\varrho)(u+\lambda)(u+\mu) - R^2(u+\lambda)(u+\mu) - L^2(u+\varrho)(u+\mu) \\ - M^2(u+\varrho)(u+\lambda) \equiv (u-a)(u-b)(u-c) \quad .$$

Setzen wir in diese identische Gleichung für u der Reihe nach $-\varrho$, $-\lambda$, $-\mu$, so erhalten wir sofort

$$12)\quad \begin{cases} R^2 = \dfrac{(\varrho+a)(\varrho+b)(\varrho+c)}{(\lambda-\varrho)(\mu-\varrho)}, \quad L^2 = \dfrac{(\lambda+a)(\lambda+b)(\lambda+c)}{(\varrho-\lambda)(\mu-\lambda)}, \\ M^2 = \dfrac{(\mu+a)(\mu+b)(\mu+c)}{(\varrho-\mu)(\lambda-\mu)} \quad . \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Werte ergibt sich schließlich die gesuchte Änderung

$$\iiint f\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{8}\iiint f \cdot \frac{(\varrho-\lambda)(\lambda-\mu)(\mu-\varrho)}{\sqrt{-ABC}}\,d\varrho\,d\lambda\,d\mu \quad ,$$

wobei zur Abkürzung gesetzt worden ist

$$A \equiv (\varrho+a)(\varrho+b)(\varrho+c), \quad B \equiv (\lambda+a)(\lambda+b)(\lambda+c) \quad , \\ C \equiv (\mu+a)(\mu+b)(\mu+c) \quad .$$

9. Wir wollen diese Formel anwenden, um einen Oktanten des Ellipsoids zu berechnen, dessen Oberfläche die Gleichung hat

$$E \equiv \frac{x^2}{a+\varrho_0} + \frac{y^2}{b+\varrho_0} + \frac{z^2}{c+\varrho_0} - 1 = 0 \quad .$$

Das Doppelintegral nach μ und λ hat sich hierbei über alle Punkte des Oktanten eines mit E brennpunktsgleichen Ellipsoids zu erstrecken, mithin über alle Werte von μ und λ; daher sind für μ die Grenzen $-a$ und $-b$, und für λ sind sie $-b$ und $-c$. Betreffs der Grenzen für ϱ genügen die Bemerkungen, daß die Achsen der Parameterfläche mit ϱ wachsen, und daß E selbst eine der Parameterflächen P ist, nämlich für den besondern Wert $\varrho = \varrho_0$; die Flächen P, die innerhalb E liegen, gehören daher zu den Werten $\varrho = -c$ bis $\varrho = \varrho_0$.

Da es sich nur um eine Addition der Raumelemente handelt, so ist $f = 1$. Verwendet man ferner die bekannte Formel für den Inhalt eines dreiachsigen Ellipsoids, so erhält man schließlich die bemerkenswerte Integralformel

$$1)\quad \frac{4}{3}\pi\sqrt{A_0} = \int_{-c}^{\varrho_0}\int_{-b}^{-c}\int_{-a}^{-b} \frac{(\varrho-\lambda)(\lambda-\mu)(\mu-\varrho)}{\sqrt{-ABC}}\,d\varrho\,d\lambda\,d\mu \quad .$$

Auf andre beachtenswerte Integrale kommt man, wenn man das Gewicht einer Schicht des Ellipsoids unter der Voraussetzung bestimmt, daß das spezifische Gewicht f des Körpers auf brennpunktsgleichen Ellipsoiden beständig ist. Ein

homogenes Ellipsoid $a+\varrho$, $b+\varrho$, $c+\varrho$ hat den Inhalt

$$2) \qquad \frac{4}{3}\pi\sqrt{A} \quad .$$

Hieraus erhält man das Gewicht einer unendlich dünnen ellipsoidischen Schale, deren Grenzen die Parameterflächen ϱ und $\varrho + d\varrho$ sind, wenn man 2) nach ϱ differenziert und mit f multipliziert; es ergibt sich

$$3) \qquad \frac{2\pi f}{3}\,\frac{dA}{\sqrt{A}} \quad .$$

Betrachtet man hier f als Funktion von ϱ und integriert, so ergibt das zwischen den Grenzen ϱ_0 und ϱ_1 genommene Integral das Gewicht der zwischen den Parameterflächen ϱ_0 und ϱ_1 enthaltenen, nicht homogenen Schicht zu

$$4) \qquad G = \frac{2\pi}{3}\int_{\varrho_0}^{\varrho_1}\frac{f(\varrho)}{\sqrt{A}}\cdot\frac{dA}{d\varrho}\,d\varrho \quad .$$

Die Voraussetzung $f(\varrho) = \sqrt{A}$ ergibt

$$G = \frac{2\pi}{3}(A_1 - A_0) \quad ;$$

daher hat man

$$\frac{2\pi}{3}(A_1 - A_0) = \int_{\varrho_0}^{\varrho_1}\int_{-b}^{-c}\int_{-a}^{-b}\frac{(\varrho-\lambda)(\lambda-\mu)(\mu-\varrho)}{\sqrt{BC}}\,d\varrho\, d\lambda\, d\mu \quad .$$

Jede andre Voraussetzung über $f(\varrho)$, bei der das Integral 4) in geschlossener Form hergestellt werden kann — z. B. wenn man $f(\varrho)$ als Funktion von A so wählt, daß $f(A)\,dA$ das Differential einer bekannten Funktion ist — führt zu einer neuen Integralformel.

10. Wir geben noch ein Beispiel für Parameterflächen, die sich nicht rechtwinklig schneiden.

Es seien a, b, c drei positive Zahlen, und

$$1) \qquad \begin{cases} E \equiv a x^2 + b y^2 + c z^2 - 1 = 0 \quad , \\ F \equiv a x^2 + b y^2 - c z^2 - 1 = 0 \quad , \\ G \equiv a x^2 - b y^2 - c z^2 - 1 = 0 \quad , \end{cases}$$

also E ein Ellipsoid, F ein einschaliges, G ein zweischaliges Hyperboloid. Durch jeden Punkt des Raumes geht je eine Fläche, die zu E, F, G ähnlich ist; denn in den Gleichungen

$$2) \qquad \begin{cases} a x^2 + b y^2 + c z^2 - \lambda = 0 \quad , \\ a x^2 + b y^2 - c z^2 - \mu = 0 \quad , \\ a x^2 - b y^2 - c z^2 - \nu = 0 \end{cases}$$

können $\lambda\,\mu\,\nu$ immer eindeutig so bestimmt werden, daß diese Gleichungen von den Koordinaten eines gegebenen Punktes P befriedigt werden. Die Zahlen $\lambda\,\mu\,\nu$ sind daher als Parameter zur Bestimmung von P verwendbar.

Löst man 2) nach den Koordinaten auf, so entsteht

$$3) \qquad \begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{2a}(\lambda+\nu) \quad , \\ y^2 = \dfrac{1}{2b}(\mu-\nu) \quad , \\ z^2 = \dfrac{1}{2c}(\lambda-\mu) \quad . \end{cases}$$

Aus 3) folgt

$$4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \lambda} = \dfrac{1}{4ax}, & \dfrac{\partial x}{\partial \mu} = 0, & \dfrac{\partial x}{\partial \nu} = \dfrac{1}{4ax}, \\ \dfrac{\partial y}{\partial \lambda} = 0, & \dfrac{\partial y}{\partial \mu} = \dfrac{1}{4by}, & \dfrac{\partial y}{\partial \nu} = -\dfrac{1}{4by}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial \lambda} = \dfrac{1}{4cz}, & \dfrac{\partial z}{\partial \mu} = -\dfrac{1}{4cz}, & \dfrac{\partial z}{\partial \nu} = 0. \end{cases}$$

Daher hat man

$$J = -\frac{1}{32\,abcxyz} = -\frac{1}{8\sqrt{2abc}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\lambda+\nu)(\mu-\nu)(\lambda-\mu)}},$$

und schließlich, wenn man das Integral links über das ganze Ellipsoid erstreckt,

$$\int f\,dv = \frac{1}{\sqrt{2abc}} \cdot \iiint \frac{f\,d\lambda\,d\mu\,d\nu}{\sqrt{(\lambda+\nu)(\mu-\nu)(\lambda-\mu)}}.$$

Soll sich die Integration über den Raum erstrecken, der zwischen den zwei Ellipsoiden λ_0 und λ_1 enthalten ist, so sind die Grenzen für das erste Integral $-\lambda$ und μ, für das zweite $-\lambda$ und $+\lambda$, für das dritte λ_0 und λ_1. Wenn f nur von λ abhängt, so ist für eine unendlich dünne von λ und $\lambda + d\lambda$ eingeschlossene Schale

$$\int f\,dv = 2\pi f \frac{\sqrt{\lambda}\,d\lambda}{\sqrt{abc}},$$

Daher hat man für die von λ_0 und λ_1 begrenzte Schale

$$\int f\,dv = \frac{2\pi}{\sqrt{abc}} \cdot \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} f\sqrt{\lambda}\,d\lambda.$$

Auch hier führen geeignete Voraussetzungen über $f(\lambda)$ zu einer Reihe von Integralformeln. Man erhält z. B. für $f(\lambda) = 1$

$$\frac{4\pi}{3}\sqrt{2}\left(\sqrt{\lambda_1^3} - \sqrt{\lambda_0^3}\right) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\int_{-\lambda}^{+\lambda}\int_{-\lambda}^{\mu} \frac{d\lambda\,d\mu\,d\nu}{\sqrt{(\lambda+\nu)(\mu-\nu)(\lambda-\mu)}}.$$

Für $f(\lambda) \equiv 1 : \sqrt{\lambda}$ ergibt sich

$$2\sqrt{2}\,\pi(\lambda_1 - \lambda_0) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\int_{-\lambda}^{+\lambda}\int_{-\lambda}^{\mu} \frac{d\lambda\,d\mu\,d\nu}{\sqrt{\lambda(\lambda+\nu)(\mu-\nu)(\lambda-\mu)}}.$$

§ 11. Die periodischen Reihen und die FOURIERschen Integrale.

1. In diesem Abschnitte untersuchen wir unendliche Reihen, die eine der beiden allgemeinen Formen haben

$$1)\qquad A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + A_3 \cos 3u + \ldots$$

$$2)\qquad B_1 \sin u + B_2 \sin 2u + B_3 \sin 3u + \ldots$$

die also nach dem Cosinus und Sinus der natürlichen Vielfachen des Bogens u fortschreiten.

Wenn die Reihen innerhalb der Grenzen 0 und π gültig sind*), so stellen sie Funktionen von u dar; setzt man in diesem Falle

$$A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + \ldots = f(u) \quad ,$$

so ist offenbar

$$f(\pi + v) = f(\pi - v) \quad .$$

Die Werte, welche die Funktion von $u = 0$ bis $u = \pi$ annimmt, wiederholen sich also in umgekehrter Reihenfolge, wenn die Veränderliche von $u = \pi$ bis $u = 2\pi$ wächst. Beachtet man ferner, daß die Faktoren $\cos mu$ ihre Werte nicht ändern, wenn u um ein ganzes Vielfaches von 2π zu oder abnimmt, so erkennt man, daß

$$f(u + 2k\pi) = f(u) \quad .$$

Die Summe der Reihe ist daher eine periodische Funktion von u. Ebenso erkennt man sofort, daß auch die Reihe 2) eine periodische Funktion von u ist. Beide werden daher als periodische Reihen bezeichnet.

Hierin unterscheiden sich diese Reihen wesentlich von den Potenzreihen.

Potenzreihen sind innerhalb des Geltungsgebiets Funktionen der Veränderlichen; an der Grenze der Gültigkeit treten im allgemeinen Unstetigkeiten auf; und für alle Werte der Veränderlichen außerhalb dieses Gebietes ist die Summe der Reihe unendlich groß. Die periodischen Reihen 1) und 2) dagegen sind für alle Werte von u gültig, wenn sie für die Strecke von 0 bis π gelten, und sind periodische Funktionen von u mit der Periode 2π.

2. Ist $f(u)$ eine Funktion, die von $u = 0$ bis $u = \pi$ endlich bleibt, so kann man die Zahlen $A_0, A_1, A_2 \ldots A_{n-1}$, bezw. $B_1, B_2, B_3, \ldots B_n$ so bestimmen, daß die Gleichungen

$$1) \qquad f(u) = A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + \ldots + A_{n-1} \cos(n-1)u$$

$$2) \qquad f(u) = B_1 \sin u + B_2 \sin 2u + B_3 \sin 3u + \ldots + B_n \sin nu$$

für n verschiedene innerhalb der Strecke von 0 bis π liegende übrigens willkürlich gewählte Werte von u erfüllt werden. Denn setzt man die gegebenen Werte von u z. B. in 1) ein, so erhält man n Gleichungen, die $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$ linear enthalten, aus denen die A also eindeutig bestimmt werden können. Die Summen der endlichen Reihen

$$S_n = A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + \ldots + A_{n-1} \cos(n-1)u$$

$$\Sigma_n = B_1 \sin u + B_2 \sin 2u + \ldots + B_n \sin nu$$

stimmen also dann für die gegebenen n Werte von u mit $f(u)$ überein.

Vermehrt man nun die Zahl n, so wächst die Anzahl der Punkte, welche die Kurven S_n, Σ_n und $f(u)$, — u dabei als Abscisse und S_n, Σ_n bezw. $f(u)$ als Ordinate betrachtet, — gemein haben; wird n unendlich groß, so haben die Kurven S_n und $f(u)$, bezw. Σ_n und $f(u)$ unendlich viele Punkte innerhalb der Strecke von 0 bis π gemein. Es wird daher jedenfalls möglich sein, die Koeffizienten A_0, A_1, A_2 ... bezw. B_1, B_2, B_3 ... der unendlichen Reihen

$$A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + \ldots$$

$$B_1 \sin u + B_2 \sin 2u + \ldots$$

so zu bestimmen, daß für alle Werte von u innerhalb 0 und π die Reihen eine gegebene, innerhalb der Grenzen endlich bleibende Funktion $f(u)$ darstellen.

3. Angenommen, es gelte die Entwicklung

$$1) \qquad f(u) = A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + \ldots \quad ,$$

so kann man die Koeffizienten leicht auf folgendem Wege bestimmen.

---

*) Über die Gültigkeitsbedingungen vgl. u. a. SCHLOEMILCH, Kompendium der höheren Analysis, 4. Aufl., Bd. I, S. 40.

Man multipliziere 1) mit du und integriere zwischen den Grenzen 0 und π. Da für jede ganze Zahl k

$$\int_0^\pi \cos k u \, du = 0 \quad ,$$

so erhält man

$$\int_0^\pi f(u)\, du = \pi A_0 \quad ,$$

mithin

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(u)\, du \quad . \tag{2}$$

Zur Bestimmung der andern Koeffizienten machen wir von der Integralformel Gebrauch

$$\int_0^\pi \cos k u \cos n u \, du = \tfrac{1}{2}\Big(\int_0^\pi \cos(k-n) u \, du + \int_0^\pi \cos(k+n) u \, du\Big)$$
$$= \begin{cases} \tfrac{1}{2}\pi, & \text{wenn } k = n \\ 0, & \text{wenn } k \gtrless n \quad . \end{cases}$$

Multipliziert man 1) mit $\cos k u \, du$ und integriert zwischen den Grenzen 0 und π, so erhält man hiernach

$$\int_0^\pi f(u) \cos k u \, du = \tfrac{1}{2}\pi A_k \quad ,$$

mithin

$$A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(u) \cos k u \, du \quad . \tag{3}$$

Durch ein ähnliches Verfahren erhält man die Koeffizienten der Entwicklung

$$f(u) = B_1 \sin u + B_2 \sin 2u + B_0 \sin 3u + \ldots \tag{4}$$

Multipliziert man beide Seiten mit $\sin k u \, du$ und integriert zwischen den Grenzen 0 und π, indem man dabei von der Formel Gebrauch macht

$$\int_0^\pi \sin k u \sin n u \, du = \tfrac{1}{2}\Big(\int_0^\pi \cos(k-n) u \, du - \int_0^\pi \cos(k+n) u \, du\Big)$$
$$= \begin{cases} \tfrac{1}{2}\pi, & \text{wenn } k = n \quad , \\ 0, & \text{wenn } k \gtrless n \quad , \end{cases}$$

so erhält man

$$\int_0^\pi f(u) \sin k u \, du = \tfrac{1}{2}\pi B_k \quad ,$$

und daher

$$B_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(u) \sin k u \, du \quad . \tag{5}$$

4. Hierbei ist vorausgesetzt worden, daß die Entwicklungen

$$f(u) = A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + A_3 \cos 3u + \ldots \tag{1}$$

$$f(u) = B_1 \sin u + B_2 \sin 2u + B_3 \sin 3u + \ldots \tag{2}$$

zulässig sind, und unter dieser Voraussetzung sind die Koeffizienten bestimmt worden. Es ist nun noch zu untersuchen, welche Beschaffenheit eine Funktion

$f(u)$ haben muß, um innerhalb des Intervalls 0 und π in eine periodische Reihe 1) oder 2) entwickelbar zu sein.

Um diese Frage zu entscheiden, summieren wir die endlichen Reihen, die aus 1) und 2) hervorgehen, wenn man die gefundenen Koeffizienten einsetzt und bei dem Gliede mit dem Index n abbricht,

$$3)\quad \begin{cases} S_n = \dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{1}{2}\int_0^\pi f(v)\,dv + \int_0^\pi f(v)\cos v\cos u\,dv + \int_0^\pi f(v)\cos 2v\cos 2u\,dv\right. \\ \left. + \int_0^\pi f(v)\cos 3v\cos 3u\,dv + \ldots + \int_0^\pi f(v)\cos nv\cos nu\,dv\right] \quad ; \end{cases}$$

$$4)\quad \begin{cases} \Sigma_n = \dfrac{2}{\pi}\left[\int_0^\pi f(v)\sin v\sin u\,dv + \int_0^\pi f(v)\sin 2v\sin 2u\,dv\right. \\ \left. + \int_0^\pi f(v)\sin 3v\sin 3u\,dv + \ldots + \int_0^\pi f(v)\sin nv\sin nu\,du\right] \quad . \end{cases}$$

Vereint man alle Integrale in jeder Summe zu einem einzigen, so erhält man

$$5)\quad S_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(v)(1 + 2\cos v\cos u + 2\cos 2v\cos 2u + \ldots + 2\cos nv\cos nu)\,dv \quad ,$$

$$6)\quad \Sigma_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(v)(2\sin v\sin u + 2\sin v 2v\sin 2u + 2\sin 3v\sin 3u + \ldots + 2\sin nv\, sn\, in\, u)dv.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$R_1 = \cos(v-u) + \cos 2(v-u) + \cos 3(v-u) + \ldots + \cos n(v-u) \quad ,$$
$$R_2 = \cos(v+u) + \cos 2(v+u) + \cos 3(v+u) + \ldots + \cos n(v+u) \quad ,$$

so erhält man

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(v)(1 + R_1 + R_2)\,dv\,, \qquad \Sigma_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(v)(R_1 - R_2)\,dv \quad .$$

Die goniometrischen Reihen R_1 und R_2 lassen sich leicht summieren. Multipliziert man nämlich die Reihe

$$\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cos 4a + \ldots + \cos n a$$

mit $2\sin\frac{1}{2}a$, und macht in jedem Gliede von der Formel Gebrauch

$$2\sin\tfrac{1}{2}a\cdot\cos k a = \sin(k + \tfrac{1}{2}a) - \sin(k - \tfrac{1}{2}a) \quad ,$$

so erhält man sofort

$$2\sin\tfrac{1}{2}a(\cos a + \cos 2a + \ldots + \cos n a)$$
$$= \sin\tfrac{3}{2}a - \sin\tfrac{1}{2}a + \sin\tfrac{5}{2}a - \sin\tfrac{3}{2}a + \ldots + \sin(n + \tfrac{1}{2})a - \sin(n - \tfrac{1}{2})a \quad .$$

Hieraus folgt

$$\cos a + \cos 2a + \ldots + \cos n a = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(n + \frac{1}{2})a}{2\sin\frac{1}{2}a} \quad .$$

Daher ist

$$R_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(v-u)}{2\sin\frac{1}{2}(v-u)}, \quad R_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(v+u)}{2\sin\frac{1}{2}(v+u)},$$

und schließlich

$$7)\quad S_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(v)\cdot\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(v-u)}{\sin\frac{1}{2}(v-u)}\,dv + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(v)\cdot\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(v+u)}{\sin\frac{1}{2}(v+u)}\,dv,$$

$$8)\quad \Sigma_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(v)\cdot\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(v-u)}{\sin\frac{1}{2}(v-u)}\,dv + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(v)\cdot\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(v+u)}{\sin\frac{1}{2}(v+u)}\,dv.$$

In diesen Gleichungen lassen wir nun n unendlich wachsen. Ob dabei S_n und Σ_n sich bestimmten endlichen Grenzen nähern und welches diese Grenzen gegebenenfalls sind, das hängt davon ab, was aus den beiden Integralen

$$9)\quad \int_0^\pi f(v)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(v-u)}{\sin\frac{1}{2}(v-u)}\,dv \quad \text{und} \quad \int_0^\pi f(v)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(v+u)}{\sin\frac{1}{2}(v+u)}\,dv$$

wird, wenn n unendlich wächst.

Statt mit diesen beiden Integralen, werden wir uns zunächst mit dem Grenzwerte eines etwas einfachern beschäftigen.

5. Grenzwert des Integrales $\int_0^a \frac{\sin mu}{u}F(u)\,du$, wenn m die Reihe der natürlichen Zahlen durchlaufend unendlich wächst, und a positiv ist.

Wir teilen den Betrag ma in q ganze Vielfache von π und einen Rest ϱ, der kleiner als π ist, so daß also

$$ma = q\pi + \varrho, \quad a = \frac{q\pi + \varrho}{m},$$

und zerlegen das gegebene Integral in

$$\int_0^{\frac{\pi}{m}} \frac{\sin mu}{u}F(u)\,du + \int_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{2\pi}{m}} \frac{\sin mu}{u}F(u)\,du + \int_{\frac{2\pi}{m}}^{\frac{3\pi}{m}} \frac{\sin mu}{u}F(u)\,du + \ldots$$

$$\ldots + \int_{\frac{(q-1)\pi}{m}}^{\frac{q\pi}{m}} \frac{\sin mu}{u}F(u)\,du + \int_{\frac{q\pi}{m}}^{\frac{q\pi}{m}+\frac{\varrho}{m}} \frac{\sin mu}{u}F(u)\,du.$$

In jedem dieser Integrale ändern wir die Veränderliche; in dem zwischen den Grenzen

$$\frac{k\pi}{m} \quad \text{und} \quad \frac{(k+1)\pi}{m}$$

genommenen Integrale setzen wir

$$u = v + \frac{k\pi}{m} \quad ,$$

und in dem letzten Integrale

$$u = v + \frac{q\pi}{m} \quad .$$

Hierdurch erhalten alle Integrale, bis auf das letzte, die gemeinsamen Grenzen 0 und $\frac{\pi}{m}$; sie lassen sich daher in ein Integral vereinen, und es entsteht

$$1) \begin{cases} \displaystyle\int_0^a \frac{\sin mu}{u} F(u)\,du \\ \displaystyle= \int_0^{\frac{\pi}{m}} \left(\frac{F(v)}{v} - \frac{F\left(v+\frac{\pi}{m}\right)}{v+\frac{\pi}{m}} + \frac{F\left(v+\frac{2\pi}{m}\right)}{v+\frac{2\pi}{m}} - \ldots \pm \frac{F\left(v+\frac{(q-1)\pi}{m}\right)}{v+\frac{(q-1)\pi}{m}} \right) \sin mv\,dv \\ \displaystyle\pm \int_0^{\frac{\varrho}{m}} \frac{F\left(v+\frac{q\pi}{m}\right)}{v+\frac{q\pi}{m}} \sin mv\,dv \quad . \end{cases}$$

Ersetzt man hier mv durch ω, so erhält man

$$2) \begin{cases} \displaystyle\int_0^a \frac{\sin mu}{u} F(u)\,du \\ \displaystyle= \int_0^{\pi} \left[\frac{F\left(\frac{\omega}{m}\right)}{\omega} - \frac{F\left(\frac{\omega+\pi}{m}\right)}{\omega+\pi} + \frac{F\left(\frac{\omega+2\pi}{m}\right)}{\omega+2\pi} - \ldots \pm \frac{F\left(\frac{\omega+(q-1)\pi}{m}\right)}{\omega+(q-1)\pi} \right] \sin\omega\,d\omega \\ \displaystyle\pm \int_0^{\varrho} \frac{F\left(\frac{\omega+q\pi}{m}\right)}{\omega+q\pi} \sin\omega\,d\omega \quad . \end{cases}$$

Wir nehmen nun zunächst für $F(u)$ den einfachsten Fall an und setzen $F(u) = 1$; dann entsteht aus 2), indem wir sogleich zur Grenze für $m = \infty$ übergehen

$$\lim \int_0^a \frac{\sin mu}{u}\,du = \lim \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega+\pi} + \frac{1}{\omega+2\pi} - \frac{1}{\omega+3\pi} + \ldots \right) \sin\omega\,d\omega$$

$$\pm \lim \int_0^{\varrho} \frac{1}{\omega+q\pi} \sin\omega\,d\omega \quad .$$

Da $\varrho < \pi$, so ist die unter dem letzten Integralzeichen stehende Funktion innerhalb der Grenzen positiv, und daher das Integral kleiner als

$$\int_0^\varrho \frac{1}{\omega + q\pi} d\omega = l\left(1 + \frac{\varrho}{q\pi}\right) .$$

Wird m unendlich groß, so wird auch $q = \infty$; da nun

$$\lim l\left(1 + \frac{\varrho}{q\pi}\right) = 0 , \quad q = \infty ,$$

so folgt, daß um so mehr

$$\lim \int_0^\varrho \frac{1}{\omega + q\pi} \sin\omega \, d\omega = 0 , \quad q = \infty .$$

Der Grenzwert der Funktion unter dem ersten Integralzeichen rechts

$$\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega + \pi} + \frac{1}{\omega + 2\pi} - \frac{1}{\omega + 3\pi} + \frac{1}{\omega + 4\pi} - - \ldots\right) \sin\omega \, d\omega$$

ist für alle innerhalb der Integrationsgrenzen 0 und π liegenden Werte von ω endlich. Denn für $\omega = 0$ ist zwar das erste Glied der eingeklammerten Summe unendlich groß, das Produkt mit dem verschwindenden $\sin\omega$ ist aber $= 1$; alle andern Bestandteile des Produkts verschwinden mit $\sin\omega$. Für jeden positiven Wert von ω enthält die Reihe

$$\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega + \pi} + \frac{1}{\omega + 2\pi} - \frac{1}{\omega + 3\pi} + \ldots$$

Glieder, die unbegrenzt abnehmen; daher hat die Reihe einen endlichen Grenzwert.

Hieraus folgt, daß der Grenzwert des Integrales

$$\int_0^\pi \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega + \pi} + \frac{1}{\omega + 2\pi} - - \ldots\right) \sin\omega \, d\omega$$

eine endliche bestimmte Größe ist; wird dieselbe mit C bezeichnet, so haben wir schließlich

$$\lim \int_0^a \frac{\sin m u}{u} du = C .$$

Wir werden sehr bald Gelegenheit finden C zu bestimmen.

6. Wir wenden uns nun zur Gleichung 2) der vorigen Nummer zurück und setzen voraus, daß $F(u)$ innerhalb der Integrationsgrenzen 0 und a endlich bleibt.

Ist F' der größte Wert, den $F(u)$ innerhalb $u = 0$ und $u = a$ annimmt, so ist

$$\lim \int_0^\varrho \frac{F\left(\frac{\omega + q\pi}{m}\right)}{\omega + q\pi} \sin\omega \, d\omega < F' \lim \int_0^\varrho \frac{1}{\omega + q\pi} \sin\omega \, d\omega ;$$

da nun der letzte Grenzwert 0 ist, so folgt das gleiche auch für den linksstehenden.

Daher verbleibt

$$\lim\int_0^a \frac{\sin m u}{u} F(u)\,du = \lim\int_0^\pi \left[\frac{F\left(\frac{\omega}{m}\right)}{\omega} - \frac{F\left(\frac{\omega+\pi}{m}\right)}{\omega+\pi} + \frac{F\left(\frac{\omega+2\pi}{m}\right)}{\omega+2\pi} - \ldots\right] \sin\omega\,d\omega\,.$$

Die Glieder der Reihe

$$S = \frac{F\left(\frac{\omega}{m}\right)}{\omega} - \frac{F\left(\frac{\omega+\pi}{m}\right)}{\omega+\pi} + \frac{F\left(\frac{\omega+2\pi}{m}\right)}{\omega+2\pi} - \ldots$$

nähern sich der Grenze 0, man darf daher unbedenklich annehmen, daß die Reihe aus einer geraden Anzahl Glieder besteht. Wir wollen sie in zwei Teile zerlegen; dem ersten weisen wir unendlich viele Glieder zu, doch sei das Verhältnis dieser Gliedzahl zur Gesamtzahl m noch unendlich klein. Für diesen Teil ist also

$$\lim\frac{\omega+\mu\pi}{m} = 0\quad,$$

und man hat

$$S = F(0)\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega+\pi} + \frac{1}{\omega+2\pi} - \ldots\right) + T\quad. \tag{1}$$

Die Zähler in T haben die Form

$$F\left(\frac{\omega+\mu\pi+n\pi}{m}\right)$$

und hierfür kann beim Grenzübergange $m=\infty$ nach der Voraussetzung gesetzt werden

$$F\left(\frac{n\pi}{m}\right)\quad,$$

so daß man erhält

$$T = \frac{F\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\omega+\mu\pi+\pi} - \frac{F\left(\frac{2\pi}{m}\right)}{\omega+\mu\pi+2\pi} \quad\ldots \tag{2}$$

Da nun

$$\frac{F\left(\frac{n\pi}{m}\right)}{\omega+\mu\pi+n\pi} - \frac{F\left(\frac{n+1}{m}\pi\right)}{\omega+\mu\pi+\overline{n+1}\,\pi}$$

$$= \frac{(\omega+\mu\pi+n\pi)\left[F\left(\frac{n\pi}{m}\right) - F\left(\frac{n+1}{m}\pi\right)\right] + \pi F\left(\frac{n\pi}{m}\right)}{(\omega+\mu\pi+n\pi)(\omega+\mu\pi+\overline{n+1}\,\pi)}\,,$$

so ist

$$T = \sum\frac{(\omega+\mu\pi+n\pi)\left[F\left(\frac{n\pi}{m}\right) - F\left(\frac{n+1}{m}\pi\right)\right] + \pi F\left(\frac{n\pi}{m}\right)}{(\omega+\mu\pi+n\pi)(\omega+\mu\pi+\overline{n+1}\,\pi)}\,. \tag{3}$$

Der Grenzwert des Unterschieds

$$F\left(\frac{n\pi}{m}\right) \quad F\left(\frac{n+1}{m}\pi\right)$$

ist für $m = \infty$ nur unendlich klein; setzt man in allen Gliedern der Summe 3) den größten der Unterschiede

$$F\left(\frac{n\pi}{m}\right) - F\left(\frac{n+1}{m}\pi\right) \quad ,$$

so ist selbst dessen Produkt mit $(\omega + \mu\pi + n\pi)$, wie sich durch eine einfache geometrische Betrachtung leicht erkennen läßt, keine unendliche Zahl; es läßt sich daher immer eine endliche Zahl a angeben, die größer ist als das größte der Produkte

$$(\omega + \mu\pi + n\pi)\left[F\left(\frac{n\pi}{m}\right) - F\left(\frac{n+1}{m}\pi\right)\right] \quad .$$

Hieraus folgt

$$T < \sum \frac{a}{(\omega + \mu\pi + n\pi)(\omega + \mu\pi + \overline{n+1}\,\pi)}$$

d. i.

$$< \frac{a}{\pi}\sum\left(\frac{1}{\omega + \mu\pi + n\pi} - \frac{1}{\omega + \mu\pi + \overline{n+1}\,\pi}\right)$$

$$< \frac{a}{\pi}\left(\frac{1}{\omega + \mu\pi + \pi} - \frac{1}{\omega + \mu\pi + 2\pi} + \frac{1}{\omega + \mu\pi + 3\pi} - \cdots\right) \quad .$$

Da nun

$$\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega + \pi} + \frac{1}{\omega + 2\pi} - \frac{1}{\omega + 3\pi} + \cdots$$

konvergiert, so folgt $T = 0$.

Daher hat man schließlich

$$4) \qquad \lim \int_0^a \frac{\sin m u}{u} F(u)\,du = C \cdot F(0) \quad .$$

7. Die unter dem Integralzeichen stehende Funktion hat die außergewöhnliche Eigenschaft, innerhalb der Integrationsstrecke unendlich oft zu verschwinden, und zwischen diesen unendlich vielen Nullwerten unendlich viele positive und negative größte und kleinste Werte zu haben. Man könnte hieraus schließen, daß eine solche Funktion nicht integrierbar, und somit die Formel 4) absurd sei. Hiergegen ist einzuwenden, daß es sich nicht um ein fertiges Integral, sondern um einen Grenzwert handelt; wodurch auch der auffällige Umstand Erklärung findet, daß der Grenzwert von der obern Grenze unabhängig ist. Am besten kann man aber diese gerechtfertigten Bedenken durch Einführung einer neuen Veränderlichen beseitigen.

Durch die Ersetzung

$$m u = z$$

erhält man

$$\int \frac{\sin m u}{u} F(u)\,du = \int \frac{\sin z}{z} F\left(\frac{z}{m}\right) dz \quad .$$

Der untern Grenze 0 des ungeänderten Integrals kann man dieselbe Grenze für das geänderte entsprechen lassen; die obere Grenze des geänderten hat man unendlich groß zu wählen, doch dabei festzuhalten, daß sie zu dem unendlichen m das endliche Verhältnis a hat.

Man kann nun die neue Integrationsstrecke in einen Teil zerlegen, der von 0 bis zu einer unendlichen Zahl μ reicht, deren Verhältnis zu dem unendlichen m verschwindet (indem man z. B. $\mu = \sqrt{m}$ annimmt), und in den Teil von μ bis $a\,m$.

Für den ersten Teil ist beständig

$$\lim F\left(\frac{z}{m}\right) = F(0) \quad ,$$

das zugehörige Integral ist daher

$$F(0)\int_0^\infty \frac{\sin z}{z}\, dz \quad .$$

Ist G der größte absolute Wert, den $F\left(\frac{m}{z}\right)$ in der zweiten Strecke annimmt, so ist das zugehörige Integral kleiner, als

$$G\int_\mu^{am} \frac{\sin z}{z}\, dz$$

und dies ist 0, weil

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{z}\, dz$$

von endlicher Größe ist.

Man hat ferner die Zerlegung

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{z}\, dz = \int_0^\pi \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+\pi} + \frac{1}{z+2\pi} - \dots\right) \sin z\, dz = C \quad ;$$

bei dem links stehenden Integrale ist dabei die obere Grenze durch ein natürliches Vielfaches x von π ersetzt worden, was nach den Erörterungen in Nr. 5 erlaubt ist. Dadurch, daß man

$$\lim \int_0^a \frac{\sin m u}{u} F(u)\, du$$

durch das Produkt aus $F(0)$ und dem zwischen den Grenzen 0 und ∞ genommenen Integrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{z}\, dz$$

ersetzt hat, sind die oben erwähnten Bedenken beseitigt worden.

8. Um die Konstante C zu bestimmen, wird man $F(u)$ so wählen, daß das Integral Nr. 6, 4) ausgeführt werden kann. Wir setzen $F(u) = u : \sin u$ und erhalten

$$\int_0^a \frac{\sin m u}{u} F(u)\, du = \int_0^a \frac{\sin m u}{\sin u}\, du \quad .$$

Nun ist bekanntlich

$$\frac{\sin(2n+1)a}{\sin a} = 1 + 2(\cos 2a + \cos 4a + \cos 6a + \dots + \cos 2na) \quad .$$

Setzen wir m ungerade voraus und nehmen $a = \frac{\pi}{2}$, so entsteht

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m u}{\sin u}\, du = \frac{\pi}{2} \quad .$$

Da nun in unserem Falle $F(0) = 1$, so folgt

$$C = \frac{\pi}{2} \quad .$$

Daher ist für jede innerhalb der Integrationsgrenzen endlich bleibende Funktion $F(u)$ und für ein positives a

$$\lim \int_0^a \frac{\sin m u}{u} F(u)\, d u = \frac{\pi}{2} F(0) \quad .$$

9. Aus dem soeben gewonnenen Grenzwerte ergibt sich nun auch der Grenzwert des Integrales

$$\int_0^a \frac{\sin m u}{\sin u} f(u)\, d u$$

durch die Ersetzung

$$F(u) = \frac{u}{\sin u} f(u) \quad .$$

Dieselbe ist zulässig, sobald $f(u)$ innerhalb der Grenzen 0 und a endlich bleibt und a kleiner als π ist. Man erhält

$$1) \qquad \lim \int_0^a \frac{\sin m u}{\sin u} f(u)\, d u = \frac{\pi}{2} f(0)\,, \quad 0 < a < \pi \quad .$$

Liegen a und β zwischen 0 und π, so ist

$$\lim \int_a^\beta \frac{\sin m u}{\sin u} f(u)\, d u = \lim \int_0^\beta \frac{\sin m u}{\sin u} f(u)\, d u - \lim \int_0^a \frac{\sin m u}{\sin u} f(u)\, d u \quad .$$

Daher folgt

$$2) \qquad \lim \int_a^\beta \frac{\sin m u}{\sin u} f(u)\, d u = 0 \quad .$$

Diese Ergebnisse setzen uns in den Stand, die in Nr. 4 abgebrochene Untersuchung zu Ende zu führen. Es handelte sich dort um die Grenzwerte der beiden Integrale

$$J_1 = \int_0^\pi f(v) \frac{\sin \frac{1}{2}(2 n + 1)(v - u)}{\sin \frac{1}{2}(v - u)} d v \quad \text{und} \quad J_2 = \int_0^\pi f(v) \frac{\sin \frac{1}{2}(2 n + 1)(v + u)}{\sin \frac{1}{2}(v + u)} d v \,.$$

Setzt man in dem ersten $v - u = 2 w$, in dem zweiten $v + u = 2 w$, so erhält man

$$J_1 = 2 \int_{-\frac{u}{2}}^{\frac{\pi}{2} - \frac{u}{2}} \frac{\sin (2 n + 1) w}{\sin w} f(2 w + u)\, d w\,, \quad J_2 = 2 \int_{\frac{u}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{u}{2}} \frac{\sin (2 n + 1) w}{\sin w} f(2 w - u)\, d w \,.$$

Unter der Voraussetzung $0 < u < \pi$ zerlegen wir weiter

$$J_1 = 2\int\limits_{-\frac{u}{2}}^{0} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w+u)\,dw + 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}-\frac{u}{2}} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w+u)\,dw \quad .$$

Für das zweite Integral ergibt sich nach 1) sofort

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}-\frac{u}{2}} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w+u)\,dw = \frac{\pi}{2} f(u) \quad .$$

Im ersten ersetzen wir w durch $-w$ und erhalten

$$\lim \int\limits_{-\frac{u}{2}}^{0} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w+u)\,dw = \lim \int\limits_{0}^{\frac{u}{2}} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(u-2w)\,dw = \frac{\pi}{2} f(u) \;.$$

Folglich ist

$$3) \qquad J_1 = 2\pi f(u) \quad .$$

Wird $f(u)$ für einen Wert von u diskontinuierlich, so ist, wie man aus den beiden Bestandteilen von J_1 sofort erkennt, für diesen Wert von u

$$J_1 = \pi[f(u-0) + f(u+0)] \quad ,$$

wenn man mit $f(u-0)$ und $f(u+0)$ die Grenzwerte bezeichnet, welche $f(u-x)$ und $f(u+x)$ erreichen, wenn die positive Zahl x zur Grenze Null abnimmt.

Für $u = 0$ fallen die Grenzen des ersten Teiles von J_1 zusammen, derselbe verschwindet daher und es bleibt

$$J_1 = \pi f(+0)\,, \quad \text{wenn} \quad u = 0 \quad .$$

Für $u = \pi$ fallen die Grenzen des zweiten Teils zusammen und es wird daher

$$J_1 = \pi f(\pi - 0)\,, \quad \text{wenn} \quad u = \pi \quad .$$

Das Integral J_2 verschwindet nach 2), sobald

$$0 < u < \pi \quad ;$$

ist $u = 0$, so ergibt sich

$$J_2 = \pi f(+0) \quad .$$

Der Fall $u = \pi$ bedarf aber noch einer besondern Untersuchung. In diesem Falle ist

$$J_2 = 2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w-\pi)\,dw \quad .$$

Setzt man nun $w = \pi - x$, so erhält man

$$J_2 = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(\pi - 2x)\,dx \quad .$$

Daher ist

$$4) \qquad \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w-\pi)\,dw = \frac{\pi}{2} f(\pi) \quad .$$

Sollte $f(u)$ an der Stelle $u = \pi$ diskontinuierlich sein, so hat man, wie aus der Herleitung sofort erkannt wird, für $f(\pi)$ in dieser Gleichung den Grenzwert $f(\pi - 0)$ zu nehmen.

Führt man diese Ergebnisse in Nr. 5, 7) und 8) ein, so erhält man schließlich die beiden Sätze*): Die periodische unendliche Reihe

$$A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + A_3 \cos 3u + \ldots,$$

in welcher

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(v)\,dv, \quad A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(v)\cos kv\,dv \quad ,$$

und $f(v)$ eine innerhalb der Integrationsgrenzen 0 und π endliche Funktion ist, hat für jeden Wert von u von 0 bis π einschließlich beider Grenzen die Summe $f(u)$, sobald $f(u)$ stetig ist; zeigt $f(u)$ Unstetigkeiten, so daß für einen (oder einige) Werte von u die Grenzwerte $f(u-0)$ und $f(u+0)$ voneinander verschieden sind, so ergibt für diese Werte von u die Summe der Reihe das arithmetische Mittel dieser beiden Grenzwerte.

Die periodische unendliche Reihe

$$B_1 \sin u + B_2 \sin 2u + B_3 \sin 3u + \ldots,$$

in welcher

$$B_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(v)\sin kv\,dv \quad ,$$

und $f(v)$ eine innerhalb 0 und π endliche Funktion ist, hat für jeden Wert von u von 0 bis π, ausschließlich beider Grenzen, den Wert $f(u)$, sobald $f(u)$ stetig ist; an Unstetigkeitsstellen ergibt sie das arithmetische Mittel aus $f(u-0)$ und $f(u+0)$; für die Grenzen $u = 0$ und $u = \pi$ verschwindet die Reihe.

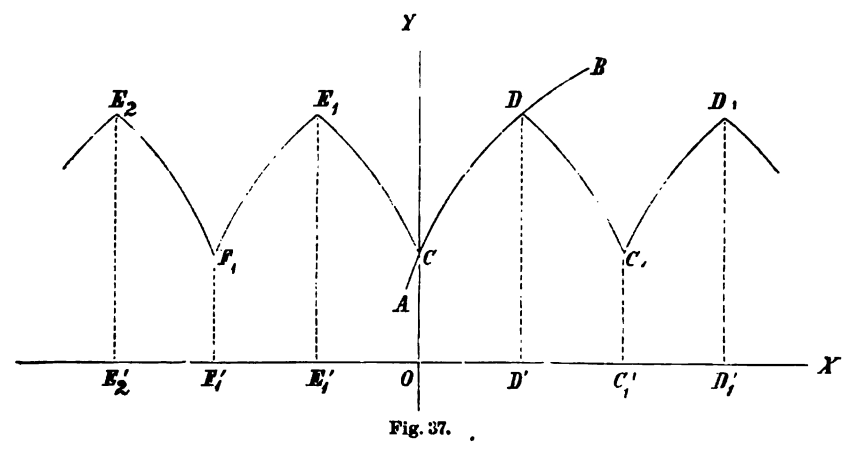


Fig. 37.

Durchläuft u die Werte von π bis 2π, so nimmt die Cosinusreihe in umgekehrter Reihenfolge dieselben Werte, die Sinusreihe die entgegengesetzt gleichen an, wie von 0 bis π; innerhalb der Strecken für u von 2π bis 4π, 4π bis 6π u. s. w., sowie -6π bis 0, -4π bis -2π, -6π bis -4π u. s. w. wiederholen beide Reihen die Werte für die Strecke von 0 und 2π.

Ist AB die Kurve $y = f(x)$ (Fig. 37) und

$$OD' = D'C_1' = C_1'D_1' + \ldots = E_1'O = F_1'E_1' = E_2'F_1' = \ldots = \pi \quad ,$$

*) LEJEUNE-DIRICHLET, Crelle, Bd. 4, S. 94. SCHLOEMILCH, Kompendium, 2. Bd., 2. Aufl., S. 123.

so fällt die Kurve

$$Y = A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + A_3 \cos 3u + \ldots$$

innerhalb der Punkte C und D mit der Kurve AB zusammen; ihr weiterer Verlauf besteht aus den Bogen DC_1, C_1D_1, $D_1C_2 \ldots$, CE_1, E_1F_1, $F_1E_2 \ldots$, von denen je zwei benachbarte zu der gemeinsamen Ordinate symmetrisch liegen.

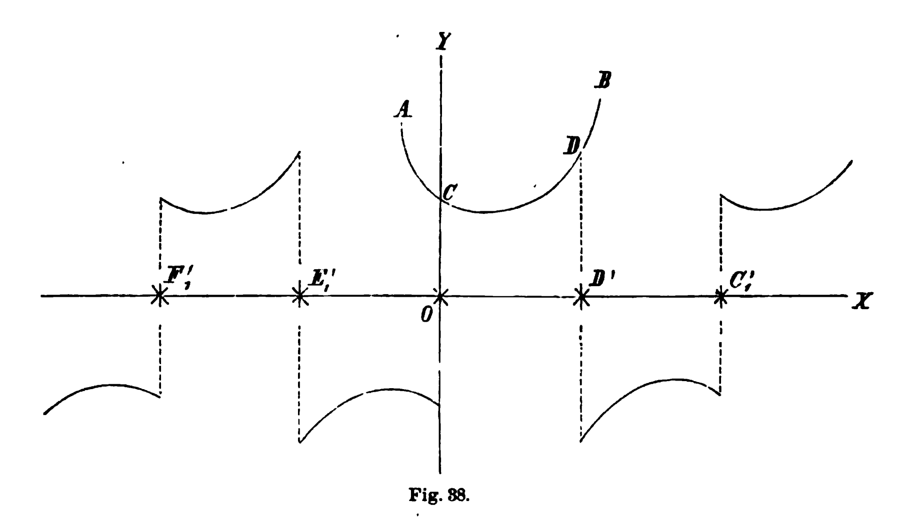


Fig. 38.

Die Kurve (Fig. 38)

$$Y = B_1 \sin u + B_2 \sin 2u + B_3 \sin 3u + \ldots$$

fällt innerhalb der Punkte C und D ebenfalls mit AB zusammen, hat aber in O und D' zwei einzelne Punkte, ebenso in C_1', D_1', $C_2' \ldots$, sowie in E_1', F_1', $E_2' \ldots$ Die zu OD', $D'C_1'$, $C_1'D_1' \ldots$ OE_1, $E_1'F_1' \ldots$ gehörenden Kurvenbogen decken sich ohne vorherige Umwendung und liegen abwechselnd auf verschiedenen Seiten der Abscissenachse.

10. Ehe wir zu Anwendungen übergehen, wollen wir noch in Kürze entscheiden, ob, bezw. unter welchen Umständen es gestattet ist, aus den beiden Gleichungen

$$1) \qquad f(u) = A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + \ldots$$

$$2) \qquad f(u) = B_1 \sin u + B_2 \sin 2u + \ldots$$

durch Differentiation beider Seiten neue Gleichungen abzuleiten.

Die Differentiation der Cosinusreihe ergibt

$$f'(u) = -A_1 \sin u - 2A_2 \sin 2u - 3A_3 \sin 3u - \ldots$$

Soll diese Gleichung gelten, so muß $f'(u)$ in eine Sinusreihe entwickelt werden können; es muß daher $f'(u)$ endlich sein von 0 bis π und die Koeffizienten müssen die Werte haben

$$3) \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f'(v) \sin kv \, dv = -k A_k \quad .$$

Durch teilweise Integration erhält man

$$\int f'(v) \sin kv \, dv = f(v) \sin kv - k \int f(v) \cos kv \, dv \quad .$$

Werden die Integrale von 0 bis π erstreckt, so folgt

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f'(v)\sin kv\,dv = -\frac{2k}{\pi}\int_0^\pi f(v)\cos kv\,dv \quad .$$

Es ist daher in der Tat die Gleichung 3) erfüllt. Die beiden Seiten der Gleichung 1) dürfen daher differentiiert werden, sobald $f'(u)$ innerhalb der Strecke von 0 bis π endlich bleibt.

Aus der Sinusreihe erhält man

$$f'(u) = B_1\cos u + 2B_2\cos 2u + 3B_3\cos 3u + \dots$$

Es muß daher $f'(u)$ in eine Cosinusreihe entwickelbar sein, deren erstes Glied verschwindet. Dazu gehört, daß $f(u)$ von 0 bis π endlich bleibt, daß das Integral, welches das erste Glied der Reihe ergibt,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f'(u)\,du$$

verschwindet, und daß

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f'(u)\cos ku\,du = kB_k \quad .$$

Aus der Bedingung

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f'(u)\,du = \frac{1}{\pi}[f(\pi) - f(0)] = 0$$

ergibt sich $f(\pi) = f(0)$.

Das die übrigen Koeffizienten bestimmende Integral ergibt durch teilweise Integration

$$\int f'(u)\cos ku\,du = f(u)\cos ku + k\int f(u)\sin ku\,du \quad ,$$

mithin ist

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f'(u)\cos ku\,du = \frac{2}{\pi}[f(\pi)\cos k\pi - f(0)] + kB_k \quad .$$

Die beiden Seiten der Sinusreihe darf man also nur dann differentiieren, wenn $f'(u)$ innerhalb der Grenzen 0 und π endlich ist, und wenn $f(\pi) = f(0) = 0$.

11. Entwicklung einiger Funktionen in periodischen Reihen.

A) Durch die Sinusreihe kann eine konstante Größe dargestellt werden. Setzt man $f(x) = 1$, so erhält man

$$B_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin kv\,dv = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-\cos k\pi}{k} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } k \text{ gerade,} \\ \dfrac{4}{\pi k}, & \text{wenn } k \text{ ungerade,} \end{cases}$$

und daher

$$\frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} \dots, \qquad 0 < x < \pi \quad .$$

Für $x = \frac{\pi}{2}$ erhält man hieraus die LEIBNIZsche Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \quad .$$

B) Für die Entwicklung von $f(x) = x$ nach der Cosinusreihe ergibt sich

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{\pi}{2} \quad ,$$

$$A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2}\right]_0^\pi \quad ,$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-\cos k\pi}{k^2} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } k \text{ gerade,} \\ \frac{4}{\pi k^2}, & \text{wenn } k \text{ ungerade;} \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \cdots\right) \quad .$$

Hierfür kann man setzen

$$\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \cdots$$

$$0 < x < \pi \quad .$$

An den Grenzen der Gültigkeit, für $x = 0$ und $x = \pi$ erhält man gleichmäßig

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

Setzt man $f(x) = x$ in die Sinusreihe ein, so entsteht

$$B_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2}\right]_0^\pi \quad ,$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{k}, & \text{wenn } k \text{ ungerade} \quad , \\ -\frac{2}{k}, & \text{wenn } k \text{ gerade} \quad . \end{cases}$$

Daher hat man

$$\frac{1}{2}x = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} - \cdots$$

Ersetzt man hier x durch $-x$, so wechseln beide Seiten der Gleichung das Vorzeichen; die Gleichung gilt also ebensoweit für negative x, wie für positive, und hat daher die Gültigkeitsgrenzen

$$-\pi < x < \pi \quad .$$

Wir bemerken, daß dieselben Gültigkeitsgrenzen der Sinusreihe für jede Funktion von x bestehen, die für $x = 0$ verschwindet und mit x das Vorzeichen wechselt.

C) Setzt man in der Cosinusreihe $f(x) = \cos\mu x$, wobei μ keine ganze Zahl bezeichnen mag, so ist

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\mu x\,dx = \frac{\sin\mu\pi}{\mu\pi} \quad ,$$

$$A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\mu x \cos kx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos(k+\mu)x + \cos(k-\mu)x]\, dx \quad ,$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(k+\mu)x}{k+\mu} + \frac{\sin(k-\mu)x}{k-\mu}\right]_0^\pi = (-1)^{k+1}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\mu\sin\mu\pi}{k^2-\mu^2} \quad .$$

Daher ergibt sich

$$\frac{\pi}{2\mu}\cdot\frac{\cos\mu x}{\sin\mu\pi} = \frac{1}{2\mu^2} + \frac{\cos x}{1^2-\mu^2} - \frac{\cos 2x}{2^2-\mu^2} + \frac{\cos 3x}{3^2-\mu^2} - \cdots$$

$$0 \leq x \leq \pi \quad .$$

D) Um $f(x) = \sin\mu x$ in eine Sinusreihe zu entwickeln, hat man

$$B_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\mu x \sin kx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos(k-\mu)x - \cos(k+\mu)x]\, dx \quad ,$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(k-\mu)x}{k-\mu} - \frac{\sin(k+\mu)x}{k+\mu}\right]_0^\pi = (-1)^{k+1}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{k\sin\mu\pi}{k^2-\mu^2} \quad .$$

Mithin ist

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin\mu x}{\sin\mu\pi} = \frac{\sin x}{1^2-\mu^2} - \frac{2\sin 2x}{2^2-\mu^2} + \frac{3\sin 3x}{3^2-\mu^2} - \frac{5\sin 5x}{5^2-\mu^2} + \cdots$$

Macht man in C) und D) die Ersetzungen $x = 0$, $x = \pi$ und $x = \frac{1}{2}\pi$, so entsteht

$$\frac{\pi}{2\mu}\cdot\frac{1}{\sin\mu\pi} = \frac{1}{2\mu^2} + \frac{1}{1^2-\mu^2} - \frac{1}{2^2-\mu^2} + \frac{1}{3^2-\mu^2} - \cdots$$

$$\frac{1}{2\mu^2} - \frac{\pi}{2\mu}\cdot\cot\mu\pi = \frac{1}{1^2-\mu^2} + \frac{1}{2^2-\mu^2} + \frac{1}{3^2-\mu^2} + \cdots$$

$$\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\mu\pi} = \frac{1}{1^2-\mu^2} - \frac{3}{3^2-\mu^2} + \frac{5}{5^2-\mu^2} - \frac{7}{7^2-\mu^2} + \cdots \quad ,$$

die für jeden Wert von μ gelten.

E) Für die Funktion $x\sin x$ hat man

$$\int_0^\pi x\sin x\cos kx\, dx = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi x\sin(k+1)x\, dx - \tfrac{1}{2}\int_0^\pi x\sin(k-1)x\, dx \quad ,$$

$$\int_0^\pi x\sin(k\pm1)x\, dx = \left[\frac{-x\cos(k\pm1)x}{k\pm1} + \frac{\sin(k\pm1)x}{(k\pm1)^2}\right]_0^\pi \quad ,$$

also

$$\int_0^\pi x\sin x\cos kx\, dx = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{k^2-1} \quad .$$

Auf den Fall $k = 1$ ist diese Formel nicht anwendbar; man findet hier direkt

$$\int_0^\pi x\sin x\cos x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi x\sin 2x\, dx = -\frac{\pi}{4} \quad .$$

Fügt man hierzu noch

$$\int_0^\pi x \sin x \, dx = \pi \quad ,$$

so gewinnt man die Entwicklung

$$\frac{1}{2} x \sin x = \frac{1}{2} - \frac{\cos x}{4} - \frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 3x}{2 \cdot 4} - \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \cdots$$

Die beiden Seiten dieser Gleichung ändern sich nicht, wenn x das Vorzeichen wechselt; daher gilt diese Entwicklung zwischen den Grenzen

$$-\pi \leq x \leq \pi \quad .$$

Dieselben Gültigkeitsgrenzen für die Cosinusreihe treten für jede Funktion ein, die für entgegengesetzt gleiche x gleiche Werte hat.

F) Bekanntlich ist (§ 5, Nr. 10)

$$\int e^{\mu x} \cos k x \, dx = \frac{e^{\mu x}}{\mu^2 + k^2} (\mu \cos k x + k \sin k x) + C \quad ,$$

$$\int e^{\mu x} \sin k x \, dx = \frac{e^{\mu x}}{\mu^2 + k^2} (\mu \sin k x - k \cos k x) + C \quad .$$

Daher hat man

$$\int_0^\pi e^{\mu x} \cos k x \, dx = \frac{\mu}{\mu^2 + k^2} (e^{\mu \pi} \cos k \pi - 1) \quad ,$$

$$\int_0^\pi e^{-\mu x} \cos k x \, dx = - \frac{\mu}{\mu^2 + k^2} (e^{-\mu \pi} \cos k \pi - 1) \quad ,$$

$$\int_0^\pi e^{\mu x} \sin k x \, dx = \frac{k}{\mu^2 + k^2} (1 - e^{\mu \pi} \cos k \pi) \quad ,$$

$$\int_0^\pi e^{-\mu x} \sin k x \, dx = \frac{k}{\mu^2 + \pi^2} (1 - e^{-\mu \pi} \cos k \pi) \quad .$$

Mit Hilfe dieser Integrale erhält man leicht die beiden Entwicklungen

$$\frac{\pi}{2\mu} \cdot \frac{e^{\mu x} + e^{-\mu x}}{e^{\mu \pi} - e^{-\mu \pi}} = \frac{1}{2\mu^2} - \frac{\cos x}{1^2 + \mu^2} + \frac{\cos 2x}{2^2 + \mu^2} - \frac{\cos 3x}{3^2 + \mu^2} + \cdots$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\mu x} - e^{-\mu x}}{e^{\mu \pi} - e^{-\mu \pi}} = \frac{\sin x}{1^2 + \mu^2} - \frac{2 \sin 2x}{2^2 + \mu^2} + \frac{3 \sin 3x}{3^2 + \mu^2} - \cdots$$

12. Es ist nicht nötig, daß die Funktion $f(x)$, die in eine Cosinus- bezw. Sinusreihe verwandelt wird, innerhalb des ganzen Intervalles 0 und π nach demselben Gesetze gebildet sei; man kann vielmehr die Kurve *CD* (Fig. 37 und 38) aus einzelnen Stücken zusammensetzen, deren jedes einer andern Gleichung entspricht. Gilt

von	0	bis	x_1	die Funktion	$f_1(x)$,
„	x_1	„	x_2	„ „	$f_2(x)$,
„	x_2	„	x_3	„ „	$f_3(x)$,
.	. .	.	. .	. . .	. . .
„	x_{r-1}	„	π	„ „	$f_r(x)$,

so hat man jedes bei der Berechnung der Koeffizienten $A_0 A_1 A_2 \ldots B_1 B_2 \ldots$ vorkommende von 0 bis π erstreckte Integral in folgender Weise zu zerlegen

$$\int_0^\pi f(x)\cos kx\,dx = \int_0^{x_1} f_1(x)\cos kx\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f_2(x)\cos kx\,dx + \int_{x_2}^{x_3} f_3(x)\cos kx\,dx + \ldots + \int_{x_{r-1}}^{\pi} f_r(x)\cos kx\,dx$$

und die einzelnen Teilintegrale zu berechnen.

Um hierfür ein einfaches Beispiel zu haben, wollen wir annehmen, es soll für $x = 0$ bis $x = \frac{1}{2}\pi$ eine beliebige, endlich bleibende Funktion $\varphi(x)$ und von $\frac{1}{2}\pi$ bis π die Funktion $\varphi(\pi - x)$ gelten; für $x = \frac{1}{2}\pi$ ergeben beide Funktionen den gemeinsamen Wert $\varphi(\frac{1}{2}\pi)$, so daß an der Übergangsstelle keine Unstetigkeit eintritt. Für die Entwicklung in eine Sinusreihe hat man

$$B_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)\sin kx\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi(\pi - x)\sin kx\,dx \quad .$$

Setzt man im zweiten Integrale $\pi - x = \xi$, so erhält man

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi(\pi - x)\sin kx\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\xi)\sin k(\pi - \xi)\,d\xi = -\cos k\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\xi)\sin k\xi\,d\xi \quad .$$

Da bei bestimmten Integralen auf die Bezeichnung der Veränderlichen nichts ankommt, so kann man hier ξ wieder durch x ersetzen, und erhält

$$B_k = \begin{cases} 0\,, & \text{wenn } k \text{ gerade}\,, \\ \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)\sin kx\,dx\,, & \text{wenn } k \text{ ungerade} \quad . \end{cases}$$

Daher hat man die Entwicklung

$$\varphi(x) = B_1 \sin x + B_3 \sin 3x + B_5 \sin 5x + \ldots \quad ,$$

wobei

$$B_k = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)\sin kx\,dx \quad ,$$

und x auf den Spielraum von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ angewiesen ist.

Setzt man $\varphi(x) = x$, so erhält man

$$B_{2k+1} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2k+1)x\,dx = \frac{4}{\pi}\left[-\frac{x\cos(2k+1)x}{2k+1} + \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(2k+1)\pi}{(2k+1)^2} \quad .$$

Daher hat man in Übereinstimmung mit Nr. 9, B)

$$\frac{\pi}{4}\cdot x = \sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \ldots, \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad .$$

13. Nimmt man ferner von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ die Funktion $\varphi(x) = x^2$ von $\frac{1}{2}\pi$ bis π aber $\varphi(x) = 0$, so hat die Kurve CD an der Stelle $x = \frac{1}{2}\pi$ eine Unterbrechung der Stetigkeit, es ist nämlich

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi^2}{4}, \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = 0 \quad .$$

Entwickelt man für diese Funktion die Cosinusreihe, so erhält man, da die von $\frac{1}{2}\pi$ bis π erstreckten Teile der Koeffizientenintegrale wegen $\varphi(x) = 0$ verschwinden

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,dx = \frac{\pi^2}{24} \quad ,$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot A_k = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos kx\,dx = \left[\frac{x^2 \sin kx}{k}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{k}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin kx\,dx \quad ,$$

$$= \left[\frac{x^2 \sin kx}{k} + \frac{2x\cos kx}{k^2} - \frac{2\sin kx}{k^3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{k^2\pi^2 - 8}{4k^3}\sin\dfrac{k\pi}{2}, & \text{wenn } k \text{ ungerade,} \\[2ex] \dfrac{\pi}{k^2}\cos\dfrac{k\pi}{2}, & \text{wenn } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Daher hat man die von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ gültige Reihe

$$x^2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{12} + \cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \dots\right)$$
$$- \frac{4}{\pi}\left(\cos x - \frac{\cos 3x}{3^3} + \frac{\cos 5x}{5^3} - \frac{\cos 7x}{7^3} + \dots\right)$$
$$- 2\left(\frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \frac{\cos 6x}{6^2} - \frac{\cos 8x}{8^2} + \dots\right) \quad .$$

Setzen wir zur Prüfung dieser Entwicklung auf der rechten Seite $x = \frac{1}{2}\pi$, so muß sich das arithmetische Mittel aus $\varphi(\frac{1}{2}\pi - 0)$ und $\varphi(\frac{1}{2}\pi + 0)$, d. i. $\frac{1}{8}\pi^2$ ergeben. Wir erhalten, da die Cosinus aller ungeraden Vielfachen von $\frac{1}{2}\pi$ verschwinden,

$$\frac{\pi^2}{24} + 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots\right) \quad .$$

Die eingeklammerte Reihe ist der vierte Teil von

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Bezeichnet man diese Summe mit S, so hat man

$$S = \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots\right) \quad .$$

Der erste Teil der rechten Seite ist $\frac{1}{8}\pi^2$ (Nr. 9, B)); der zweite ist $\frac{1}{4}S$; daher hat man

$$\frac{3}{4}S = \frac{1}{8}\pi^2 \quad ,$$

folglich ist

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

Mithin ergibt sich in der Tat

$$\frac{\pi^2}{24} + 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots\right) = \frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{8} \quad .$$

14. Durch eine einfache Änderung kann man aus den Reihen

1) $\quad f(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots$

2) $\quad f(x) = B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \dots$

neue periodische Reihen ableiten, deren Gültigkeit nicht auf das Gebiet 0 bis π beschränkt ist.

Setzt man in einer für $0 < x < a$ endlichen Funktion $\varphi(x)$

$$x = \frac{ay}{\pi} \quad ,$$

so erhält man

$$\varphi\left(\frac{ay}{\pi}\right) \quad ,$$

und diese Funktion von y ist endlich von $y = 0$ bis $y = \pi$. Man kann sie daher nach 1) und 2) entwickeln und erhält

3) $\quad \varphi\left(\frac{ay}{\pi}\right) = A_0 + A_1 \cos y + A_2 \cos 2y + \dots, \quad 0 < y < \pi \quad ,$

4) $\quad \varphi\left(\frac{ay}{\pi}\right) = B_1 \sin y + B_2 \sin 2y + B_3 \sin 3y + \dots, \quad 0 < y < \pi \quad .$

Die Koeffizienten haben hier die Werte

5) $\quad A_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \varphi\left(\frac{ay}{\pi}\right), \quad A_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \varphi\left(\frac{ay}{\pi}\right) \cos ky\, dy\,, \quad B_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \varphi\left(\frac{ay}{\pi}\right) \sin ky\, dy \quad .$

Setzt man nun in 3), 4) und 5) wieder x für y, so erhält man die Reihen

6) $$\begin{cases} \varphi(x) = A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{a} + A_2 \cos\frac{2\pi x}{a} + A_3 \cos\frac{3\pi x}{a} + \dots, \\ 0 \leq x \leq a\,, \quad A_0 = \frac{1}{a}\int\limits_0^a \varphi(x)\,dx\,, \quad A_k = \frac{2}{a}\int\limits_0^a \varphi(x)\cos\frac{k\pi x}{a}\,dx \quad ; \end{cases}$$

7) $$\begin{cases} \varphi(x) = B_1 \sin\frac{\pi x}{a} + B_2 \sin\frac{2\pi x}{a} + B_3 \sin\frac{3\pi x}{a} + \dots, \\ 0 < x < a\,, \quad B_k = \frac{2}{a}\int\limits_0^a \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx \quad . \end{cases}$$

15. Ist $F(x)$ eine beliebige, von $x = 0$ bis $x = a$ endliche Funktion, so teilt die Funktion $F(x) + F(-x)$ diese Eigenschaft und nimmt für entgegengesetzt gleiche Werte von x gleiche Werte an; da die letztere Eigenschaft auch der Cosinusreihe 6) zukommt, so gilt für diese Funktion die Reihe 6) auch noch zwischen den Grenzen 0 und $-a$. Für die Koeffizienten findet sich

$$A_0 = \frac{1}{a}\int_0^a F(x)\,dx + \frac{1}{a}\int_0^a F(-x)\,dx \quad ,$$

$$A_k = \frac{2}{a}\int_0^a F(x)\cos\frac{k\pi x}{a}\,dx + \frac{2}{a}\int_0^a F(-x)\cos\frac{k\pi x}{a}\,dx \quad .$$

Ersetzt man in den $F(-x)$ enthaltenden Integralen x durch $-x$, so erhält jedes die Grenzen 0 und $-a$ und läßt sich mit dem vorhergehenden vereinigen; es entsteht

$$A_0 = \frac{1}{a}\int_{-a}^a F(x)\,dx\,, \quad A_k = \frac{2}{a}\int_{-a}^a F(x)\cos\frac{k\pi x}{a}\,dx \quad .$$

Für diese Werte der Koeffizienten ist also

$$1) \qquad F(x) + F(-x) = A_0 + A_1\cos\frac{\pi x}{a} + A_2\cos\frac{2\pi x}{a} + \dots$$

$$-a < x \leq a \quad .$$

Die Funktion $F(x) - F(-x)$ verschwindet für $x = 0$ und wechselt mit x das Zeichen. Entwickelt man sie daher nach Nr. 12, 7), so gilt die Reihe von $-a$ bis $+a$. Für die Koeffizienten ergibt sich

$$B_k = \frac{2}{a}\int_0^a F(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx - \frac{2}{a}\int_0^a F(-x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx = \frac{2}{a}\int_{-a}^a F(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx \quad .$$

Bei diesen Werten der Koeffizienten ist

$$2) \qquad F(x) - F(-x) = B_1\sin\frac{\pi x}{a} + B_2\sin\frac{2\pi x}{a} + B_3\sin\frac{3\pi x}{a} + \dots$$

$$-a < x < a \quad .$$

Nimmt man die halbe Summe der Gleichungen 1) und 2), so erhält man schließlich

$$3) \qquad \begin{cases} F(x) = A_0 + A_1\cos\frac{\pi x}{a} + A_2\cos\frac{2\pi x}{a} + A_3\cos\frac{3\pi x}{a} + \dots \\ \qquad + B_1\sin\frac{\pi x}{a} + B_2\sin\frac{2\pi x}{a} + B_3\sin\frac{3\pi x}{a} + \dots \end{cases}$$

$$-a < x < a \quad ,$$

wobei die Koeffizienten die Werte haben

$$A_0 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^a F(x)\,dx\,, \quad A_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^a F(x)\cos\frac{k\pi x}{a}\,dx\,, \quad B_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^a F(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx \quad .$$

Da man für a beliebig große Werte nehmen kann, so folgt, daß jede Funktion innerhalb eines beliebig großen Gebietes durch eine periodische Cosinus-

Sinus-Reihe von der Form 3) dargestellt werden kann, wenn sie nur innerhalb dieses Gebietes endlich bleibt.

Soll eine gegebene Funktion $f(x)$ für alle zwischen $-a$ und a liegenden Werte der Veränderlichen durch die Reihe 3) dargestellt werden, so ist nur eine solche Darstellung möglich; wenn dagegen die Forderung gestellt wird, daß die Reihe 3) nur auf der Strecke von b bis c mit $f(x)$ übereinstimmen soll, wobei $-a < b < c < a$, so kann man unzählig viele Entwicklungen angeben; denn man kann dann für die Gebiete außerhalb bc die bei b und c abgebrochene Funktion $f(x)$ durch beliebige endlich bleibende Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ fortsetzen (vgl. Nr. 10).

16. Die in Nr. 12 entwickelten Reihen gestatten eine wertvolle Anwendung auf die Umkehrung der Funktionen*).

Hierbei kommt es darauf an, y aus der Gleichung $x = \varphi(y)$ als Funktion von x, oder allgemeiner irgend eine Funktion $F(y)$ als Funktion von x auszudrücken.

Da $F(y)$ eine Funktion von x ist, so läßt sich $F(y)$ innerhalb gewisser Grenzen durch eine Cosinusreihe ausdrücken

$$1) \qquad F(y) = A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{a} + A_2 \cos\frac{2\pi x}{a} + A_3 \cos\frac{3\pi x}{a} + \dots$$

$$0 < x < a \quad .$$

Die Koeffizienten sind

$$A_0 = \frac{1}{a}\int_0^a F(y)\,dx\,, \quad A_k = \frac{2}{a}\int_0^a F(y)\cos\frac{k\pi x}{a}\,dx \quad .$$

Durch teilweise Integration folgt hieraus zunächst

$$A_0 = \frac{1}{a}\Big[x F(y)\Big]_0^a - \frac{1}{a}\int_{y_0}^{y_1} x F'(y)\,dy \quad ,$$

$$A_k = \frac{2}{k\pi}\left[F(y)\sin\frac{k\pi x}{a}\right]_0^a - \frac{2}{k\pi}\int_{y_0}^{y_1} F'(y)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dy \quad ,$$

wenn $x = 0$ und a die Werte $y = y_0$ und y_1 entsprechen; hieraus folgt weiter

$$2) \qquad A_0 = F(y_1) - \frac{1}{a}\int_{y_0}^{y_1}\varphi(y)F'(y)\,dy\,, \quad A_k = -\frac{2}{k\pi}\int_{y_0}^{y_1} F'(y)\sin\frac{k\pi\varphi(y)}{a}\,dy \quad .$$

Betreffs der Integrationsgrenzen ist hier folgendes zu bemerken. Die nach x genommenen Koeffizientenintegrale waren von 0 bis zu der positiven Zahl a erstreckt, und es war dabei vorausgesetzt, daß x von 0 bis a stetig wachse. Will man nun x durch y ersetzen, so hat man zunächst die Gleichung

$$0 = \varphi(y)$$

aufzulösen; eine reale Wurzel β dieser Gleichung ist dann die der Grenze $x = 0$ entsprechende Grenze für y. Im allgemeinen wechselt $\varphi(y)$ das Zeichen, wenn y durch den Wert β hindurchgeht; damit nun x von 0 bis zu der noch unbestimmten obern Integralgrenze wachse, muß man y vom Werte $y = \beta$ zunehmen oder abnehmen lassen, je nachdem $\varphi(y)$ von $\varphi(\beta) = 0$ aus mit y zugleich wächst oder nicht, und darf die Integration nach y nicht weiter ausdehnen, als bis zu einem

*) SCHLOEMILCH, Kompendium, 2. Bd., 2. Aufl., S. 152.

solchen Werte von y, für welchen das Wachstum von $\varphi(y)$ in eine Abnahme übergeht, d. i. bis zu dem Werte $y = \beta_1$, welchem das dem Werte β der Veränderlichen y zunächst liegende Maximum der Funktion $\varphi(y)$ zugehört. Somit ist also die obere Grenze a der Reihe 1) nicht ganz willkürlich, sondern a darf nicht größer sein als $\varphi(\beta_1)$.

Ist nun b eine zwischen β und β_1 liegende Zahl, so hat man in den obigen Formeln a, y_0, y_1 durch $\varphi(b)$, β, b zu ersetzen und gewinnt mithin

$$F(y) = A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{\varphi(b)} + A_2 \cos\frac{2\pi x}{\varphi(b)} + \ldots$$

$$0 \leq x \leq \varphi(b) \quad .$$

$$A_0 = F(b) - \frac{1}{\varphi(b)}\int_\beta^b F'(y)\,\varphi(y)\,dy\,, \quad A_k = -\frac{2}{k\pi}\int_\beta^b F'(y)\sin\frac{k\pi\,\varphi(y)}{\varphi(b)}\,dy \quad .$$

Zu jeder realen Wurzel β der Gleichung

$$\varphi(y) = 0$$

erhält man hiernach eine besondere Umkehrungsreihe; die Gültigkeitsgebiete dieser Reihen in Bezug auf y schließen einander aus.

Für die Grenzbestimmungen wollen wir ein Beispiel geben. Wir wählen hierzu die Aufgabe, aus der Gleichung

$$x = y\,e^{-y}$$

y durch x auszudrücken.

Die Funktion $y\,e^{-y}$ verschwindet für $y = 0$ und für $y = \infty$. Zur Bestimmung der größten und kleinsten Werte ist die Gleichung aufzulösen

$$e^{-y} - y\,e^{-y} = 0 \quad .$$

Sie liefert $y = 1$; das zugehörige Maximum von x ist $1 : e$. Man kann daher eine Umkehrung für das Gebiet $y = 0$ bis $y = 1$, und eine zweite für $y = \infty$ bis $y = 1$ entwickeln.

Für die erste erhält man

$$y = A_0 + A_1 \cos\pi e x + A_2 \cos 2\pi e x + \ldots$$

$$0 < x \leq \frac{1}{e} \quad ,$$

$$A_0 = 1 - e\int_0^1 y e^{-y}\,dy\,, \quad A_k = -\frac{2}{k\pi}\int_0^1 \sin(k\pi e y\,e^{-y})\,dy \quad .$$

Für die zweite Umkehrung ist $\beta = \infty$; um die Gültigkeit möglichst weit zu erstrecken, wollen wir $b = 1$ nehmen. Dann haben wir, wenn wir für die jetzt dargestellte Wertfolge das Zeichen Y verwenden,

$$Y = A_0 + A_1 \cos\pi e x + A_2 \cos 2\pi e x + \ldots$$

$$0 < x < \frac{1}{e} \quad ,$$

$$A_0 = 1 + e\int_1^\infty y e^{-y}\,dy\,, \quad A_k = \frac{2}{k\pi}\int_1^\infty \sin(k\pi e y\,e^{-y})\,dy \quad .$$

Die Integrale zur Bestimmung der Koeffizienten können hier wie in den meisten Anwendungen der Umkehrungsreihen nur durch unendliche Reihen berechnet werden.

Man kann auch mit Hilfe der Sinusreihe das Umkehrungsproblem lösen; die Entwicklung bietet keine neuen Schwierigkeiten; wir sehen daher davon ab, sie hier mitzuteilen*).

---

17. Die für jede zwischen $x = -a$ und $+a$ endliche Funktion $F(x)$ gültige Gleichung

$$1)\quad\left\{\begin{aligned} F(x) &= A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{a} + A_2\cos\frac{2\pi x}{a} + A_3\cos\frac{3\pi x}{a} + \dots \\ &\quad + B_1\sin\frac{\pi x}{a} + B_2\sin\frac{2\pi x}{a} + B_3\sin\frac{3\pi x}{a} + \dots \\ A_0 &= \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} F(t)\,dt\,,\quad A_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} F(t)\cos\frac{k\pi t}{a}\,dt\,,\quad B_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} F(t)\sin\frac{k\pi t}{a}\,dt\,, \end{aligned}\right.$$

kann man auch in der Form schreiben

$$F(x) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} F(t)\,dt + \sum_{1}^{\infty}{}_k \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} F(t)\left(\cos\frac{k\pi t}{a}\cos\frac{k\pi x}{a} + \sin\frac{k\pi t}{a}\sin\frac{k\pi x}{a}\right)dt\,,$$

$$= \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} F(t)\,dt + \sum_{1}^{\infty}{}_k \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} F(t)\cos\frac{k\pi}{a}(t-x)\,dt\quad.$$

Da die unter dem Summenzeichen stehende Funktion für entgegengesetzt gleiche k gleiche Werte hat, so hat man

$$\sum_{1}^{\infty} = \sum_{-\infty}^{-1}\quad;$$

man kann die Summe daher nach dem Schema zerlegen

$$\sum_{1}^{\infty} = \tfrac{1}{2}\sum_{1}^{\infty} + \tfrac{1}{2}\sum_{-\infty}^{-1}\quad.$$

Da ferner die hinter dem Integralzeichen stehende Funktion für $k = 0$ in $F(t)\,dt$ übergeht, so erhält man schließlich die Zusammenfassung

$$2)\qquad F(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}{}_k \frac{\pi}{a}\int_{-a}^{a} F(t)\cos k\frac{\pi}{a}(t-x)\,dt\quad.$$

Ist a eine sehr große Zahl, so werden die mit Cosinus multiplizierten Glieder der Reihe 1) nahezu konstant, während die Glieder des zweiten Teiles wegen der Sinus gegen den ersten Teil unbeträchtlich klein werden. Da nun die Reihe nach wie vor die Funktion $F(x)$ ausdrückt, so folgt, daß die Anzahl der Glieder, durch die man eine hinlängliche Annäherung erzielt, im Verhältnis zu a sehr groß sein muß. Läßt man in 2) die Zahl a unendlich wachsen, so hat man daher daran festzuhalten, daß die äußersten Grenzen für k zu dem unendlichen a ein unendlich großes Verhältnis haben.

---

*) SCHLOEMILCH, Kompendium, 2. Bd., 2. Aufl., S. 155.

Ist a unendlich, so ist $\pi : a$ unendlich klein. Bezeichnet man $k\pi : a$ durch u, so wächst u nach der über k soeben gemachten Bemerkung von $-\infty$ bis $+\infty$, die Größe $\pi : a$ ist ein verschwindend kleiner Teil von u und kann mit Δu bezeichnet werden.

Damit geht aus 2) hervor

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty}{}_u \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cos u (t - x)\, dt \right] \Delta u \quad .$$

Aus dem Begriffe des bestimmten Integrals folgt, daß man hierfür setzen kann

$$3) \qquad F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cos u (t - x)\, du\, dt \quad .$$

Hierbei gilt die von den periodischen Reihen her bekannte Beschränkung, daß $F(x)$ innerhalb des ganzen realen Gebietes nicht unendlich groß werden darf; ferner, daß das Doppelintegral

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cos u (t - x)\, dt\, du$$

für solche Werte von x, für welche $F(x - 0)$ von $F(x + 0)$ verschieden sind, das arithmetische Mittel dieser beiden Grenzwerte ergibt.

Wie bekannt, ist es nicht nötig, daß die Funktion $F(x)$ innerhalb des ganzen Intervalls von $-\infty$ bis ∞ immer dasselbe Gesetz befolgt; es steht vielmehr vollkommen frei, die Kurve

$$y = F(x)$$

aus ganz beliebig gewählten Teilen verschiedener Kurven zusammenzusetzen; dabei kann man nach Willkür die einzelnen Teile stetig zusammenhängen lassen, oder an den Übergangsstellen Unstetigkeiten anordnen.

Von besonderem Interesse ist es, die Funktion von $-\infty$ bis zu einer beliebigen Grenze $x = b$ konstant $= 0$ zu nehmen, von b bis β mit einer gegebenen Funktion $F(x)$ zusammenfallen zu lassen, und von $x = \beta$ bis $x = \infty$ wieder konstant $= 0$ vorauszusetzen. Das nach t genommene Integral in 3) verschwindet alsdann für die beiden Strecken von $-\infty$ bis b und von β bis ∞, und es bleibt

$$4) \qquad F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{b}^{\beta} F(t) \cos u (t - x)\, du\, dt \,, \qquad b < x < \beta \quad .$$

An den Grenzen b und β gilt 4) nicht mehr; es ist vielmehr, da hier die dargestellte Funktion unstetig ist,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{b}^{\beta} F(t) \cos u (t - b)\, du\, dt = \tfrac{1}{2} F(b) \quad ,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{b}^{\beta} F(t) \cos u (t - \beta)\, du\, dt = \tfrac{1}{2} F(\beta) \quad .$$

Für jedes x, das kleiner als b oder größer als β ist, hat man

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{b}^{\beta} F(t) \cos u (t - x)\, du\, dt = 0 \quad .$$

Die FOURIERschen Doppelintegrale*) 3) und 4) gewähren das hohe Interesse, daß sie willkürliche endlich bleibende Funktionen von x darstellen; und zwar 3) innerhalb des ganzen realen Gebietes, 4) innerhalb eines beliebig gewählten, während außerhalb desselben das Integral verschwindet.

18. Dieselben Betrachtungen, die wir im vorigen Abschnitte auf die Cosinus-Sinus-Reihe angewendet haben, sind auch für die Cosinusreihe und für die Sinusreihe verwendbar; leichter gelangen wir zu denselben Ergebnissen, wenn wir das Integral Nr. 17, 3) zum Ausgangspunkte nehmen. Wir ändern es zunächst zu

$$1)\qquad F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \left[\cos xu \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\cos ut\,dt + \sin ux \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\sin ut\,dt\right] .$$

Wir wollen nun für $F(x)$ innerhalb der Grenzen 0 bis ∞ eine willkürliche Funktion nehmen, für negative x aber die Funktion so fortsetzen, daß $F(-x) = F(x)$.

Unter dieser Voraussetzung ist

$$\int_{-\infty}^{0} F(t)\sin ut\,dt = -\int_{0}^{\infty} F(t)\sin ut\,dt , \quad \int_{-\infty}^{0} F(t)\cos ut\,dt = \int_{0}^{\infty} F(t)\cos ut\,dt$$

und daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\sin ut\,dt = 0 , \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\cos ut\,dt = 2\int_{0}^{\infty} F(t)\cos ut\,dt .$$

Demnach ist schließlich

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} F(t)\cos xu\cos ut\,du\,dt , \qquad 0 < x < \infty .$$

Da das Produkt $\cos xu\cos ut$ unverändert bleibt, wenn u das Zeichen wechselt, so kann man hierfür noch einfacher setzen

$$2)\qquad F(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} F(t)\cos xu\cos ut\,du\,dt , \qquad 0 < x < \infty .$$

Wählt man hier wieder die Funktion gleich Null von $x = 0$ bis $x = b$, willkürlich von b bis β, und gleich Null von β bis ∞, so erhält man

$$3)\qquad F(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{b}^{\beta} F(t)\cos xu\cos ut\,du\,dt , \qquad 0 < b < x < \beta .$$

Für die Grenzen ist

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{b}^{\beta} F(t)\cos bu\cos ut\,du\,dt = \tfrac{1}{2}F(b) , \quad \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{b}^{\beta} F(t)\cos \beta u\cos ut\,du\,dt = \tfrac{1}{2}F(\beta) ;$$

ist $0 < x < b$, oder $\beta < x$, so ist

$$\int_{0}^{\infty}\int_{b}^{\beta} F(t)\cos xu\cos ut\,d\,du = 0 .$$

*) FOURIER, Théorie analytique de la chaleur. Paris 1822.

19. Nimmt man $F(x)$ willkürlich für das Gebiet 0 bis ∞, setzt aber die Funktion für negative x so fort, daß $F(-x) = -F(x)$, so hat man

$$\int_{-\infty}^{0} F(t)\cos u t\,dt = -\int_{0}^{\infty} F(t)\cos u t\,dt\,, \quad \int_{-\infty}^{0} F(t)\sin u t\,dt = \int_{0}^{\infty} F(t)\sin u t\,dt \quad ,$$

und daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\cos u t\,dt = 0\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\sin u t\,dt = 2\int_{0}^{\infty} F(t)\sin u t\,dt \quad .$$

Die Gleichung Nr. 18, 1) ergibt daher

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} F(t)\sin x u \sin u t\,du\,dt\,, \quad 0 < x < \infty \quad .$$

Da das Produkt $\sin x u \sin u t$ für entgegengesetzt gleiche u gleiche Werte hat, so hat man einfacher

$$1)\qquad F(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} F(t)\sin x u \sin u t\,du\,dt\,, \quad 0 < x < \infty \quad .$$

Hierbei gelten für den Fall, daß $F(x)$ Unstetigkeiten hat, die bereits wiederholt gemachten Bemerkungen.

Nimmt man $F(x) = 0$ von $x = 0$ bis $x = b$, willkürlich von b bis β, und Null von β bis ∞, so erhält man

$$2)\qquad F(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{b}^{\beta} F(t)\sin x u \sin u t\,du\,dt\,, \quad 0 < b < x < \beta \quad .$$

Ferner ist

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{b}^{\beta} F(t)\sin b u \sin u t\,du\,dt = \tfrac{1}{2}F(b)\,, \quad \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{b}^{\beta} F(t)\sin \beta u \sin u t\,du\,dt = \tfrac{1}{2}F(\beta) \quad ,$$

und für $0 < x < b$ oder $\beta < x$

$$\int_{0}^{\infty}\int_{b}^{\beta} F(t)\sin x u \sin u t\,dt\,du = 0 \quad .$$

20. Die FOURIERschen Doppelintegrale sind eine sehr ergiebige Quelle zur Berechnung von einfachen bestimmten Integralen. Ist man imstande, bei den Doppelintegralen in Nr. 17, 18 und 19 die Integrale auszuführen

$$\int F(t)\cos u(t-x)\,dt\,, \quad \int F(t)\cos u t\,dt\,, \quad \int F(t)\sin u t\,dt \quad ,$$

so hat man dann ohne weiteres den Wert der Doppelintegrale selbst.

A) Nimmt man in Nr. 18, 3) $b = 0$, und $F(x) = 1$, so erhält man

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x u \sin \beta u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}\,, \quad 0 < x < \beta \quad ,$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x u \sin \beta u}{u}\,du = 0\,, \quad \beta < x \quad .$$

B) Setzt man in Nr. 18, 3) $b = 0$, und $F(x) = x$ und bemerkt, daß

$$\int_0^\beta t\cos ut\,dt = \left[\frac{t\sin ut}{u} + \frac{\cos ut}{u^2}\right]_0^\beta = \frac{\beta\sin u\beta}{u} + \frac{\cos u\beta - 1}{u^2} ,$$

$$= \frac{\beta\sin u\beta}{u} - 2\cdot\frac{\sin^2\frac{1}{2}u\beta}{u^2} ,$$

so erhält man

$$x = \frac{2\beta}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xu\sin\beta u}{u}\,du - \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xu\sin^2\frac{1}{2}\beta u}{u^2}\,du .$$

Setzt man für das erste Integral den soeben gefundenen Wert und vertauscht noch β mit 2β, so erhält man schließlich

$$\int_0^\infty \frac{\cos xu\sin^2\beta u}{u^2}\,du = \frac{\pi}{4}(2\beta - x), \quad 0 \leq x \leq 2\beta .$$

C) Durch teilweise Integration findet man

$$\int_0^\infty e^{-t}\cos ut\,dt = \left[\frac{e^{-t}\sin ut}{u}\right]_0^\infty + \frac{1}{u}\int_0^\infty e^{-t}\sin ut\,dt ,$$

$$\int_0^\infty e^{-t}\sin ut\,dt = -\left[\frac{e^{-t}\cos ut}{u}\right]_0^\infty - \frac{1}{u}\int_0^\infty e^{-t}\cos ut\,dt .$$

Hieraus ergibt sich leicht

$$\int_0^\infty e^{-t}\cos ut\,dt = \frac{1}{1+u^2}, \quad \int_0^\infty e^{-t}\sin ut\,dt = \frac{u}{1+u^2} .$$

Daher gewinnt man aus Nr. 18, 2) und Nr. 19, 2) die Integrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos xu}{1+u^2}\,du = \frac{\pi}{2}e^{-x}, \quad x \geq 0 ,$$

$$\int_0^\infty \frac{u\sin xu}{1+u^2}\,du = \frac{\pi}{2}e^{-x}, \quad x > 0 .$$

Ersetzt man hier u durch $\frac{u}{a}$ und x durch ax, so erhält man

$$\int_0^\infty \frac{\cos xu}{a^2+u^2}\,du = \frac{\pi}{2a}e^{-ax}, \quad a > 0, \quad x \geq 0 ,$$

$$\int_0^\infty \frac{u\sin xu}{a^2+u^2}\,du = \frac{\pi}{2}e^{-ax}, \quad a > 0, \quad x > 0 .$$



Zweites Buch.

Funktionen einer komplexen Veränderlichen

bearbeitet von

Dr. Richard Heger,

a. o. Honorarprofessor an der Kgl. Sächs. Techn. Hochschule
und Gymnasialoberlehrer in Dresden.

Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

§ 1. Algebraische Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

1. Durch Vereinigung einer realen Zahl a mit einer imaginären bi entsteht die komplexe Zahl $a + bi$.

Alle zu dem realen Bestandteile a gehörigen komplexen Zahlen werden erhalten, wenn b die reale Zahlenreihe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft; hieraus entstehen weiter alle komplexen Zahlen überhaupt, wenn a die ganze reale Zahlenreihe durchläuft. Bezeichnet ∞ die Menge der realen Zahlen, so ist die der komplexen ∞^2. Zur geometrischen Darstellung bedürfen daher die komplexen Zahlen eines Gebietes zweier Dimensionen, einer Fläche. Wählt man hierzu die Ebene, so hat man sich zunächst darüber schlüssig zu machen, wie die positive und negative imaginäre Einheit darzustellen sind, und wie man den geometrischen Begriff der Summe*) auf die Summe einer realen und imaginären Zahl auszudehnen hat.

Die imaginäre Einheit i wird man als eine Strecke darstellen von derselben Länge, wie die reale Einheit, nur von andrer Richtung. Beachtet man nun, daß $1 \cdot i = i$, $i \cdot i = -1$, daß also die negative reale Einheit aus der positiven imaginären durch dieselbe arithmetische Operation hervorgeht, wie die positive imaginäre aus der positiven realen, und daß bei einer geschickt gewählten geometrischen Darstellung gleichen arithmetischen Operationen auch in bestimmter Hinsicht gleiche geometrische entsprechen müssen, so entsteht die Forderung, die Richtung der imaginären Einheit so zu wählen, daß der Winkel zwischen $+1$ und $+i$ gleich dem Winkel zwischen $+i$ und -1 ist, also so, daß sie mit der positiven realen Einheit einen rechten Winkel bildet.

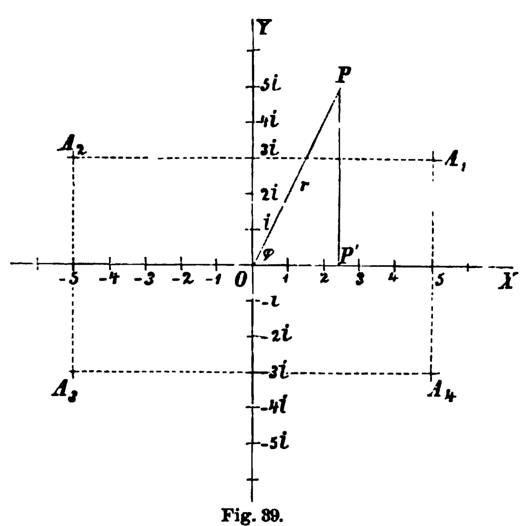


Fig. 39.

Die positive imaginäre Zahl bi wird durch die Strecke OQ dargestellt, die der Strecke b gleich und mit der imaginären Einheit OJ gleichgerichtet ist; ferner die negative imaginäre Zahl $-bi$ durch eine Strecke, die der Strecke bi entgegengesetzt gleich ist. Die Gerade OX (Fig. 39) wird als die reale, OY als die imaginäre Achse bezeichnet.

---

*) Um zwei (reale) Zahlen zu addieren, die durch die vom Nullpunkte O ausgehenden (auf der realen Achse enthaltenen) Strecken OA und OB dargestellt sind, konstruiere man die Strecke AC, die der Richtung und Länge nach mit OB übereinstimmt; alsdann ist

$$OA + OB = OC \quad .$$

Diese Definition umfaßt zunächst die Addition realer positiver und negativer Zahlen. Läßt man die eingeklammerten Beschränkungen weg, so wird sie für das ganze komplexe Zahlengebiet verwendbar.

2. Den geometrischen Begriff der Summe dehnen wir auf reale und imaginäre Summanden aus, und bezeichnen mit der Summe $a + bi$ die Strecke OB, die erhalten wird, wenn man OA gleich und gleichgerichtet mit a, und AB gleich und gleichgerichtet mit bi macht. Demnach sind die Strecken OA_1, OA_2, OA_3, OA_4 der Reihe nach die Bilder der komplexen Zahlen

$$5 + 3i, \quad -5 + 3i, \quad -5 - 3i, \quad 5 - 3i \quad ,$$

und die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 werden als die Zahlpunkte $\pm 5 \pm 3i$ bezeichnet. Ist P' die Projektion von P auf OX und ist $OP' = x$, $P'P = y$, so ist P der Zahlpunkt

$$x + yi \quad .$$

Ferner ist

$$OP = r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ,$$

wobei wir die Wurzel absolut rechnen wollen; wird XOP mit φ bezeichnet, so ist

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}, \quad x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad .$$

Die Größen r und φ werden als Modul und Amplitude der komplexen Zahl $x + iy$ bezeichnet.

Die komplexen Zahlen

$$\cos\varphi + i\sin\varphi \quad ,$$

deren Modul gleich der Einheit ist, bezeichnet man als komplexe Einheiten; die Einheitspunkte liegen auf einem Kreise, der um den Nullpunkt mit der Längeneinheit als Halbmesser beschrieben ist. Zahlen $a + ib$, für welche a und b dasselbe Verhältnis haben, besitzen dieselbe Amplitude oder um π verschiedene Amplituden; sie liegen daher auf derselben durch den Nullpunkt gehenden Geraden.

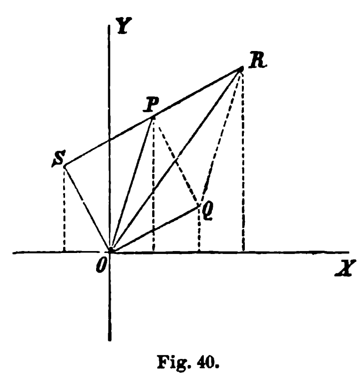


Fig. 40.

3. Die geometrischen Definitionen der Summe und Differenz übertragen wir auf komplexe Zahlen. Ist PR gleich OQ und gleichgerichtet (Fig. 40), so setzen wir

$$OR = OP + OQ \quad ;$$

und ist PS gleich OQ, aber von entgegengesetzter Richtung, so ist

$$OS = OP - OQ \quad .$$

Werden durch die Punkte P und Q die Zahlen $a + bi$, $c + di$ abgebildet, so ist daher

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \quad ,$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i \quad .$$

4. Nach dem Grundsatze der stetigen Ausbreitung der Rechenregeln wird das Produkt komplexer Zahlen durch die Gleichung definiert

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + bc \cdot i + ad \cdot i + bd \cdot i \cdot i = ac - bd + (bc + ad)i .$$

Ist

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad c + di = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad ,$$

so ist der Modul R des Produktes

$$R = \sqrt{(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2} = \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2}$$

$$= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = r \cdot r_1 \quad .$$

Für die Amplitude Φ des Produktes hat man

$$\cos\Phi = \frac{ab - cd}{R} = \frac{a}{r}\cdot\frac{b}{r_1} - \frac{c}{r}\cdot\frac{d}{r_1} = \cos(\varphi + \varphi_1) \quad ,$$

$$\sin\Phi = \frac{ac + bd}{R} = \frac{a}{r}\cdot\frac{c}{r_1} + \frac{b}{r}\cdot\frac{d}{r_1} = \sin(\varphi + \varphi_1) \quad .$$

Daher folgt: Komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man ihre Moduln multipliziert und die Amplituden addiert. Ist in komplexen Zahlen (Fig. 41)

$$OR = OP \cdot OQ \quad ,$$

und ist ferner $OE = 1$, so besteht zwischen den vier Strecken OE, OP, OQ und OR die Proportion

$$OE : OQ = OP : OR \quad ;$$

ferner ist

$$EOR = EOP + EOQ\,, \quad \text{also} \quad POR = EOQ \quad ,$$

Daher sind die Dreiecke EOQ und POR gleichsinnig ähnlich.

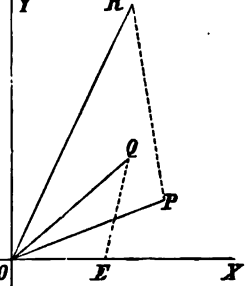


Fig. 41.

Für den Quotienten zweier komplexen Zahlen

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,, \quad z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

folgt durch Umkehrung der Multiplikation

$$\frac{z}{z_1} = \frac{r}{r_1}[\cos(\varphi - \varphi_1) + i\sin(\varphi - \varphi_1)] \quad .$$

Insbesondere ist

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)] = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi) \quad .$$

5. Haben die komplexen Zahlen $z_1, z_2, z_3, \ldots z_n$ die Moduln $r_1, r_2, r_3, \ldots r_n$ und die Amplituden $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n$, so ist nach Nr. 4

$$z_1 z_2 z_3 \ldots z_n = r_1 r_2 r_3 \ldots r_n [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)] \quad .$$

Ist insbesondere $z_1 = z_2 = z_3 = \ldots = z_n$, so ergibt sich

$$1) \qquad z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \quad .$$

Aus

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]$$

folgt

$$z^{-n} = r^{-n}[\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)] \quad .$$

Daher gilt die Regel: Eine komplexe Zahl wird mit einem ganzzahligen Exponenten potenziert, indem man den Modul potenziert und die Amplitude mit dem Exponenten multipliziert.

Die Aufgabe, die n-te Wurzel einer komplexen Zahl $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ zu bestimmen, ist nun sofort gelöst; die n verschiedenen Lösungen sind

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right] \quad ,$$

$$k = 0,\ 1,\ 2, \ldots (n-1) \quad .$$

Insbesondere sind die komplexen n-ten Wurzeln der positiven realen Einheit

$$\varepsilon_k = \cos k \frac{2\pi}{n} + i \sin k \frac{2\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots (n-1) \ .$$

Die komplexen n-ten Wurzeln von z können dargestellt werden, indem man die Wurzel

$$\sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n}\right), \qquad \varphi < 2\pi$$

mit den komplexen n-ten Wurzeln der Einheit der Reihe nach multipliziert. Ferner folgt noch, daß die oben gegebene Regel für die Potenz einer komplexen Zahl auch für gebrochene Exponenten gilt.

Ein irrationaler Exponent p ist Grenzwert einer Reihe von rationalen Zahlen $a_1, a_2, a_3 \ldots$ und man hat

$$p = a_n + \varrho_n \quad ,$$

wobei ϱ_n sich der Grenze Null nähert, wenn n unendlich wächst.

Wendet man die Regel $z^{a+\varrho} = z^a \cdot z^\varrho$ auch auf ein irrationales ϱ an, so ist

$$z^p = r^{a_n} (\cos a_n \varphi + i \sin a_n \varphi) \cdot z^{\varrho_n} \quad .$$

Geht man zur Grenze $n = \infty$ über, so verschwindet ϱ_n; da nun

$$\lim z^{\varrho_n} = 1\ , \qquad \lim a_n = p \quad ,$$

so folgt

$$z^p = r^p (\cos p\varphi + i \sin p\varphi) \quad .$$

Die Regel für die Potenz einer komplexen Zahl gilt also auch für irrationale Exponenten. Die Ausdehnung des Begriffes Potenz auf komplexe Exponenten wird erst im Verlaufe späterer Betrachtungen gewonnen werden.

6. Das bisher Mitgeteilte gestattet uns, den Begriff einer algebraischen Funktion einer komplexen Veränderlichen zu bilden. Unter einer ganzen rationalen algebraischen Funktion n-ten Grades der komplexen Veränderlichen z versteht man die Größe

$$s = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n \quad ,$$

wobei $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ gegebene reale oder komplexe Zahlen sind. Unter einer algebraischen Funktion von z im weitesten Sinne versteht man eine Größe s, deren Zusammenhang mit z durch das Verschwinden einer in Bezug auf s und z ganzen und rationalen Funktion hergestellt wird. Eine algebraische Funktion wird also durch eine Gleichung von der Form definiert

$$\varphi(s, z) \equiv A_0 s^n + A_1 s^{n-1} + A_2 s^{n-2} + \ldots + A_{n-1} s + A_n = 0 \quad ,$$

wo $A_0, A_1, \ldots A_n$ ganze rationale Funktionen der Veränderlichen z sind. Man sieht hieraus sofort: Ist s eine algebraische Funktion von z, so ist auch z eine algebraische Funktion von s.

7. Ist die Gleichung

$$\varphi(s, z) = 0$$

in Bezug auf s vom Grade n, so gehören zu jedem Werte von z n im allgemeinen voneinander verschiedene Werte von s.

Dieser algebraische Fundamentalsatz wird in den Elementen der Algebra gewöhnlich nur unter der Voraussetzung bewiesen, daß die Koeffizienten $A_0, A_1, \ldots A_n$ reale Zahlen sind; da wir ihn im folgenden ganz allgemein zu verwenden haben, so vermag ein von der genannten Beschränkung befreiter Beweis hier statthaben.

Man denke sich für z in die Funktion $\varphi(s, z)$ einen gegebenen Wert $a + bi$ eingesetzt. Setzt man nun für s einen veränderlichen Wert

$$s = \xi + \eta i \quad ,$$

so erhält man

$$\varphi(s) = M + Ni \quad ;$$

hierbei sind M und N Funktionen von ξ und η. Das Quadrat des Modul von $\varphi(s)$, $M^2 + N^2$, kann nicht negativ werden, muß also für einen oder mehr als einen Wert von s einen Mindestwert erhalten, der Null oder positiv ist; die zugehörigen Werte von M, N, ξ und η seien M_0, N_0, ξ_0, η_0. Es sei nun ϱ eine Wurzel der Einheit, und ω eine reale Zahl; man ersetze in $\varphi(s)$ die Zahl s durch $\xi_0 + i\eta_0 + \varrho\omega$ und erhalte dadurch

$$\varphi(\xi_0 + i\eta_0 + \varrho\omega) = P + Qi \quad .$$

Dieser Ausdruck ist in Bezug auf $\varrho\omega$ eine ganze Funktion n-ten Grades; er enthält in jedem Falle das Glied $\varrho^n\omega^n$; ob auch die Glieder $\varrho\omega$, $\varrho^2\omega^2$, $\varrho^3\omega^3, \ldots$ $\varrho^{n-1}\omega^{n-1}$ vollzählig vorhanden sind, hängt von besondern Umständen ab; es können im gegebenen Falle sehr wohl einige davon — oder auch alle — fehlen. Gesetzt nun, es sei $\varrho^k\omega^k$ die niedrigste Potenz von $\varrho\omega$, die in dieser Entwicklung vorkommt, so erhält man für $\varphi(\xi_0 + \eta_0 i + \varrho\omega)$ einen Ausdruck von der Form

$$M_0 + N_0 i + (M_k + N_k i)(\varrho\omega)^k + (M_{k+1} + N_{k+1} i)(\varrho\omega)^{k+1} + \ldots + (M_n + N_n i)(\varrho\omega)^n .$$

Den Anfang macht $M_0 + N_0 i$, da $\varphi(s)$ nach der Voraussetzung diesen Wert annimmt, wenn man $\omega = 0$ setzt.

Setzen wir zunächst $\varrho^k = \varepsilon$, wobei wir unter ε eine reale Einheit verstehen, und dann $\varrho^k = \varepsilon i$, so erhalten wir

$$M_0 + \varepsilon M_k\omega^k + \ldots + i(N_0 + \varepsilon N_k\omega^k + \ldots) \quad ,$$

bezw.

$$M_0 - \varepsilon N_k\omega^k + \ldots + i(N_0 + \varepsilon M_k\omega^k + \ldots) \quad ,$$

wobei die nur angedeuteten Glieder Potenzen von ω enthalten, deren Exponenten größer als k sind. Die Quadrate der Moduln dieser beiden komplexen Größen sind, nach Potenzen von ω geordnet,

$$M_0^2 + N_0^2 + 2\varepsilon(M_0 M_k + N_0 N_k)\omega^k + \ldots$$

bezw.

$$M_0^2 + N_0^2 + 2\varepsilon(N_0 M_k - M_0 N_k)\omega^k + \ldots$$

Man wähle nun ε in jeder der beiden Entwicklungen so, daß die mit ω^k multiplizierten Glieder negativ ausfallen. Angenommen, die beiden Binome

$$M_0 M_k + N_0 N_k \quad \text{und} \quad N_0 M_k - M_0 N_k$$

wären von Null verschieden, so könnte man die reale Zahl ω immer so klein wählen, daß die Polynome

$$2\varepsilon(M_0 M_k + N_0 N_k)\omega^k + \ldots \quad \text{und} \quad 2\varepsilon(N_0 M_k - M_0 N_k)\omega^k + \ldots$$

dieselben Vorzeichen haben, wie ihre ersten Glieder

$$2\varepsilon(M_0 M_k + N_0 N_k)\omega^k \quad \text{bezw.} \quad 2\varepsilon(N_0 M_k - M_0 N_k)\omega^k \quad ,$$

also negativ sind. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, daß

$$M_0^2 + N_0^2$$

der kleinstmögliche Wert des Quadrats des Modul von $\varphi(s)$ ist. Folglich können $M_0 M_k + N_0 N_k$ und $M_0 N_k - N_0 M_k$ nicht von Null verschieden sein. Aus

$$M_0 M_k + N_0 N_k = 0 \, , \quad M_0 N_k - N_0 M_k = 0$$

folgt

$$(M_0 M_k + N_0 N_k)^2 + (M_0 N_k - N_0 M_k)^2 \equiv (M_0^2 + N_0^2) \cdot (M_k^2 + N_k^2) = 0 \quad .$$

Da nun nach der Voraussetzung $M_k^2 + N_k^2$ von Null verschieden ist, so folgt schließlich

$$M_0^2 + N_0^2 = 0 \quad .$$

Es gibt daher wenigstens einen Wert von s, für den der Modul von $\varphi(s)$, d. i. $\varphi(s)$ selbst, verschwindet.

Sei σ_1 eine Wurzel der Gleichung

$$\varphi(s) = 0 \quad ;$$

aus der Identität

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= \varphi(s) - \varphi(\sigma_1) \\ &= A_1(s^n - \sigma_1^n) + A_2(s^{n-1} - \sigma_1^{n-1}) + \ldots + A_{n-1}(s - \sigma_1) \quad ,\end{aligned}$$

erkennt man, daß $\varphi(s)$ durch $s - \sigma_1$ ohne Rest teilbar ist; daher ist

$$\varphi(s) \equiv (s - \sigma_1)(B_0 s^{n-1} + B_1 s^{n-2} + B_2 s^{n-3} + \ldots + B_{n-1}) \quad ,$$

worin $B_0, B_1, \ldots B_{n-1}$ aus $A_0, A_1, \ldots A_n$ und σ_1 zusammengesetzt sind. Jede ganze Funktion n-ten Grades von s läßt sich also in das Produkt einer linearen Funktion und einer ganzen Funktion $(n-1)$-ten Grades zerfällen.

Zerlegt man unter Anwendung dieses Satzes die ganze Funktion

$$B_0 s^{n-1} + B_1 s^{n-2} + B_2 s^{n-3} + \ldots + B_{n-1}$$

u. s. f., so erhält man: Jede ganze algebraische Funktion n-ten Grades einer Veränderlichen ist das Produkt von n linearen Funktionen.

Der soeben gegebene Satz ist von dem folgenden nicht verschieden: Jede Gleichung n-ten Grades mit einer Unbekannten hat n Wurzeln, von denen mehrere zusammenfallen können.

Aus der Zerlegung der Funktion n-ten Grades $\varphi(s)$ in n lineare Faktoren erkennt man zugleich, daß die Gleichung $\varphi(s) = 0$ nicht mehr als n reale oder komplexe Wurzeln haben kann.

Wenn eine Gleichung n-ten Grades nur reale Koeffizienten hat und eine komplexe Wurzel zuläßt, so hat sie bekanntlich auch die konjugiert komplexe Wurzel. Dieser Satz gilt für Gleichungen mit komplexen Koeffizienten nicht. Man übersieht dies sofort, wenn man in der Gleichung n-ten Grades

$$(s - a)(s - b) \ldots (s - n) = 0$$

für die Größen $a, b, c, \ldots n$ beliebig gewählte reale oder komplexe Zahlen setzt; denn man erhält dann eine Gleichung für s, deren komplexe Wurzeln in keiner Weise voneinander abhängig sind.

8. Wir schließen hieran eine Bemerkung über die Zerlegung einer echt gebrochenen Funktion in Teilbrüche.

Im 1. Buch, § 3, Nr. 2 ist die Zerlegung einer echt gebrochenen realen Funktion gezeigt worden, unter der Voraussetzung, daß der Nenner keine mehrfachen Faktoren hat. Das dort gewonnene Resultat

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{A_1}{x - \xi_1} + \frac{A_2}{x - \xi_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - \xi_n}, \quad A_k = \frac{\psi(\xi_k)}{\varphi'(\xi_k)} \quad ,$$

läßt sich ohne weiteres auf den Fall komplexer Funktionen $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ ausdehnen. Dasselbe gilt von der Zerlegungsmethode 1. Buch, § 3, Nr. 3, für den Fall, daß $\varphi(x)$ mehrfache Faktoren hat.

Die in a. a. O. § 3, Nr. 4 gegebene Methode für den Fall mehrfacher komplexer Wurzeln hat bei komplexen Funktionen $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ keine Anwendung; es bewendet hier bei der in Nr. 3 gegebenen Zerlegung.

9. Alle weitern Funktionen, die wir betrachten, werden in bestimmter Weise aus algebraischen Funktionen abgeleitet. Einige auf Funktionen einer komplexen Veränderlichen bezügliche Sätze, die wir nun mitteilen wollen, gelten für alle diese Funktionen unabhängig von ihrer besondern Natur.

10. Bevor wir zu diesen Sätzen übergehen, muß noch eine andre wichtige Frage erledigt werden.

Die geometrische Darstellung einer realen Funktion $f(x)$ einer realen Veränderlichen x erfolgt, indem man x als Abscisse und $f(x)$ als Ordinate am einfachsten in einem rechtwinkligen Koordinatensysteme betrachtet; die Kurve $y = f(x)$ gibt dann ein anschauliches, viele Untersuchungen wesentlich erleichterndes Bild des Funktionsverlaufs. Eine dementsprechende Darstellung komplexer Funktionen einer komplexen Veränderlichen ist offenbar nicht möglich; denn die komplexe Veränderliche ist nicht auf einer Geraden, sondern nur auf einem zweifach ausgedehnten Gebiete darstellbar, und eine Funktion derselben ist im allgemeinen wieder komplex (nur für einzelne Werte real oder rein imaginär), also wieder zweifach ausgedehnt.

Um den Zusammenhang einer komplexen Funktion mit ihrer Veränderlichen anschaulich zu machen, hat man folgenden Weg eingeschlagen.

Man verwendet zwei Ebenen, eine Veränderlichenebene und eine Funktionsebene. Die Punkte der erstern stellen die Werte der Veränderlichen dar; durchläuft z eine Reihe von komplexen Werten, so durchläuft der zugehörige Punkt der z-Ebene, den wir der Einfachheit wegen auch mit z bezeichnen wollen, eine gewisse Kurve. Zu jedem Werte von z gehört ein oder gehören einige bestimmte Werte der Funktion $w = f(z)$. Den Zahlpunkt w, bezw. die Gruppe von Zahlpunkten w suche man nun auf der Funktionsebene auf; man erhält so einen Funktionspunkt, oder eine Gruppe von Funktionspunkten, die wir als dem veränderlichen Punkte z entsprechend bezeichnen. Bewegt sich nun z auf der z-Ebene, so bewegen sich die entsprechenden Funktionspunkte auf der w-Ebene; während aber die Bewegung von z ganz willkürlich ist, hängen die Wege der Funktionspunkte von den Wegen von z und dem Funktionszusammenhange $\varphi(z)$ ab.

Die Punkte der z-Ebene und die Punkte der w-Ebene stehen somit in einer geometrischen Verwandtschaft.

Aus rein geometrischem Interesse haben wir einen einfachen Fall punktverwandter Ebenen schon kennen gelernt, die Kollineation, und ihre besondern Fälle, die Affinität und die Ähnlichkeit. Die komplexen Funktionen geben zur Untersuchung mannigfaltiger Punktverwandtschaften Veranlassung; es wird sich beiläufig zeigen, daß die allgemeine Kollineation unter diesen Verwandtschaftsarten sich nicht befindet, wohl aber die Affinität.

11. Wir geben hierzu zwei einfache Beispiele.

A) Ist

$$w = \frac{1}{z} \,,$$

und sind x, y die Koordinaten des Punktes z in der z-Ebene, u, v die Koordinaten von w in der Funktionsebene, so ist

$$u + vi = \frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} \,.$$

Also ist

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \,, \qquad v = -\frac{y}{x^2 + y^2} \,,$$

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2} \,, \qquad y = -\frac{v}{u^2 + v^2} \,.$$

Um eine Vorstellung von der Verwandtschaft der beiden Ebenen zu erhalten, wollen wir in der w-Ebene die Linien aufsuchen, die den Parallelen zur realen und imaginären Achse in der z-Ebene entsprechen, d. i. die Kurven, die der Punkt w zurücklegt, wenn z die Parallelen zu den Achsen durchläuft. Für eine

Parallele zur imaginären Achse ist x konstant, y willkürlich; daher erfüllen u und v die Gleichung

$$1)\qquad \frac{u}{u^2+v^2}=x\,,\qquad \text{oder}\qquad u^2+v^2-\frac{1}{x}u=0\quad,$$

worin x eine gegebene Zahl ist.

Für eine Parallele zur Abscissenachse ist y konstant; die Koordinaten der zugehörigen Funktionspunkte erfüllen also die Gleichung

$$2)\qquad -\frac{v}{u^2+v^2}=y\,,\qquad \text{oder}\qquad u^2+v^2+\frac{1}{y}v=0\quad.$$

Die Kurven 1) bilden ein Kreisbüschel, dessen Mittellinie die U-Achse ist und dessen Kreise die V-Achse berühren: die Kurven 2) bilden ebenfalls ein Kreisbüschel, die Mittellinie ist die V-Achse und die Kreise berühren die U-Achse. Die Büschel sind rechtwinklig, d. h. jeder Kreis des einen wird von jedem des andern unter rechten Winkeln geschnitten.

Sind Modul und Amplitude von s und z die Größen R, Φ, r, φ, so ist

$$R=\frac{1}{r}\,,\qquad \Phi=-\varphi\quad.$$

Einem konstanten Werte von r entspricht ein konstanter von R, d. i.: Einem Kreise um den Nullpunkt in der z-Ebene entspricht ein Kreis um den Nullpunkt in der Funktionsebene: die Radien zweier entsprechenden Kreise sind reziprok. Einem Strahle durch den Nullpunkt in der z-Ebene entspricht ein Strahl durch den Nullpunkt in der w-Ebene; zwei entsprechende Strahlen bilden entgegengesetzt gleiche Winkel mit den realen Achsen.

B) Ist

$$w=z^2\,,\qquad \text{also}\qquad u+vi=x^2-y^2+2xyi\quad,$$

so ist

$$3)\qquad u=x^2-y^2\,,\qquad v=2xy\quad.$$

Durchläuft z eine Parallele zur Y-Achse, so ist x konstant und y veränderlich. Die Gleichungen 3) ergeben die Gleichung der entsprechenden Kurve der Funktionsebene, wenn y entfernt wird. Man erhält

$$4)\qquad v^2=4x^2(x^2-u)\quad.$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel; die Symmetrieachse fällt in die u-Achse, der Brennpunkt in den Nullpunkt, der Parameter ist $4x^2$, und die Parabel erstreckt sich entlang der negativen Seite der u-Achse.

Einer Parallelen zur realen Achse der z-Ebene entspricht in der w-Ebene eine Kurve, deren Gleichung aus 3) erhalten wird, wenn man y konstant annimmt und x entfernt; es ergibt sich

$$5)\qquad v^2=4y^2(y^2+u)\quad.$$

Dies ist eine Parabel, deren Achse ebenfalls mit der u-Achse, deren Brennpunkt mit dem Nullpunkte zusammenfällt; der Parameter ist $4y^2$; die Parabel erstreckt sich in der Richtung der positiven u-Achse.

Die Parabelscharen 4) und 5) sind brennpunktsgleich: jede Parabel der einen Schar wird von jeder der andern Schar unter rechten Winkeln geschnitten.

Modul und Amplitude von w hängen jetzt mit dem Modul und der Amplitude von z durch die Gleichungen zusammen

$$R=r^2\,,\qquad \Phi=2\varphi\quad.$$

Einem Kreise um den Nullpunkt in der z-Ebene entspricht also ein Kreis um den Nullpunkt in der w-Ebene: einem Strahle durch den Nullpunkt in der z-Ebene entspricht ein Strahl durch den Nullpunkt der w-Ebene, der Winkel, den letzterer mit der ξ-Achse bildet, ist doppelt so groß als der Winkel des entsprechenden Strahles mit der x-Achse.

12. Jede Funktion von $z = x + iy$ kann man auf die Form bringen

$$w = \varphi(z) = u + vi \quad ,$$

wobei u und v reale Funktionen von x und y sind. Aber nicht jeder Ausdruck $u + vi$, worin u und v Funktionen von x und y sind, ist eine Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + yi$. Man hat nämlich

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dw}{dz}$$

und

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dw}{dz} i \quad ,$$

mithin ist

$$1) \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = i \frac{\partial w}{\partial x} \quad ,$$

d. i.

$$\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} = i \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad .$$

Vergleicht man beiderseits die realen und imaginären Bestandteile, so erhält man die Gleichungen

$$2) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x} \quad .$$

Diese Gleichungen sind also erfüllt, wenn $u + vi$ eine Funktion der komplexen Veränderlichen z ist.

Es läßt sich leicht umgekehrt zeigen, daß jeder Ausdruck $u + vi$, welcher der Gleichung 1) genügt, eine Funktion von z ist.

Gesetzt, $w = u + vi$ erfüllt die Gleichung

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i \frac{\partial w}{\partial x} \quad .$$

Man ersetze x in w durch $z - yi$; das Ergebnis werde mit (w) bezeichnet. Alsdann ist

$$\frac{\partial (w)}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \quad .$$

Aus $x = z - yi$ folgt $\partial x : \partial y = -i$; daher erhält man

$$\frac{\partial (w)}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} - i \frac{\partial w}{\partial x} \quad .$$

Da nun 1) erfüllt ist, so hat man

$$\frac{\partial (w)}{\partial y} = 0 \quad .$$

Folglich ist (w) von y unabhängig, mithin eine Funktion von z, d. i. von $x + yi$. Wir schließen daher: Die notwendige und ausreichende Bedingung dafür, daß der komplexe x und y enthaltende Ausdruck $w = u + iv$ eine Funktion von $z = x + yi$ ist, wird durch die Gleichung ausgesprochen

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i \frac{\partial w}{\partial x} \quad .$$

13. Ist w eine Funktion von z, und W eine Funktion von w, so ist W eine Funktion von z.

Da W nach der Voraussetzung nur von w abhängt, so ist

$$1)\qquad \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{dW}{dw} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{dW}{dw} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \quad .$$

Da ferner nach der Voraussetzung w eine Funktion von z ist, so ist

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i \frac{\partial w}{\partial x} \quad ;$$

führt man dies in 1) ein, so erhält man

$$\frac{\partial W}{\partial y} = i \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

14. Ist w eine Funktion von z, so ist umgekehrt auch z eine Funktion von w.

Das vollständige Differential von w ist

$$1)\qquad dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy \quad .$$

Da nun

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i \frac{\partial w}{\partial x} \quad ,$$

so erhält man aus 1)

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}(dx + i\,dy) = \frac{\partial w}{\partial x} dz \quad .$$

Daher ist

$$2)\qquad \frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = -i \frac{\partial w}{\partial y} \quad .$$

Hieraus folgt

$$dz = \frac{1}{\frac{\partial w}{\partial x}} dw = \frac{1}{\frac{\partial w}{\partial x}}(du + i\,dv) \quad .$$

Mithin hat man für die partialen Differentialquotienten von z nach u und v

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{\frac{\partial w}{\partial x}}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = i \frac{1}{\frac{\partial w}{\partial x}} \quad ,$$

daher ist

$$\frac{\partial z}{\partial v} = i \frac{\partial z}{\partial u}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

15. Aus der Gleichung Nr. 14, 2) folgt der wichtige Satz, daß der Differentialquotient einer Funktion einer komplexen Veränderlichen nicht von dem Verhältnisse abhängt, in welchem sich x und y ändern, denn $\frac{\partial w}{\partial x}$ enthält nur x und y, nicht aber das Verhältnis $dy : dx$.

Soll z eine verschwindend kleine Änderung erfahren, so kann dies auf unendliche vielfache Weise geschehen, denn man kann den Punkt z nach allen möglichen Richtungen hin in der Funktionsebene eine verschwindend kleine Verschiebung erteilen. Zu jeder solchen unendlich kleinen Verschiebung dz von z gehört eine bestimmte, unendlich kleine Verschiebung dw des entsprechenden Punktes w in der Funktionsebene; das Verhältnis $dw : dz$ ist aber von der Richtung der Verschiebung von z unabhängig.

16. Der Differentialquotient von w ist eine Funktion von z, denn es ist

$$\frac{\partial w'}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{dw}{dz} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad ,$$

$$\frac{\partial w'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{dw}{dz} = -i\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad .$$

Daher hat man

$$\frac{\partial w'}{\partial y} = i\frac{\partial w'}{\partial x}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Man schließt nun sofort weiter, daß auch alle höhern Differentialquotienten von w Funktionen von z sind.

17. Setzt man (Fig. 42)

$$a = \alpha + \beta i \quad \text{und} \quad a_1 = \alpha_1 + \beta_1 i \quad ,$$

so ist

$$a_1 - a = \alpha_1 - \alpha + (\beta_1 - \beta) i \quad .$$

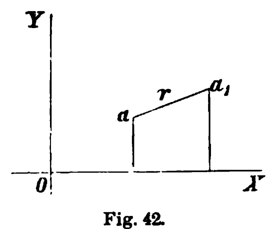


Fig. 42.

Der Modul der Differenz ist daher gleich dem Abstande r der Zahlpunkte a und a_1 und die Amplitude ist gleich der Winkel φ dieser Strecke mit der positiven realen Achse; man hat daher

$$a_1 = a + r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad .$$

Wir erteilen nun z (Fig. 43) zwei verschiedene verschwindend kleine Verschiebungen, durch welche man nach z' und z'' gelange; durch die entsprechenden Verschiebungen komme die Funktion von w nach w' und w''. Bezeichnet man die verschwindend kleinen Moduln der Differenzen $z' - z$, $z'' - z$, $w' - w$, $w'' - w$ der Reihe nach mit r', r'', ϱ', ϱ'', die Amplituden mit φ', φ'', ψ', ψ'', so ist

$$z' - z = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi'), \quad z'' - z = r''(\cos\varphi'' + i\sin\varphi'') \quad ,$$

$$w' - w = \varrho'(\cos\psi' + i\sin\psi'), \quad w'' - w = \varrho''(\cos\psi'' + i\sin\psi'') \quad .$$

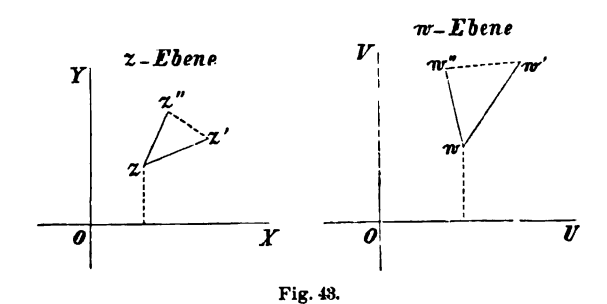


Fig. 43.

Da nun nach Nr. 14, 2) das Verhältnis einer unendlich kleinen Veränderung der Veränderlichen z zu der zugehörigen Veränderung der Funktion nicht von der Richtung abhängt, in der z sich ändert, so ist

$$\frac{z' - z}{w' - w} = \frac{z'' - z}{w'' - w'}, \quad \text{oder} \quad \frac{z' - z}{z'' - z} = \frac{w' - w}{w'' - w} \quad .$$

Führt man hier die obigen Werte ein, so folgt

$$\frac{r'}{r''}[\cos(\varphi' - \varphi'') + i\sin(\varphi' - \varphi'')] = \frac{\varrho'}{\varrho''}[\cos(\psi' - \psi'') + i\sin(\psi' - \psi'')] \quad .$$

Vergleicht man beiderseits das Reale und Imaginäre, so erhält man

$$r' : r'' = \varrho' : \varrho'' , \quad \varphi' - \varphi'' = \psi' - \psi'' \quad .$$

Hieraus ergibt sich, daß die verschwindend kleinen Dreiecke $z z' z''$ und $w w' w''$ gleichsinnig ähnlich sind.

Beschreibt die Veränderliche um den Punkt z herum ein verschwindend kleines Vieleck, so beschreibt die Funktion um den Punkt w herum ein entsprechendes Vieleck; verbindet man die Ecken beider mit z bezw. w, so zerfallen sie in lauter ähnliche Dreiecke und man erkennt, daß die Vielecke ähnlich sind. Man gewinnt so den Satz: Die Verwandtschaft der z-Ebene mit der w-Ebene ist eine solche, daß entsprechende unendliche kleine Figuren beider Ebenen einander ähnlich sind. Insbesondere ergibt sich hieraus, daß zwei Kurven der z-Ebene sich unter denselben Winkeln schneiden, wie die entsprechenden Kurven der w-Ebene.

18. Nur in einzelnen Punkten, für vereinzelte Werte von z und w, erleiden diese Betrachtungen eine Ausnahme, nämlich in den Punkten z und w, für welche

$$\frac{dw}{dz} = 0 , \quad \text{oder} \quad \frac{dw}{dz} = \infty \quad ;$$

denn aus keinem der beiden Gleichungspaare

$$\frac{w' - w}{z' - z} = 0 , \quad \frac{w'' - w}{z'' - z} = 0 \quad ,$$

bezw.

$$\frac{w' - w}{z' - z} = \infty , \quad \frac{w'' - w}{z'' - z} = \infty \quad ,$$

kann man den Schluß ziehen

$$\frac{w' - w}{w'' - w} = \frac{z' - z}{z'' - z} \quad .$$

Ist z. B. $w = 1 : z$, so hat man $dw : dz = -1 : z^2$; dieser Ausdruck wird Null für $z = \infty$ und unendlich für $z = 0$. Die Ähnlichkeit unendlich kleiner Figuren findet also allenthalben statt, außer in den Punkten der w-Ebene, die dem Nullpunkte und den unendlich fernen Punkten der z-Ebene entsprechen, es sind dies die unendlich fernen Punkte und der Nullpunkt der w-Ebene.

Für $w = z^2$ ist $dw : dz = 2z$, und wird mit z Null und unendlich; in der unendlich nahen Nachbarschaft der jetzt sich entsprechenden unendlich fernen Punkte findet Ähnlichkeit nicht statt.

19. Wenn zu jedem z nur ein Wert der Funktion w gehört, so nennt man die Funktion einwertig; aus diesem Begriffe folgt, daß eine einwertige Funktion Unterbrechungen der Stetigkeit nur an solchen Punkten erleiden kann, in denen sie unendlich groß wird. Einwertig sind alle rationalen Funktionen. Die ganzen rationalen Funktionen werden unendlich nur, wenn $z = \infty$ ist; die echt gebrochenen

$$w = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

nur für solche Werte von z, für welche der Nenner $\psi(z)$ verschwindet, die unecht gebrochenen außerdem noch für $z = \infty$.

20. Gehören zu einem Werte der Veränderlichen im allgemeinen verschiedene Werte von w, so heißt die Funktion mehrwertig, und zwar zwei-, drei-, vierwertig u. s. w., sobald zu einem z im allgemeinen zwei, drei, vier u. s. w. verschiedene Werte von w gehören. Mehrwertig sind alle irrationalen Funktionen; die durch die Gleichung n-ten Grades für w

$$\varphi(w, z) = 0$$

definierte Funktion w ist n-wertig.

Für einzelne Punkte $a_1, a_2, \ldots$ der z-Ebene können zwei oder mehrere Werte einer n-wertigen Funktion zusammenfallen; diese Punkte heißen die **Verzweigungspunkte der mehrwertigen Funktion.**

Die Funktion

$$w = \sqrt{z - a}$$

ist zweiwertig; für $z = a$ werden beide Werte gleich Null, daher ist a der Verzweigungspunkt.

Die zweiwertige Funktion

$$w = \sqrt{(z - a)(z - b)}$$

hat die Verzweigungspunkte a und b.

Die zweiwertige Funktion

$$w = \sqrt{(z - a)(z - b)(z - c)(z - d)}$$

hat vier Verzweigungspunkte, a, b, c, d.

Die sechswertige Funktion

$$w = \sqrt[3]{z^2 + az + b} + \sqrt{z}$$

hat drei Verzweigungspunkte; einer ist der Nullpunkt, die andern beiden sind die Wurzeln der Gleichung

$$z^2 + az + b = 0 \quad ;$$

für $z = 0$ fallen dreimal zwei Werte von w zusammen, für die Wurzeln von $z^2 + az + b = 0$ zweimal drei Werte.

21. Wir wollen nun die Veränderliche von einem Anfangswerte $z = a$ auf irgend einem Wege zu einem Endwerte $z = b$ führen und die Wege beachten, welche die Funktion w in der w-Ebene dabei zurücklegt.

Ist w einwertig, so gehört zu jedem Punkte der z-Ebene nur ein Punkt der w-Ebene, zu jeder Kurve der z-Ebene nur eine Kurve der w-Ebene. Entsprechen den Punkten a und b der z-Ebene die Punkte a' und b' der w-Ebene, und führt man z auf mehreren verschiedenen Kurven von a nach b, so werden die zugehörigen Kurven der w-Ebene alle in a' beginnen und b' endigen.

Ein wesentlich andres Verhalten zeigen die mehrwertigen Funktionen. Sind a und b keine Verzweigungspunkte für die n-wertige Funktion w, so gehören zu a und zu b je n verschiedene Punkte $a'_1, a'_2, \ldots a'_n$ bezw. $b'_1, b'_2, \ldots b'_n$ der w-Ebene. Wird nun z von a entlang der Kurve l nach b geführt, so rücken die zugehörigen n-Werte der Funktion w von den Lagen $a'_1, a'_2, \ldots a'_n$ in die Lagen $b'_1, b'_2, \ldots b'_n$, es entstehen also n Kurven, die in $a'_1, \ldots a'_n$ beginnen und in $b'_1, \ldots b'_n$ endigen; geht z auf einem andern Wege L von a nach b, so beschreibt das System der n Funktionswerte ein andres System von n Kurven, die dieselben Anfänge und dieselben Endpunkte haben, es ist aber sehr wohl möglich, daß die in einem bestimmten Punkte a'_i anfangende Kurve bei der zweiten Überführung nach einem andern Punkte der Gruppe der b' geht, als bei der ersten. Achtet man nur auf den Wert w_i der Funktion, welcher für $z = a$ mit a'_i zusammenfällt, so wird derselbe sich stetig ändern, sowohl wenn z von a auf l nach b, als wenn z auf L geht, im ersten Falle würde alsdann w_i einen andern Endwert als im letztern erhalten.

Ein einfaches Beispiel wird dies erläutern.

22. Wir betrachten die Funktion (Fig. 44)

$$w = \sqrt{z} \quad .$$

Wie wir schon gesehen haben (Nr. 11), gehört zu jedem durch den Nullpunkt gehenden Strahle der z-Ebene ein ebensolcher der w-Ebene, und jedem um den Nullpunkt beschriebenen Kreise der z-Ebene entspricht ein Kreis der

w-Ebene, der ebenfalls um den Nullpunkt beschrieben ist. Dem Punkte $z = 4$ entsprechen die Punkte $w_1 = 2$ und $w_2 = -2$. Wir führen nun z von 4 aus auf einem Halbkreise in positiver Drehrichtung um den Nullpunkt bis zum Punkte $z = -4$; alsdann geht w_1 auf einem Viertelkreise bis zu $2i$, und w_2 auf einem Viertelkreise bis zu $-2i$, beide in positiver Drehrichtung.

Hierauf gehe z von 4 bis -4 auf einem Halbkreise in negativer Drehrichtung. Die Amplituden von w_1 und w_2 ändern sich dann ebenfalls im Sinne der abnehmenden Winkel und es gelangt w_1 nach $-2i$, w_2 nach $2i$.

Je nachdem z also auf dem obern oder dem untern Halbkreise von $+4$ nach -4 geht, gelangt w_2 durch stetige Änderungen von $+2$ nach $+2i$ oder $-2i$.

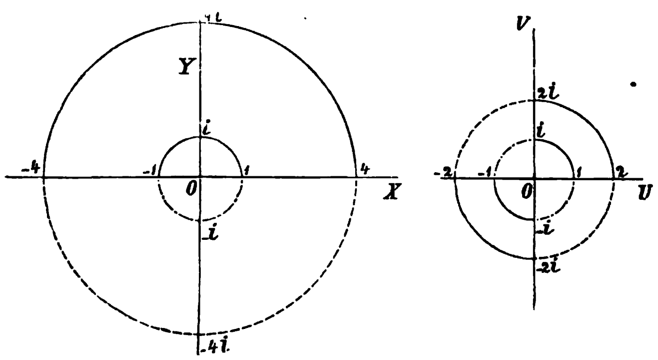


Fig. 44.

Führt man z in der Richtung der wachsenden Winkel entlang des ganzen Kreises von 4 bis zu 4 zurück, so geht w_1 in dem Halbkreise über $2i$ hinweg bis zu -2; einem geschlossenen Wege von z entspricht also ein nicht geschlossener von w_1. Geht z auf einem andern geeigneten Wege von 4 aus nach 4 zurück, so kann der zugehörige Weg von w_1 ein geschlossener sein. Dies ist z. B. der Fall, wenn z in positiver Drehrichtung den Halbkreis bis -4 zurücklegt, dann entlang der realen Achse bis -1 geht, hierauf in negativer Drehrichtung einen Halbkreis bis $+1$ beschreibt und dann auf der realen Achse nach $+4$ zurückkehrt. Denn dann geht w_1 in positiver Drehrichtung auf einem Viertelkreise bis $2i$, dann auf der imaginären Achse bis i, dann in negativer Drehrichtung in einem Viertelkreise bis $+1$, und endlich auf der realen Achse bis $+2$. Gleichzeitig legt w_2 einen Viertelkreis bis $-2i$, dann die imaginäre Achse bis $-i$, dann einen Viertelkreis bis -1, und endlich die reale Achse bis -2 zurück.

Hätte man z den Halbkreis von -1 nach $+1$ in positiver Drehrichtung beschreiben lassen, so wären w_1 und w_2 von $+i$ und $-i$ auf Viertelkreisen um den Nullpunkt in positiver Drehrichtung weiter gegangen, und es wäre daher w_1 nach -2 und w_2 nach $+2$ gelangt, also nicht zu den Ausgangswerten zurück.

Fig. 45.

23. Wird z von a nach b entlang l_1 geführt (Fig. 45), und gelangt ein Funktionswert w_1 dabei von dem Anfangswerte a' zu dem Endwerte b', so kommt w_1 umgekehrt von b' nach a', wenn z den Weg l_1 rückwärts von b nach a durchläuft. Gesetzt nun, w_1 gelange von a' nach b', gleichgültig ob z von a nach b die Wege l oder l_1 wählt. Läßt man dann z von a auf l bis b und dann auf l_1 zurück nach a gehen, so ändert sich w_1 von a' bis zu b' und nimmt am Schlusse wieder den Wert a' an; und umgekehrt: Gelangt w_1 vom Werte a' aus wieder zu a' zurück, wenn z von a aus die Kurven l und l_1 nacheinander durchlaufend zu a zurückkehrt und hat w_1 dabei für $z = b$ den Wert b'

angenommen, so gelangt w_1 rückwärts vom Werte a' zum Werte b', wenn z von a aus die Kurve l_1 bis b durchläuft, w_1 nimmt also bei beiden Wegen l und l_1 der Veränderlichen denselben Endwert an.

Um daher zu erfahren, welche Wege z von einem Anfangspunkte zu einem Zielpunkte zurücklegen muß, damit w_1 zu demselben oder zu verschiedenen Endwerten gelange, genügt es, die geschlossenen Wege zu untersuchen.

Erhält w_1 denselben Wert wieder, wenn z auf der aus l und l_1 zusammengesetzten geschlossenen Kurve von a ausgehend nach a zurückkehrt, so erhält auch w_1 denselben Wert, wenn z auf l oder auf l_1 von a nach b sich bewegt: und erhält w_1 nicht denselben Wert wieder, wenn z die geschlossene Kurve durchläuft, so erhält w_1 einen andern Wert, wenn z von a nach b auf l_1, als wenn es auf l geht.

24. Um bei der irrationalen Funktion (Fig. 46)

$$w = \sqrt{z}$$

die geschlossenen Wege, die z zurückzulegen hat, damit w_1 wieder zu seinem Ausgangswerte zurückkehrt, von denen zu unterscheiden, für welche dies nicht der Fall ist, drückt man z durch Modulus und Amplitude aus. Der Modulus ist eine eindeutig bestimmte Zahl; die Amplitude dagegen ist unendlich vieldeutig; ist nämlich φ einer ihrer Werte, so erhält man die andern, wenn man φ um ganze Vielfache von 2π vermehrt oder vermindert.

Ist nun

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad ,$$

so ist

$$w = \sqrt{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) \quad .$$

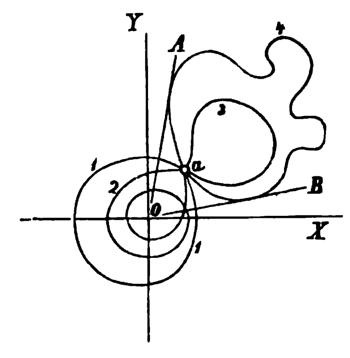


Fig. 46.

Zu jeder Amplitude gehört hiernach ein ganz bestimmter Wert von w; zu allen Amplituden, die um gerade Vielfache von 2π verschieden sind, gehört ein und derselbe Wert w_1 der zweideutigen Funktion w, zu den übrigen, die von den ersten um ungerade Vielfache von 2π abweichen, gehört der andre Wert w_2.

Geht nun z von einem Punkte a aus und auf einer beliebigen geschlossenen Kurve (1) nach a so zurück, daß dabei die Amplitude um 2π zu- oder abgenommen hat, so hat z den Nullpunkt einmal umkreist, und w ist von dem Werte

$$w_1 = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

zu dem Werte

$$\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi \pm 2\pi}{2} + i\sin\frac{\varphi \pm 2\pi}{2}\right) = -w_1$$

gelangt, also nicht zum Ausgangswerte zurück. Läuft hingegen z auf einer geschlossenen Kurve (2) so von a nach a zurück, daß die Amplitude um 4π zu- oder abnimmt, so endigt w_1 mit dem Werte

$$\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi \pm 4\pi}{2} + i\sin\frac{\varphi \pm 4\pi}{2}\right) \quad ,$$

d. i. mit dem Anfangswerte. Hieraus sieht man: Durchläuft z eine geschlossene Kurve, die den Nullpunkt umgibt, so kommt ein Funktionswert w_1 der zweideutigen Funktion $\sqrt{z}$ zu dem Ausgangswerte zurück oder nicht, je nachdem der Weg von z den Nullpunkt eine gerade oder ungerade Anzahl Male umkreist.

Beschreibt z eine geschlossene Bahn, die den Nullpunkt nicht einschließt (3, 4), so wächst φ bis zu einem größten Werte XOA, erlangt später einen kleinsten Wert XOB, und kehrt dann zum Anfangswerte zurück; die Endamplitude ist also mit der Anfangsamplitude identisch. Hieraus schließen wir: Wenn z eine geschlossene Bahn durchläuft, die den Nullpunkt nicht einschließt, so kehrt w_1 wieder zum Anfangswerte zurück.

25. Die Tatsache, daß zu jedem Punkte der z-Ebene zwei Werte w gehören, und die damit zusammenhängende, daß geschlossene Wege des z-Punktes die Funktion $\sqrt{z}$ zum Teil wieder zum Ausgangswerte zurückführen, zum Teil aber nicht, erschweren die weitern Betrachtungen. Um diese Schwierigkeit zu beseitigen, hat Riemann*) für die mehrwertigen Funktionen statt der z-Ebene mehrblätterige Flächen angewandt, die nach ihrem Erfinder als Riemannsche Flächen bezeichnet werden.

Für die Funktion $w = \sqrt{z}$ wird die Riemannsche z-Fläche folgendermaßen erhalten. Man denke sich eine Schraubenfläche von sehr kleiner Ganghöhe; ihre Achse gehe durch O senkrecht zur XY-Ebene, ihre Spur auf der XY-Ebene mag man sich mit der positiven realen Achse OX zusammenfallend denken. Auf dieser Schraubenfläche durchlaufe man in positiver Richtung von OX beginnend, den ersten und zweiten Umgang, alles andre denke man beseitigt. Der herausgeschnittene Teil hat dann zwei parallele Ränder, die sich von O aus ins Unendliche erstrecken, einer davon ist OX. Nun denke man sich die Ganghöhe verschwindend klein, und ändre die Fläche an den beiden Rändern so, daß dieselben ihrer ganzen Länge nach vereinigt werden, und somit den ersten Umgang durchdringen. Dabei soll die Beschränkung gelten, daß ein Punkt diese Verwachsungslinie nur überschreiten darf, um vom Ende des zweiten Umgangs zum Anfange des ersten zu gelangen oder umgekehrt, nicht aber so, daß er vom Ende des ersten zum Anfange des ersten oder vom Ende des zweiten zum Anfange des zweiten, oder umgekehrt, übergeht.

Man erhält somit eine zweiblätterige Fläche, welche die XY-Ebene doppelt bedeckt; die beiden Blätter sind längs der Geraden OX von O anfangend verwachsen; diese Linie darf ein Punkt nur so überschreiten, daß er von dem vordern Teile des obern Blattes in den hintern Teil des untern oder von dem hintern Teile des obern in den vordern Teil des untern übergeht oder umgekehrt. Jeder Punkt a der XY-Ebene ist die Projektion zweier in verschiedenen Blättern liegenden Punkte a_1 und a_2 der zweiblätterigen Veränderlichenfläche; diese beiden Punkte haben denselben Modulus, ihre Amplituden sind um 2π verschieden**).

*) Riemanns gesammelte mathematische Werke, herausgegeben von H. Weber, Leipzig 1876, Abhandlung I und VI; die Abhandlung VI findet sich auch in Crelles Journal, Bd. 54 (1857), S. 101; vgl. auch Roch, Über Funktionen komplexer Größen, Schloemilchs Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 8 (1863), S. 12 und 183.

**) Um ein anschauliches Modell eines Teiles dieser Fläche zu erhalten, schneide man zwei gleiche Stücke Papier b_1 und b_2 (Fig. 47) und zerschneide sie entlang OX; hierauf lege man sie so aufeinander, daß die Schnitte sich decken, und verbinde durch Überkleben mit einem Streifen Papier den Rand 1 des obern Blattes mit 2 des untern. An den Stellen c und d mache man entlang OX kleine Schnitte in den verbindenden Streifen, und schiebe durch dieselbe schmale Papierstreifchen, durch die man nun bei c und c' bezw. d und d' durch Ankleben den vordern Rand des obern mit dem hintern Rande des untern verbindet. Die Vorschrift über das Überschreiten der Verwachsung findet dann ihren deutlichen Ausdruck darin, daß man auf dem langen Streifen nur von oben 1 nach unten 2, auf den schmalen Stegen nur von oben c und d nach unten c' und d' oder umgekehrt, gelangen kann.

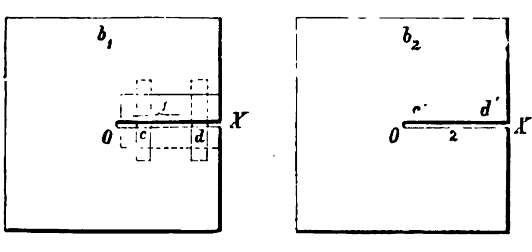


Fig. 47.

Will man von einem Punkte α des obern Blattes auf der Fläche nach einem Punkte β des untern gelangen, so muß man den Windungspunkt O wenigstens einmal umkreisen. Der Weg ist sichtbar bis zum Punkte A, wo er die Verwachsung überschreitet und ins andre Blatt gelangt; von da an ist er verdeckt.

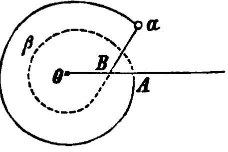


Fig. 48.

Wenn man von α ausgeht und den Nullpunkt zweimal umkreist, so kommt man ins obere Blatt zurück. Will man von α ausgehend eine geschlossene Linie beschreiben, so darf dieselbe den Windungspunkt nicht einschließen, oder muß ihn zweimal, oder viermal, oder überhaupt eine gerade Anzahl Male umkreisen. (Fig. 48).

Man setze nun fest, daß für irgend einen von O verschiedenen Punkt α der RIEMANNschen Fläche die Funktion $w = \sqrt{\alpha}$ den einen ihrer Werte w_1 (und nicht den entgegengesetzt gleichen w_2) haben soll; da nun jede geschlossene Kurve auf der Fläche den Windungspunkt gar nicht oder eine gerade Anzahl Male umkreist, so folgt, daß der Wert, den $\sqrt{z}$ in jedem Punkte annimmt, unabhängig von dem Wege ist, auf welchem z zu diesem Punkte von α ausgehend gelangt; die Funktion $\sqrt{z}$ ist also eine eindeutige Funktion der Punkte der zweiblätterigen Fläche.

Dieselbe Fläche dient dazu, die Funktion

$$w = \sqrt{az + b}$$

als eindeutige Funktion des Ortes in der Fläche darzustellen; nur hat man den Windungspunkt in den Punkt $-b : a$ zu verlegen.

26. Wir konstruieren nun eine zweiblätterige RIEMANNsche z-Fläche, für welche die Funktion

$$w = \sqrt{(z-a)(z-b)}$$

eine eindeutige Funktion des Ortes in der Fläche ist; wir setzen dabei voraus, daß a und b verschieden sind. Bezeichnet man in der z-Ebene die Abstände der Punkte a und b von z mit R und r und die Winkel dieser Geraden und der X-Achse mit Φ und φ, so ist

$$w = \sqrt{R}\left(\cos\frac{\Phi}{2} + i\sin\frac{\Phi}{2}\right) \cdot \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) .$$

Geht nun z von einem Punkte z_0 aus, und auf einer Kurve wieder nach z_0 zurück, so erlangt der Faktor

$$\sqrt{R} \cdot \left(\cos\frac{\Phi}{2} + i\sin\frac{\Phi}{2}\right)$$

seinen Ausgangswert wieder, oder den entgegengesetzt gleichen, je nachdem der Weg des z den Punkt a eine gerade Anzahl Male (Null mit eingerechnet) umkreist, oder eine ungerade; ebenso erreicht dabei der andre Faktor

$$\sqrt{r} \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

seinen Ausgangswert oder nicht, je nachdem der Punkt b eine gerade oder ungerade Anzahl Male von z umkreist wird. Wenn beide Faktoren ihren Anfangswert nicht erreichen, also beide am Ende des Weges Werte angenommen haben, die den Anfangswerten entgegengesetzt gleich sind, so hat sich ihr Produkt nicht geändert, w also den Ausgangswert wieder erreicht. Daher erkennt man, daß w den Ausgangswert wieder erreicht oder nicht, je nachdem der Weg der Veränderlichen die beiden Punkte a und b zusammengenommen eine gerade Anzahl Male umkreist, oder eine ungerade.

Hiernach ergibt sich folgende dem Zwecke genügende RIEMANNsche z-Fläche: Man decke zwei Ebenen aufeinander und denke sich dieselben entlang der Geraden ab (Fig. 49) so verwachsen, daß man von einem Rande der Geraden auf den andern nicht übertreten kann, ohne dabei von dem obern Blatte ins untere zu gelangen oder umgekehrt. Auf dieser Fläche kann man von einem Punkte c aus nur auf solchen Wegen zu c zurückgelangen, die keinen der Windungspunkte a und b umkreisen (z. B. Weg 1), oder einen nach dem andern jeden einmal umkreisen (Weg 2), oder die einen zweimal umkreisen (Weg 3) oder die beide zusammen einmal umkreisen (Weg 4), oder auf Wegen, die sich aus Wegen dieser vier Arten zusammensetzen lassen; in jedem dieser Fälle erlangt w wieder seinen Ausgangswert.

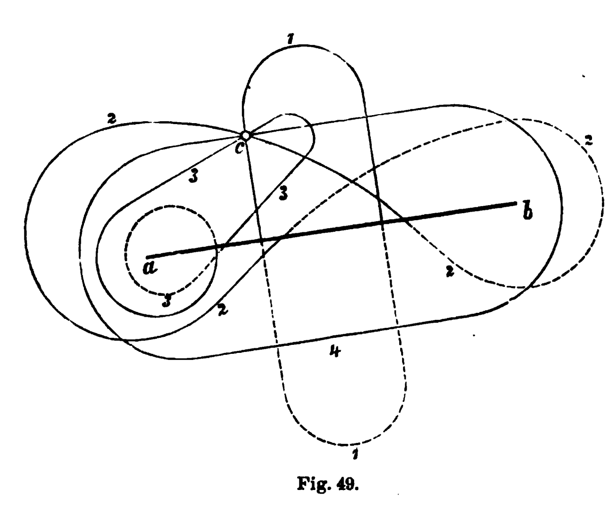


Fig. 49.

Ist nun festgesetzt, welchen Wert w für irgend einen Punkt z_0 der zweiblätterigen Fläche haben soll, so ist der Wert in jedem Punkt z_1 eindeutig bestimmt durch die Änderung, die w erleidet, wenn z auf irgend welchem Wege auf der Fläche von z_0 nach z_1 geht.

27. Bezeichnet man für die Funktion

$$w = \sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}$$

mit r_1, r_2, r_3, r_4 die Abstände der Punkte a, b, c, d vom veränderlichen Punkte z und mit $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ die Winkel der Geraden r_1, r_2, r_3, r_4 mit der positiven realen Achse, so ist

$$w = \sqrt{r_1}\left(\cos\frac{\varphi_1}{2} + i\sin\frac{\varphi_1}{2}\right) \cdot \sqrt{r_2}\left(\cos\frac{\varphi_2}{2} + i\sin\frac{\varphi_2}{2}\right)$$
$$\cdot \sqrt{r_3}\left(\cos\frac{\varphi_3}{2} + i\sin\frac{\varphi_3}{2}\right) \cdot \sqrt{r_4}\left(\cos\frac{\varphi_4}{2} + i\sin\frac{\varphi_4}{2}\right) .$$

Beschreibt z von z_0 aus eine geschlossene Kurve, die den Punkt a eine gerade bezw. ungerade Anzahl Male umkreist, so bekommt der Faktor

$$\sqrt{r_1}\left(\cos\frac{\varphi_1}{2} + i\sin\frac{\varphi_1}{2}\right)$$

seinen Ausgangswert, bezw. den entgegengesetzt gleichen Wert; das Entsprechende gilt für die übrigen Faktoren von w. Wenn daher z eine Bahn beschreibt, die alle die vier Punkte zusammengenommen eine gerade Anzahl Male umkreist, so erlangt w wieder seinen Ausgangswert; ist aber die Summe der Umkreisungen aller vier Punkte ungerade, so erlangt w nicht den Ausgangswert wieder. Hieraus erkennt man, daß w eine eindeutige Funktion des Ortes der Fläche wird, wenn man dieselbe folgendermaßen einrichtet: Man legt zwei Ebenen aufeinander, und läßt diese entlang einer Geraden verwachsen, die zwei von den Punkten a, b, c, d verbindet, sowie auf der Geraden zwischen den beiden andern (Fig. 50); diese beiden Verwachsungen sollen so gewählt sein, daß sie sich nicht schneiden. Betreffs der Überschreitung der Verwachsungen sollen dieselben Bestimmungen gelten, wie bei den vorigen Beispielen.

Durchläuft man auf dieser Fläche von einem Punkte e des obern Blattes aus eine Bahn, deren Grundriß geschlossen ist, und die keinen der Windungspunkte a, b, c, d umkreist, so führt diese Kurve zu e selbst zurück, endet nicht in dem unter e im andern Blatte liegenden Punkte (Weg 1). Wenn man von e ausgehend einen Windungspunkt (a, Weg 2) einmal umkreist, so kommt man in das untere Blatt; um in das obere zurückzugelangen, muß man noch einen Windungspunkt (z. B. c) einmal umkreisen. Ein Weg, der zwei durch eine Verwachsung verbundene Windungspunkte oder alle vier umkreist, kann ganz im obern Blatte liegen (Weg 3)*).

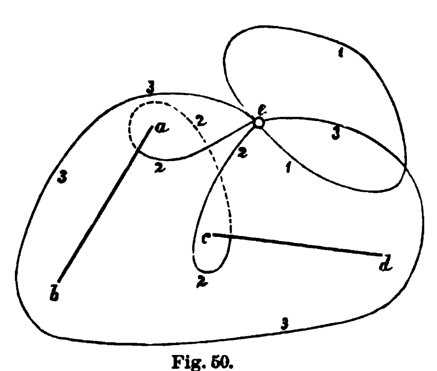


Fig. 50.

Man überzeugt sich so, daß man in dieser Fläche nur solche wirklich geschlossene Linien ziehen kann, die die Windungspunkte zusammen eine gerade Anzahl Male umkreisen.

Ist daher festgesetzt, welchen der beiden möglichen Werte w in einem Punkte dieser Fläche haben soll, so ist der Endwert, den w erreicht, wenn z von diesem Punkte auf der Fläche zu einem andern geht, eindeutig bestimmt und vom Wege unabhängig.

Diese Beispiele genügen für die weitern Betrachtungen, die wir hier durchführen werden.

§ 2. Integrale komplexer Funktionen.

1. Es sei $f(z)$ eine Funktion der komplexen Variabeln z, und für z eine RIEMANNsche Fläche konstruiert, so daß $f(z)$ eine eindeutige Funktion der Punkte dieser Fläche ist; ferner seien zwei Punkte z_0 und Z dieser Fläche durch eine in der Fläche liegende Linie l verbunden, und diese Linie durch eine Anzahl Punkte $z_1, z_2, z_3, \ldots z_{n-1}$ geteilt, die in der Richtung von z_0 nach Z aufeinander folgen; endlich werde mit $f(z_k)$ der Wert bezeichnet, den $f(z)$ für irgend einen Punkt innerhalb des Linienstücks $z_{k-1} z_k$ annimmt. Unter dem bestimmten Integrale

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$$

versteht man den Grenzwert, gegen den die Summe

$$\sum_1^n f(z_k)\,\Delta z_k\,, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}\,, \quad z_n \equiv Z$$

konvergiert, wenn sämtliche Differenzen Δz_k verschwinden.

2. Wir werden nun zunächst zeigen, daß ein solcher Grenzwert existiert. Setzen wir $z = x + iy$, so nimmt $f(z)$ nach Sonderung des Realen vom Imaginären die Form an $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ und es ist

$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1} = x_k - x_{k-1} + i(y_k - y_{k-1}) = \Delta x_k + i\Delta y_k \quad .$$

Folglich haben wir, wenn wir die Zeiger unterdrücken,

$$\Sigma f(z)\,\Delta z = \Sigma[\varphi(x,y)\,\Delta x - \psi(x,y)\,\Delta y] + i\Sigma[\varphi(x,y)\,\Delta y + \psi(x,y)\,\Delta x] \quad .$$

*) Um sich diese Verhältnisse recht deutlich zu machen, zeichne man sich mehrere geschlossene Wege, die die Windungspunkte immer anders umkreisen, und achte darauf, die Wegteile zu punktieren, soweit sie im untern Blatte liegen.

Aus der Gleichung der Kurve l wollen wir nun y durch x und x durch y ausdrücken und diesen Wert für y bezw. x in die mit Δx bezw. Δy multiplizierten Funktionen setzen. Die erstern werden dann Funktionen von x allein, die letztern Funktionen von y; bezeichnen wir diese mit $\Phi(x)$, $\Phi_1(x)$, $\Psi(y)$, und $\Psi_1(y)$, so haben wir

$$\Sigma f(z)\,\Delta z = \Sigma[\Phi(x)\,\Delta x - \Psi(y)\,\Delta y] + i\Sigma[\Phi_1(x)\,\Delta x + \Psi_1(y)\,\Delta y] \quad .$$

Ist nun $Z = X + iY$, so ist

$$\lim \Sigma\Phi(x)\,\Delta x = \int_{x_0}^{X} \Phi(x)\,dx\,, \quad \lim \Sigma\Psi(y)\,\Delta y = \int_{y_0}^{Y} \Psi(y)\,dy$$

u. s. w.; hieraus folgt

$$\lim \Sigma f(z)\,\Delta z = \int_{x_0}^{X} \Phi(x)\,dx - \int_{y_0}^{Y} \Psi(y)\,dy + i\int_{x_0}^{X} \Phi_1(x)\,dx + i\int_{y_0}^{Y} \Psi_1(y)\,dy \quad .$$

Hierdurch ist das Integral

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$$

durch bestimmte Integrale realer Funktionen einer realen Veränderlichen ausgedrückt.

Wir schließen hieran zwei Sätze, die sich aus der Definition des bestimmten Integrals ohne weiteres ergeben.

Ist b ein Punkt, der auf dem Integrationswege ac, d. i. auf dem für die Veränderliche angenommenen Wege zwischen a und c, liegt, so ist für die Integration auf diesem Wege

$$\int_a^b f(z)\,dz + \int_b^c f(z)\,dz = \int_a^c f(z)\,dz \quad .$$

Ferner folgt

$$\int_a^b f(z)\,dz = -\int_b^a f(z)\,dz \quad .$$

3. Wir haben nun zu untersuchen, welchen Einfluß die Wahl der Integrationsweges auf den Wert des bestimmten Integrals hat.

Es liegt die Vermutung nahe, daß das zwischen den Grenzen a und b genommene Integral immer andre Werte erhält, wenn man die Punkte a und b durch verschiedene Integrationswege verbindet, so daß es nötig wäre, bei jedem Integrale den Integrationsweg genau anzugeben. Wir werden indes zeigen, daß dies nicht der Fall ist; der Wert des bestimmten Integrals wird sich nur insofern abhängig vom Integrationswege erweisen, als bei gewissen Gruppen von Wegen das Integral um eine bestimmte additive Konstante von dem auf andern Wegen erhaltenen Werte abweicht.

Um zu diesen Ergebnissen zu gelangen, beweisen wir folgenden Satz: Sind X und Y zwei innerhalb eines vollständig begrenzten Teiles T einer Riemannschen Fläche endliche und eindeutige Funktionen des Ortes in der Fläche, so ist das über die Fläche T erstreckte Integral

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dT$$

entgegengesetzt gleich dem über alle Punkte der Begrenzung von T ausgedehnten Integrale

$$\int (X\,dx + Y\,dy) \quad ,$$

wobei alle Teile der Begrenzung so durchlaufen werden sollen, daß

die Fläche T gegen die Fortschreitung entlang der Grenze so liegt, wie der $+i$ enthaltene Teil der Zahlenebene gegen die in der Richtung wachsender Zahlen durchlaufene reale Achse.

Wir wollen uns zunächst unter X und Y reale Funktionen von x und y denken.

Wir betrachten zuerst ein Flächenstück T, das die Ebene nur einfach bedeckt und einfach zusammenhängend ist, d. i. dessen vollständige Begrenzung eine einzige geschlossene Kurve bildet (Fig. 51). Das über T ausgedehnte Integral zerlegen wir in die Differenz

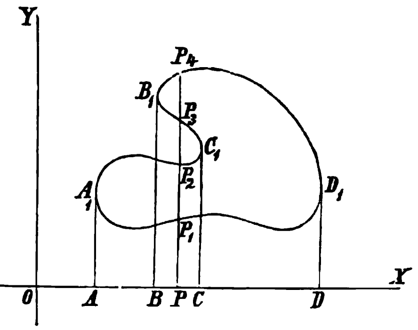


Fig. 51.

$$\int\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)dT=\int\frac{\partial X}{\partial y}dT-\int\frac{\partial Y}{\partial x}dT\quad,$$

und berechnen die Teile einzeln. Nun ist

$$\int\frac{\partial X}{\partial y}dT=\iint\frac{\partial X}{\partial y}dx\,dy\quad.$$

Hierbei ist die Integration nach y auf jeder Parallelen zur Y-Achse über die Strecken auszudehnen, die im Innern von T liegen, für $x=OP$ also über P_1P_2 und P_3P_4. Sind die Werte der Funktion X in den Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 der Reihe nach X_1, X_2, X_3, X_4, und bemerken wir, daß bei unbestimmter Integration

$$\int\frac{\partial X}{\partial y}dy=X+C\quad,$$

so ergibt sich für das über die Strecken P_1P_2 und P_3P_4 ausgedehnte bestimmte Integral

$$\int\frac{\partial X}{\partial y}dy=X_2-X_1+X_4-X_3\quad.$$

Hierbei wird von der Voraussetzung Gebrauch gemacht, daß X für alle Punkte im Innern der Fläche endlich bleibt; denn wenn X z. B. für einen Punkt innerhalb der Strecke P_1P_2 unendlich wird, so ist das über die Strecke ausgedehnte Integral im allgemeinen nicht gleich X_2-X_1.

Daher ist nun weiter

$$\int\frac{\partial X}{\partial y}dT=\int(X_2-X_1+X_4-X_3)\,dx\quad,$$

$$=-\int X_1\,dx+\int X_2\,dx-\int X_4\,dx+\int X_3\,dx\quad.$$

Die Grenzen der einzelnen Integrale erhalten wir, indem wir die zur Y-Achse parallelen Tangenten der Umgrenzung ziehen; haben diese die Abscissen OA, OB, OC, OD, so ist

$$\int\frac{\partial X}{\partial y}dT=-\int_{OA}^{OD}X_1\,dx+\int_{OA}^{OC}X_2\,dx-\int_{OB}^{OC}X_3\,dx+\int_{OB}^{OD}X_4\,dx\quad.$$

Im zweiten und vierten Integrale vertauschen wir die Grenzen und erhalten bei etwas veränderter Anordnung

$$\text{1)}\qquad\int\frac{\partial X}{\partial y}dT=-\left(\int_{OA}^{OD}X_1\,dx+\int_{OD}^{OB}X_4\,dx+\int_{OB}^{OC}X_3\,dx+\int_{OC}^{OA}X_2\,dx\right)\quad.$$

Durchläuft ein Punkt die Grenze von T in positiver Richtung von A_1 anfangend, so erhält X auf dem Wege $A_1 D_1$ Werte, die mit X_1 bezeichnet sind; die auf dem Wege $D_1 B_1$ sind mit X_4 bezeichnet, die auf $B_1 C_1$ mit X_3, die auf $C_1 A_1$ mit X_2. Wir können daher in 1) die Zeiger bei X_1, X_2, X_3, X_4 weglassen und alle Integrale vereinigen; hierdurch entsteht

$$2) \qquad \int \frac{\partial X}{\partial y} dT = -\int X dx \quad ,$$

wobei das Integral rechts also über die Grenze von T auszudehnen und die Grenze in positiver Richtung zu durchlaufen ist. Durch geeignete Vertauschungen ergibt sich aus 2)

$$3) \qquad \int \frac{\partial Y}{\partial x} dT = -\int Y dy \quad ,$$

wobei rechts infolge der Vertauschung von x gegen y die Grenze von T so zu durchlaufen ist, daß die Fläche T gegen die Richtung der Fortschreitung so liegt, wie der Winkel XOY gegen die in der Richtung der wachsenden y zurückgelegte Ordinatenachse. Diese Umlaufsrichtung ist der des Begrenzungsintegrals in 2) entgegengesetzt. Wechseln wir in 3) die Umlaufsrichtung, so wechseln alle einzelnen Bestandteile, aus denen dasselbe zu berechnen ist, (so wie $\int X dx$ sich nach Gleichung 1) berechnet) die Grenzen, nehmen also den entgegengesetzt gleichen Wert an: durchläuft man die Grenze von T in positiver Richtung, so hat man daher

$$4) \qquad \int \frac{\partial Y}{\partial x} dT = \int Y dy \quad .$$

Aus 2) und 4) folgt schließlich

$$5) \qquad \int \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dT = -\int (X dx + Y dy) \quad ,$$

w. z. b. w.

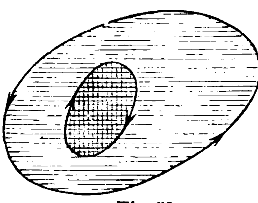


Fig. 52.

Wir beweisen nun den Satz für eine die Ebene allenthalben einfach bedeckende Fläche T_1 deren Begrenzung aus mehreren getrennten Kurven besteht. Wir denken uns aus der einfach zusammenhängenden (wagerecht schraffierten) Fläche T_1 eine einfach zusammenhängende (senkrecht schraffierte) T_2 herausgeschnitten (Fig. 52). Wird die übrig bleibende, ringförmige Fläche mit T bezeichnet, so ist

$$\int_T \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dT = \int_{T_1} \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dT - \int_{T_2} \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dT$$

wobei durch die Zeichen

$$\int_T , \int_{T_1} , \int_{T_2}$$

angedeutet wird, daß die Integration über die Flächen T, T_1, T_2 erstreckt werden soll. Nun ist nach dem vorigen Beweise

$$\int_{T_1} \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dT = -\int (X dx + Y dy) \quad ,$$

ausgedehnt über die Grenze von T_1 in positiver Umlaufsrichtung; und

$$\int_{T_2} \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dT = \int (X dx + Y dy)$$

ausgedehnt über die Grenze von T_2 in negativer Umlaufsrichtung in Bezug auf T_2, mithin in positiver in Bezug auf die Ringfläche T_1, zu deren Begrenzung die Grenze von T_2 gehört. Daher haben wir für T

$$\int\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)dT=-\int(Xdx+Ydy)$$

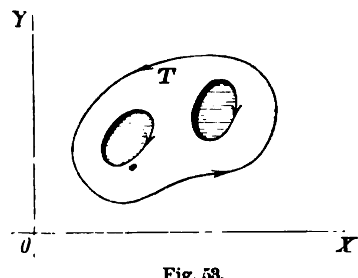


Fig. 53.

wobei nun das Begrenzungsintegral rechts über die ganze Begrenzung von T in positiver Richtung (in Richtung der Pfeile) zu erstrecken ist.

Wenn aus einer einfach zusammenhängenden, die Ebene allenthalben einfach bedeckenden Fläche mehrere Stücke herausgeschnitten werden, so findet man in gleicher Weise die Gültigkeit des Satzes.

Bei der unschraffierten Fläche T (Fig. 53) ist das Begrenzungsintegral über die drei Begrenzungskurven, bei jeder in der Pfeilrichtung, zu erstrecken.

Die Fläche T in Fig. 54 ist aus einer zweiblätterigen RIEMANNschen Fläche mit vier Windungspunkten geschnitten (§ 1, Nr. 27); sie bedeckt zum Teil die Ebene doppelt, nämlich innerhalb des Grundrisses $\alpha\beta\gamma\delta$. Ist AH parallel der Y-Achse, so ist bei der Integration nach y das Integral über AB, CD (im obern Blatte), EF und GH zu erstrecken; folglich ist

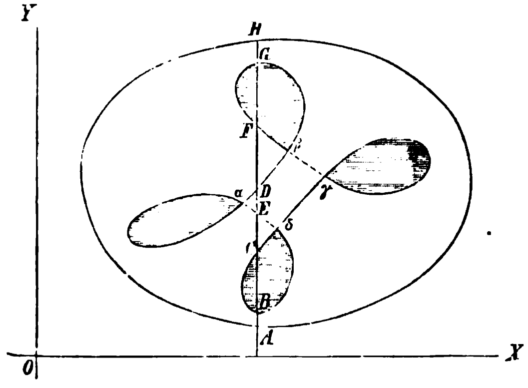


Fig. 54.

$$\int\frac{dX}{dy}dy=X_B-X_A+X_D-X_C+X_F-X_E+X_H-X_G\quad;$$

es gelten daher ganz die vorigen Betrachtungen und Schlüsse.

Enthält T einen Windungspunkt einer zweiblätterigen Fläche und wird es von einer einzigen Kurve begrenzt (Fig. 55), so ist für die Integration nach x entlang der Parallelen AD zur X-Achse das Integral im obern Blatte über die Strecke CD, im untern über AB zu erstrecken, es ergibt sich mithin

$$\int\frac{dy}{dx}dx=Y_B-Y_A+Y_D-Y_C\quad;$$

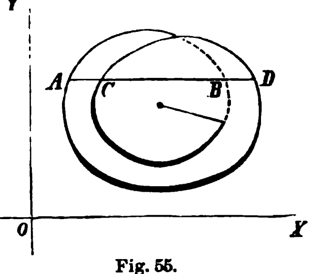


Fig. 55.

alles übrige folgt dann wie vorher.

Wir können nun den Satz mit Leichtigkeit auf den Fall ausdehnen, daß X und Y komplexe Funktionen sind.

Haben wir

$$X=R+iS\,,\quad Y=U+iV\quad,$$

so ist

$$\int\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)dT=\int\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial U}{\partial x}\right)dT+i\int\left(\frac{\partial S}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial x}\right)dT\quad.$$

Wenden wir den Satz auf die realen Funktionen R, S, U, V an, so erhalten wir

$$\int\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial U}{\partial x}\right)dT=-\int(R\,dx+U\,dy)\,,\quad \int\left(\frac{\partial S}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial x}\right)dT=-\int(S\,dx+V\,dy)\ .$$

Daher folgt schließlich

$$\int\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)dT=-\int[(R+iS)\,dx+(U+iV)\,dy]\quad ,$$

w. z. b. w.

4. Wir wenden den soeben bewiesenen Satz auf das Integral einer komplexen Funktion w an. Es sei

$$\int w\,dz$$

über die Grenze einer Fläche T ausgedehnt, innerhalb deren w eine endliche und eindeutige Funktion des Ortes in der Fläche ist; alsdann ist

$$\int w\,dz=\int(w\,dx+iw\,dy)=-\int\left(\frac{\partial w}{\partial y}-i\frac{\partial w}{\partial x}\right)dT\quad .$$

Da nun

$$\frac{\partial w}{\partial y}=i\frac{\partial w}{\partial x}\quad ,$$

so verschwinden alle Elemente des Flächenintegrals, also auch das ihm gleiche Begrenzungsintegral. Dies ergibt den Satz: Das Integral $\int w\,dz$, ausgedehnt in positiver Umlaufsrichtung über die vollständige Begrenzung einer Fläche, innerhalb deren w eindeutig und endlich ist, ist gleich Null.

Enthält die Fläche T einen oder mehrere Unstetigkeitspunkte, für welchen die eindeutige Funktion w unendlich wird, so kann man diese durch kleine geschlossene Linien $a_1, a_2, \ldots$ umgeben, deren jede nur einen Unstetigkeitspunkt enthält. Läßt man die von $a_1, \ldots$ begrenzten Flächenteile aus T austreten, so ist nun innerhalb der Restfläche w endlich; mithin verschwindet $\int w\,dz$, wenn man es über die Begrenzung von T und über die Grenzen $a_1, a_2, \ldots$ ausdehnt, in positivem Umlaufe in Bezug auf die Restfläche, also die über $a_1, a_2, \ldots$ ausgedehnten Integrale in negativer Richtung bezüglich der ausgeschlossenen Flächen. Hierzu folgt: Wird das Integral $\int w\,dz$ über die Grenze einer Fläche T erstreckt, die Unstetigkeitspunkte enthält, so ist sein Wert gleich der Summe von Integralen $\int w\,dz$, die in positiver Richtung um die Grenzen kleiner, je einen Unstetigkeitspunkt enthaltender Flächenteile erstreckt sind.

Dieser Satz lehrt $\int w\,dz$ für den Fall finden, daß T Unstetigkeitspunkte enthält; wir werden nämlich jeden solchen Punkt durch einen kleinen Kreis umgeben, wenn er kein Windungspunkt ist; ist er Windungspunkt einer zweiblätterigen RIEMANNschen Fläche, so umgeben wir ihn mit einer geschlossenen Linie, deren Grundriß ein Kreis ist, die also von z beschrieben wird, wenn r konstant ist und φ von 0 bis 4π wächst; zur Berechnung dieser Integrale können wir r so klein nehmen wie wir wollen, und daher insbesondere einen verschwindend kleinen Wert von r voraussetzen.

5. Wir kehren nun zum Ausgangspunkte unserer Untersuchung zurück, zu der Frage, welchen Einfluß die Wahl des Integrationsweges (Nr. 3) auf den Wert des Integrals

$$\int_{z_0}^{z} w\,dz$$

hat. Führt man z auf zwei Wegen l und l_1 von z_0 nach z (Fig. 56), die einen Teil einer RIEMANNschen Fläche vollständig begrenzen, innerhalb dessen keine

Unstetigkeitspunkte liegen, so verschwindet das über die ganze Begrenzung genommene Integral. Dasselbe zerfällt in das in der Richtung $z_0 z$ über l und in das in der Richtung $z z_0$ über l_1 genommene. Deuten wir die Wege durch eingeklammerte Buchstaben vor dem Integralzeichen an, so ist also

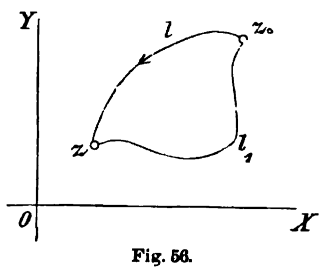


Fig. 56.

1) $$(l)\int_{z_0}^{z} w\,dz + (l_1)\int_{z}^{z_0} w\,dz = 0 \quad .$$

Da nun

$$(l_1)\int_{z}^{z_0} w\,dz = -(l_1)\int_{z_0}^{z} w\,dz \quad ,$$

so folgt aus 1):

$$(l)\int_{z_0}^{z} w\,dz = (l_1)\int_{z_0}^{z} w\,dz \quad .$$

Wenn zwei Integrationswege einen Teil T einer RIEMANNschen Fläche vollständig begrenzen und innerhalb desselben kein Unstetigkeitspunkt liegt, so hat das Integral für beide Wege denselben Wert.

Ferner erkennen wir sofort: Wenn T einen oder mehrere Unstetigkeitspunkte enthält, so sind die auf den Wegen l und l_1 gewonnenen Integrale um gewisse Konstanten verschieden, nämlich um die Werte von Integralen über die Grenzen hinlänglich kleiner Flächen, die je einen Unstetigkeitspunkt enthalten.

In einer einblätterigen ununterbrochenen Fläche begrenzt jede geschlossene Kurve einen Teil der Fläche vollständig; in einer zweiblätterigen Fläche lassen sich geschlossene Linien ziehen, die für sich allein nicht die vollständige Begrenzung eines Teils der Fläche bilden.

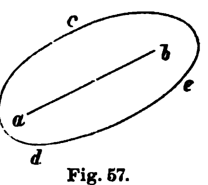


Fig. 57.

Hat die zweiblätterige Fläche zwei Windungspunkte a und b und zwischen ihnen die Verwachsungslinie (Fig. 57), so kann man im obern (oder im untern) Blatte eine geschlossene Kurve $c\,d\,e$ ziehen, die beide Windungspunkte einschließt.

Diese Linie zerlegt die zweiblätterige Fläche in zwei Teile, die beide unendlich groß sind; der eine ist der außerhalb $c\,d\,e$ liegende Teil des Blattes, der andre ist das untere Blatt vermehrt um den innerhalb $c\,d\,e$ liegenden Teil des obern, der mit dem untern entlang $a\,b$ zusammenhängt. Bei beiden Teilen gehört zur vollständigen Begrenzung außer $c\,d\,e$ noch eine die unendlich fernen Punkte enthaltende geschlossene Linie.

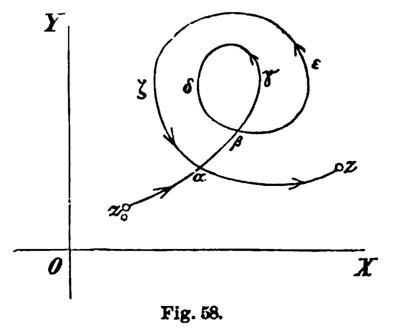


Fig. 58.

6. Wenn der Integrationsweg $z_0 z$ sich selbst ein- oder mehrmals schneidet, so kann man geeignete Zerlegungen vornehmen, die wir an einem Beispiele (Fig. 58) zeigen. Dabei wollen wir mit $\int(A, B, C, \ldots N)$ das entlang einer vorgeschriebenen Kurve $A, B, C, \ldots N$ von A bis N erstreckte Integral von $w\,dz$ verstehen. Es ist

1) $$\int(z_0\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\zeta\,z) = \int(z_0\,\alpha) + \int(\alpha\,\beta) + \int(\beta\,\gamma\,\delta\,\beta) + \int(\beta\,\varepsilon\,\zeta\,\alpha) + \int(\alpha\,z) \quad .$$

Nun kann man das erste und letzte, sowie das zweite und dritte Integral zu einfachen Begrenzungsintegralen zusammenfassen und hat

2) $$\int(z_0\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\zeta\,z) = \int(z_0\,\alpha\,z) + \int(\alpha\,\beta\,\varepsilon\,\zeta\,\alpha) + \int(\beta\,\gamma\,\delta\,\beta) \quad .$$

...en Unstetigkeitspunkt umkreist, innerhalb ...nd die Begrenzungsintegrale

$$\int(\beta\gamma\delta\beta) = 0 \quad ,$$

$$= \int(z_0\, a\, z) \quad .$$

...e Unstetigkeitspunkte umkreist, so sind ... in derselben Umlaufsrichtung über die ...stetigkeitspunkt einschließenden Flächen

...e geschlossene Kurve sich selbst ...treckte Integral $\int w\,dz$ gleich Null, ...itspunkt umkreist; werden von der ... positiver, teils in negativer Rich... ...gleich der Summe von Integralen, ...en Unstetigkeitspunkt enthaltenen ...lben Sinne erstreckt, in welchem ...it der Anzahl der Umläufe multi... ...n betreffenden Unstetigkeitspunkt

...iff, der für die weitern Untersuchungen ...fachen oder mehrfachen Zusammen... ...he (wobei Begrenzungen durch einen mit ...en im Endlichen liegenden Punkt be... ...werden sollen).

...hängenden Fläche versteht man nach ... Querschnitt, d. h. durch jede zwischen ...e sich selbst nicht schneidende Linie in ...getrennte Teile zerlegt wird. Einfach zu... ... ist z. B. eine Kreisfläche, ferner der ...blätterigen Fläche, der durch eine ge... ...selbst nicht schneidende Linie vollständig

...infach zusammenhängenden Fläche ...lossene Linie die vollständige Be... ...s Teils der Fläche. Denn gesetzt, die ...ie a zerlege die Fläche T in zwei Teile, ... 59), von deren keinen sie die voll... ...ung bildet, so muß der eine T_2 noch ...er andre T_1 noch eine äußere Grenze γ ...n nun von einem Punkte A auf β nach ...er Fläche, die sich nicht schneidet, so ...erstückt, folglich kann T nicht einfach

...mmenhängend, wenn sie durch einen ...mmenhängende verwandelt werden kann, ...sie wird durch AB in eine einfach zu...

...ner der Teil einer mit zwei Windungs... ...igen Fläche, der von zwei geschlossenen ...n Blättern so liegen, daß jede die Ver... ...9; der Querschnitt AB verwandelt sie in

Eine Fläche heißt drei-, vier- u. s. w. fach zusammenhängend, wenn sie durch zwei, drei u. s. w. Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelt werden kann. Hierbei soll jeder bereits hergestellte Querschnitt zur Begrenzung der Fläche gerechnet, durch weitere Querschnitte also nicht überschritten werden.

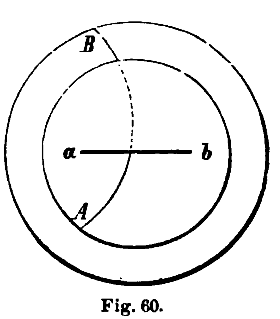


Fig. 60.

Die Fläche in Fig. 54 ist dreifach zusammenhängend; denn zieht man im obern Blatte den Querschnitt CD, und im untern EF, so erhält man eine einfach zusammenhängende Fläche.

Wenn die Funktion w für alle Punkte einer einfach zusammenhängenden Fläche T eindeutig und endlich ist, so ist das über irgend eine geschlossene Kurve der Fläche ausgedehnte Integral $\int w\,dz$ gleich Null, und das entlang irgend einer auf der Fläche liegenden Kurve genommene Integral

$$\int_{z_0}^{z} w\,dz$$

ist unabhängig vom Integrationswege: ist z_0 eine absolute Konstante, so ist das Integral daher eindeutig bestimmt für jeden (die obere Grenze bildenden) Punkt z der Fläche.

8. Wird der Integrationsweg l des Integrals

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

über den Endpunkt z hinaus bis zu einem in irgend welcher Richtung liegenden hinlänglich nahen Punkte $z + \Delta z$ so verlängert, daß die Zunahme des Wegs und die des Integrals mit Δz verschwindet (also innerhalb der Verlängerung kein Unstetigkeitspunkt umkreist oder getroffen wird), so hat man

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \lim[f(z_1)(z_1 - z_0) + f(z_2)(z_2 - z_1) + \ldots + f(z)(z - z_{n-1})] \quad ,$$

$$\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z)\,dz = \lim[f(z_1)(z_1 - z_0) + f(z_2)(z_2 - z_1) + \ldots + f(z)(z - z_{n-1})$$
$$+ f(z + \Delta z)(z + \Delta z - z)] \quad .$$

Bildet man die Differenz beider Werte und geht zur Grenze für ein verschwindendes Δz über, so erhält man

$$\lim\left[\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z)\,dz - \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz\right] : \Delta z = f(z)$$

d. i.

$$1) \qquad \frac{d}{dz}\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta = f(z) \quad .$$

Der Differentialquotient des Integrals nach der obern Grenze ist somit unabhängig von der Richtung, in welcher $z + dz$ gegen z liegt; wählt man diese Richtung einmal parallel der realen und dann parallel der imaginären Achse, so hat man nach 1), wenn man zur Abkürzung das Integral mit w bezeichnet,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dz}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{dw}{dz} \quad ,$$

also
$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x} \quad .$$

Hieraus folgt: Das Integral einer komplexen Funktion ist eine komplexe Funktion der obern Grenze.

9. Es sei l die vollständige Begrenzung einer Fläche T, und im Innern von T sei die Funktion $f(z)$ eindeutig und endlich; ferner sei t ein im Innern dieser Fläche gelegener Punkt, der nicht zugleich Windungspunkt ist. Alsdann hat die Funktion
$$\frac{f(z)}{z-t}$$
auf T nur den einen Unstetigkeitspunkt t, in welchem sie unendlich groß wird. Das Integral
$$\int \frac{f(z)}{z-t}\,dz \quad ,$$
ausgedehnt über die Begrenzung von T, ist dann gleich dem Integrale derselben Funktion, ausgedehnt über die Begrenzung einer beliebig kleinen Fläche, innerhalb deren der Unstetigkeitspunkt t liegt. Wir wählen zu dieser kleinen Fläche einen Kreis mit hinlänglich kleinem Halbmesser ϱ und der Mitte t, setzen für Punkte dieses Kreises
$$z - t = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
und gehen auf dem Kreise von z zu einem unendlich nahen Punkte $z + dz$ über; dann ist
$$\begin{aligned} dz &= \varrho(-\sin\varphi + i\cos\varphi)\,d\varphi \quad , \\ &= i\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,d\varphi \quad , \\ &= i(z-t)\,d\varphi \quad . \end{aligned}$$

Daher ist für die Integration entlang des Kreises
$$\int \frac{f(z)}{z-t}\,dz = i\int_0^{2\pi} f(z)\,d\varphi \quad .$$

Nimmt ϱ zur Grenze Null ab, so nähern sich alle Werte, die $f(z)$ auf der Kreisperipherie hat, dem Werte $f(t)$; daher ist
$$\lim \int \frac{f(z)}{z-t}\,dz = i f(t)\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i \cdot f(t) \quad .$$

Wir erhalten somit: Wird das Integral
$$\int \frac{f(z)}{z-t}\,dz$$
auf die vollständige Begrenzung einer Fläche T ausgedehnt, innerhalb welcher $f(z)$ eindeutig und endlich ist, so ist für jeden im Innern von T gelegenen Punkt t, der kein Windungspunkt ist,

$$1)\qquad \int \frac{f(z)}{z-t}\,dz = 2\pi i f(t) \quad .$$

Hieraus folgt

$$2)\qquad f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z-t}\,dz \quad .$$

Der Wert, den eine Funktion für einen Punkt im Innern einer Fläche annimmt, auf welcher sie allenthalben endlich und eindeutig ist, läßt sich also durch ein Integral angeben, das über die Begrenzung der Fläche erstreckt ist.

Differenziert man in 2) beide Seiten n-mal nach t, so erhält man

$$3)\qquad f^{(n)}t = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z-t)^{n+1}}dz \quad .$$

Da nun für die Umgrenzung von T die Funktion

$$\frac{f(z)}{(z-t)^{n+1}}$$

allenthalben endlich ist, so folgt: Ist eine Funktion innerhalb einer Fläche T eindeutig und endlich, so gilt dasselbe auch von allen ihren Derivierten.

An die Formel 1) knüpft sich noch folgende Bemerkung. Um den Wert zu bestimmen, den das Integral

$$\int f(z)\,dz$$

hat, wenn man es über den Umfang eines verschwindend kleinen Kreises erstreckt, für dessen Mitte a die Funktion $f(z)$ unendlich wird, während das Produkt $(z-a)f(z)$ endlich ist, setzen wir

$$\int f(z)\,dz = \int \frac{(z-a)f(z)}{z-a}dz$$

und erhalten daher nach 1), wenn a kein Windungspunkt ist,

$$4)\qquad \int f(z)\,dz = 2\pi i \lim_{(z=a)}(z-a)f(z) \quad .$$

Wenn die Funktion $f(z)$ im Punkte a unendlich wird wie $\frac{1}{(z-a)^{n+1}}$, d. i. so, daß

$$5)\qquad \lim_{z=a}(z-a)^{n+1}f(z) = c \quad ,$$

wobei n eine natürliche Zahl und c endlich und von Null verschieden ist, so verschwindet das über einen kleinen a umgebenden Kreis ausgedehnte Integral

$$\int f(z)\,dz \quad .$$

Denn ist

$$z-a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,, \qquad dz = i(z-a)\,d\varphi \quad ,$$

so ist

$$\int f(z)\,dz = i\int \frac{(z-a)^{n+1}f(z)}{(z-a)^n}d\varphi \quad .$$

Nun ist für die Punkte des kleinen (nicht verschwindenden) Kreises $(z-a)^{n+1}f(z)$ nach der Voraussetzung von endlicher Größe, und kann bei hinlänglicher Kleinheit von r durch c ersetzt werden; daher hat man

$$\int f(z)\,dz = \frac{ic}{r^n}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)} = -\frac{c}{n r^n}\Big[\cos n\varphi - i\sin n\varphi\Big]_0^{2\pi} \quad ,$$

und dies ist Null für jedes positive ganze n.

10. Die Formeln 1) und 2) führen zur Darstellung einer komplexen Funktion in einer unendlichen Reihe nach steigenden oder fallenden Potenzen der Veränderlichen; wir schicken dieser Entwicklung einige allgemeine Bemerkungen über die Gültigkeit unendlicher Reihen mit komplexen Gliedern voraus.

Ersetzen wir die Glieder einer unendlichen Reihe

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

durch

$$u_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k) \quad ,$$

so folgt

$$S = r_1\cos\varphi_1 + r_2\cos\varphi_2 + \dots + i(r_1\sin\varphi_1 + r_2\sin\varphi_2 + \dots) \quad .$$

Hieraus ist sofort ersichtlich: A) Wenn die Reihe der Moduln der Glieder einer unendlichen Reihe gilt, so gilt auch die unendliche Reihe.

B) Sind die Glieder einer unendlichen Reihe Funktionen von z, und gilt die Reihe für jeden innerhalb eines Gebietes T liegenden Wert von z, so gilt auch das Integral

$$\int(u_0 + u_1 + u_2 + \dots)\,dz$$

wenn man es über irgend einen auf T im Endlichen liegenden Weg erstreckt. Denn da nach der Voraussetzung für jeden Punkt auf T

$$\lim(u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots) = 0\,, \quad n = \infty \quad ,$$

so ist auch für irgend zwei auf T liegende Grenzen a und b

$$\lim\int_a^b(u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots)\,dz = 0 \quad .$$

Ist $f(z)$ der Grenzwert der Reihe, so ist ersichtlich, daß

$$\int(u_0 + u_1 + u_2 + \dots)\,dz = \int f(z)\,dz \quad .$$

C) Ist eine Reihe nach steigenden Potenzen (mit ganzen positiven Exponenten) der Veränderlichen z geordnet und sind für einen bestimmten Wert von z, dessen Modul r_0 ist, die Moduln aller Glieder der Reihe kleiner als eine gegebene Zahl, so gilt die Reihe für jeden Wert von z, dessen Modul kleiner als r_0 ist*).

Haben in der gegebenen Reihe

$$1) \qquad A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots$$

die Koeffizienten die Moduln $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$, so sind die Moduln der Glieder der Reihe

$$a_0,\ a_1 r,\ a_2 r^2,\ a_3 r^3, \dots$$

Die Reihe der Moduln

$$2) \qquad a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots$$

gewinnt man aus der Reihe

$$3) \qquad 1 + \frac{r}{r_0} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + \dots$$

indem man die Glieder dieser Reihe nacheinander mit

$$4) \qquad a_0\,, \quad a_1 r_0\,, \quad a_2 r_0^2, \dots$$

multipliziert. Die Reihe 3) gilt für jeden Wert r, der kleiner als r_0 ist und hat die Summe

$$\frac{r_0}{r_0 - r} \quad .$$

---

*) Vgl. Briot et Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques, 2. Aufl. Paris 1875, S. 76.

Ist nun jede der Zahlen 4) kleiner als eine gegebene Zahl B, so ist die Summe 2) kleiner als

$$\frac{r_0}{r_0 - r} B \quad ,$$

folglich gilt 2), wenn $r < r_0$, w. z. b. z.

Wenn r unbegrenzt wächst, so wachsen alle Moduln a_0, $a_1 r$, $a_2 r^2 \ldots$

Dabei sind nun zwei Fälle möglich: Entweder es bleiben für alle endlichen Werte von r alle diese Moduln endlich, oder sie bleiben bis zu einem endlichen Werte $r = R$ endlich, werden aber zum Teil für $r = R$, und somit auch für $r > R$, unendlich groß.

Im ersten Falle gilt die Reihe

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$$

für jedes endliche z; im letztern für jedes z, dessen Modul kleiner als R ist, also für alle Punkte der Ebene, die im Innern des mit dem Halbmesser R um den Nullpunkt beschriebenen Kreises k liegen, und ist ungültig für alle außerhalb des Kreises liegende Punkte, da sie in denselben Glieder mit unendlichen Moduln erhält; für Punkte auf dem Umfange von k, den wir den Gültigkeitskreis der Potenzreihe nennen, bleibt die Gültigkeit noch unentschieden und bedarf in jedem Falle einer besondern Untersuchung.

11. Ist $f(z)$ endlich und eindeutig innerhalb eines Kreises, der auf der z-Fläche um die Mitte a beschrieben ist und der keinen Windungspunkt enthält, so ist für jeden Punkt t im Innern dieses Kreises

$$1) \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z - t} dz \quad ,$$

wobei das Integral über den Umfang des Kreises auszudehnen ist. Für jeden Punkt z dieses Umfangs ist

$$\operatorname{mod}(z - a) > \operatorname{mod}(t - a) \quad ,$$

daher gilt die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{z - t} = \frac{1}{z - a - (t - a)} = \frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{t - a}{z - a}}$$

$$= \frac{1}{z - a}\left[1 + \frac{t - a}{z - a} + \left(\frac{t - a}{z - a}\right)^2 + \left(\frac{t - a}{z - a}\right)^3 + \ldots\right] \quad .$$

Setzt man dies in 1) ein und integriert die einzelnen Glieder, was (nach 10) erlaubt ist, weil die Reihe für alle Punkte des Integrationsweges gilt, und $f(z)$ innerhalb desselben nicht unendlich wird, so erhält man

$$2) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z - a} dz + \frac{t - a}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z - a)^2} dz + \frac{(t - a)^2}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z - a)^3} dz + \ldots$$

Die Integrale in dieser Reihenentwicklung sind in Nr. 9 bestimmt worden; wir haben dort gefunden

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z - a)^{k+1}} dz = \frac{f^{(k)}(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}$$

und erhalten daher aus 2)

$$3) \qquad f(t) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(t - a) + \frac{f''(a)}{1 \cdot 2}(t - a)^2 + \frac{f'''(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(t - a)^3 + \ldots$$

Dies ist die Verallgemeinerung der TAYLORschen Reihe; die Entwicklung ist für alle Punkte t im Innern eines um a geschlagenen Kreises gültig, wenn die Funktion f innerhalb dieses Kreises endlich und eindeutig ist und keinen Windungspunkt hat.

Will man diesen Gültigkeitsbereich soviel als möglich erweitern, so hat man die Windungspunkte und die Punkte zu bestimmen, in denen $f(t)$ unendlich wird. Der Kreis darf dann nicht weiter als bis zu demjenigen dieser Punkte ausgedehnt werden, der a am nächsten liegt.

Lassen wir in 3) den Punkt a mit dem Nullpunkte zusammenfallen, so entsteht die MACLAURINsche Reihe

$$4)\qquad f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} z + \frac{f''(0)}{1 \cdot 2} \cdot z^2 + \frac{f'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot z^3 + \ldots$$

12. Wir schließen hieran noch eine Bemerkung über Reihenentwicklungen von der Form

$$1)\qquad f(z) = A_0 + A_1 \cdot \frac{1}{z} + A_2 \cdot \frac{1}{z^2} + A_3 \cdot \frac{1}{z^3} + \ldots$$

Ersetzen wir $1 : z$ durch ζ, so entsteht

$$2)\qquad f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = A_0 + A_1 \zeta + A_2 \zeta^2 + A_3 \zeta^3 + \ldots$$

Daher ist

$$A_0 = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)_{\zeta=0} = f(\infty), \quad A_k = \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots k} \left[\frac{d^k f\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{d\zeta^k}\right]_{\zeta=0};$$

die Entwicklung ist für alle Werte von ζ gültig, deren Modul kleiner ist als der kleinste Modul der ζ, für welchen $f(1 : \zeta)$ unendlich wird; also gilt 2) für alle z, deren Modul größer ist als der größte Modul der z, welche $f(z)$ unendlich groß machen. Ist daher a der vom Nullpunkte entfernteste Punkt der z-Fläche, für den $f(z)$ unendlich wird, so gilt die Reihe 1) für alle Punkte der z-Fläche, die außerhalb des durch a um den Nullpunkt gezogenen Kreises liegen.

13. Wenn die Funktion $f(z)$ innerhalb und auf den Grenzen eines Ringes, der zwischen zwei um den Punkt a mit r_0 und r_1 geschlagenen Kreisen liegt, eindeutig und endlich ist, und die z-Fläche innerhalb der äußern Begrenzung des Ringes keinen Windungspunkt hat, und wenn ferner t ein Punkt im Innern der Ringfläche ist, so ist das über die vollständige Begrenzung des Ringes erstreckte Integral

$$\int \frac{f(z)}{z - t} dz = 2 \pi i f(t) \quad ,$$

also

$$f(t) = \frac{1}{2 \pi i} \int \frac{f(z)}{z - t} dz \quad .$$

Das Begrenzungsintegral besteht aus den Integralen entlang der beiden Kreise; bezeichnen wir dieselben mit $\int\limits_{(r_0)}$ und $\int\limits_{(r_1)}$, so ist

$$1)\qquad f(t) = \frac{1}{2 \pi i} \int\limits_{(r_1)} \frac{f(z)}{z - t} dz + \frac{1}{2 \pi i} \int\limits_{(r_0)} \frac{f(z)}{z - t} dt \quad .$$

Für das erste haben wir, wenn alle Punkte des Ringes im Innern des Kreises mit dem Halbmesser r_1 liegen, nach Nr. 11

$$2)\qquad \int\limits_{(r_1)} \frac{f(z)}{z - t} dz = \sum_1^{\infty} u_{-n} (t - a)^{n-1}, \quad u_{-n} = \int \frac{f(z)}{(z - a)^n} dz \quad ,$$

wobei die Integrale u_{-n} über alle Punkte des Kreises r_1 im positiven Sinne zu erstrecken sind. Für die Punkte des Kreises r_0 ist

$$\operatorname{mod}(z-a) < \operatorname{mod}(t-a) \quad .$$

Daher gilt die Entwicklung

$$\frac{1}{z-t} = -\frac{1}{(t-a)-(z-a)} = -\frac{1}{t-a}\left[1 + \frac{z-a}{t-a} + \left(\frac{z-a}{t-a}\right)^2 + \dots\right] \quad .$$

Also ist

$$3) \qquad \int\limits_{(r_0)} \frac{f(z)}{z-t}\,dz = -\sum_0^\infty u_n (t-a)^{-n-1}\,, \qquad u_n = \int\limits_{(r_0)} (z-a)^n f(z)\,dz \quad .$$

Die Integrale u_n sind über den Kreis mit dem Halbmesser r_0 im Sinne der abnehmenden Winkel (im positiven Sinne bezüglich der Ringfläche) zu erstrecken. Nimmt man sie ebenso, wie die u_{-n}, im Sinne wachsender Amplituden, so kann man 1), 2) und 3) folgendermaßen vereinen

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{-\infty}^{\infty} u_n (t-a)^{-n-1}\,, \qquad u_n = \int f(z)(z-a)^n\,dz \quad ,$$

wobei alle Integrale über den Kreis mit Radius r_0 erstreckt werden können, weil für keinen Punkt der Ringfläche eine der Funktionen

$$f(z)(z-a)^n$$

unendlich groß ist. Dies ergibt: Eine Funktion einer komplexen Veränderlichen, die innerhalb einer Ringfläche mit der Mitte a eindeutig und endlich ist, kann für jeden im Innern des Ringes gelegenen Wert t der Veränderlichen in eine nach steigenden und fallenden Potenzen von $(t-a)$ fortschreitende Reihe entwickelt werden.

14. Wenn die Funktion $f(z)$ für die im Innern des Kreises r_0 gelegenen Punkte $a_k, a_l, a_m, \dots$ unendlich groß wird, und zwar im Punkte a so unendlich wie

$$\frac{F_r(z)}{(z-a_r)^r}$$

d. h. so, daß

$$\lim (z-a_r)^m f(z) = \begin{cases} \infty, & \text{wenn } m < r \quad , \\ F_r(z), & \text{wenn } m = r \quad , \\ 0, & \text{wenn } m > r \quad , \end{cases}$$

wobei $F_r(z)$ eine im Punkte a_r endliche Funktion bezeichnet, so zerfallen die Integrale u_n in Integrale, die über verschwindend kleine Kreise um die Punkte $a_k, a_l, a_m, \dots$ und a erstreckt sind. Es ist z. B.

$$u_3 = k_3 + l_3 + m_3 + \dots \quad ,$$

wobei

$$k_3 = \int f(z)(z-a)^3\,dz \quad ,$$

und das Integral über einen um a_k geschlagenen unendlich kleinen Kreis zu erstrecken ist. Für die Punkte dieses Kreises kann man setzen

$$f(z) = \frac{F_k(z)}{(z-a_k)^k}\,, \qquad z-a = a_k - a \quad ;$$

daher hat man

$$k_3 = (a_k - a)^3 \int \frac{F_k(z)}{(z-a_k)^k}\,dz \quad .$$

Nach Nr. 9 ist unter der Voraussetzung, daß die a nicht Verzweigungspunkte sind,

$$\int \frac{F_k(z)}{(z-a_k)^k} dz = \frac{2\pi i}{k!} F_k^{k-1}(a_k) \quad ,$$

wobei $F^{k-1}(a_k)$ den Wert bezeichnet, den

$$\frac{d^{k-1}F(z)}{dz^{k-1}}$$

im Punkte a_k hat. Daher hat man schließlich

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot u_3 = \frac{1}{k!}(a_k - a)^3 F_k^{k-1}(a_k) + \frac{1}{l!}(a_l - a)^3 F_l^{l-1}(a_l) + \dots$$

§ 3. Logarithmus und Exponentialfunktion, Arcustangens und Tangente.

1. Wir geben nun neue Definitionen des Logarithmus, der Exponentialfunktion, der cyklometrischen und der goniometrischen Funktionen, die in gleicher Weise für reale und komplexe Veränderliche gelten.

Den Logarithmus werden wir durch eine Funktionalgleichung definieren; von dieser aus gelangen wir dazu, ihn durch ein bestimmtes Integral darzustellen. Die Funktionen $\operatorname{arc\,tang} z$, $\arcsin z$, $\arccos z$ definieren wir direkt durch bestimmte Integrale. Die Exponentialgröße und die goniometrischen Funktionen werden als Umkehrungen des Logarithmus und der cyklometrischen Funktionen definiert.

2. Den Logarithmus einer Zahl z definieren wir als die Funktion $f(z)$, welche die Eigenschaft hat

$$1) \qquad f(z \cdot z_1) = f(z) + f(z_1) \quad .$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung folgt sofort

$$f(z \cdot z_1 \cdot z_2) = f(z) + f(z_1) + f(z_2) \quad ,$$

$$2) \qquad f(z \cdot z_1 \cdot z_2 \dots z_n) = f(z) + f(z_1) + f(z_2) + \dots + f(z_n) \quad .$$

Setzen wir hierin $z = z_1 = z_2 \dots$, so entsteht

$$3) \qquad f(z^m) = m f(z) \quad ,$$

wobei m eine natürliche Zahl ist.

Ferner folgt aus 1)

$$f(z) = f(z z_1) - f(z_1) \quad .$$

Ersetzen wir hier $z z_1$ durch z, so haben wir für z zu setzen $z : z_1$ und erhalten

$$4) \qquad f\left(\frac{z}{z_1}\right) = f(z) - f(z_1) \quad .$$

3. Differenzieren wir die Gleichung

$$f(zt) = f(z) + f(t)$$

nach t, so entsteht

$$z f'(zt) = f'(t) \quad .$$

Hierin setzen wir $t = 1$ und erhalten

$$z f'(z) = f'(1) \quad .$$

Folglich ist

$$f'(z) = f'(1) \cdot \frac{1}{z} \quad ,$$

und daher weiter

$$f(z) = f'(1) \int \frac{dz}{z} \quad .$$

Nach 1) ist für $z_1 = 1$

$$f(z \cdot 1) = f(z) + f(1) \quad ,$$

folglich ist $f(1) = 0$, das Integral also zwischen den Grenzen 1 und z zu nehmen; wir haben daher

$$f(z) = f'(1) \cdot \int_1^z \frac{dz}{z} \quad .$$

Durch die Funktionalgleichung Nr. 2, 1) ist demnach der Logarithmus bis auf einen konstanten Faktor $\mu = f'(1)$ vollständig bestimmt. Dieser Faktor bleibt willkürlich; je nach Wahl desselben erhält man verschiedene Logarithmensysteme; die Zahl μ heißt der Modul des Systems. Als das natürliche Logarithmensystem bezeichnen wir das, für welches $f'(1) = 1$ genommen wird. Führen wir statt des allgemeinen Funktionszeichens $f(x)$ hierfür das besondere $L(x)$ ein, so ist also

$$1) \qquad L(x) = \int_1^z \frac{dz}{z} \quad .$$

Werden die Logarithmen, für welche $f'(1)$ einer gegebenen Zahl μ gleich ist, mit $\mathrm{Log}_\mu z$ bezeichnet, so ist

$$2) \qquad \mathrm{Log}_\mu z = \mu L z \quad .$$

Hiernach genügt es, ausschließlich die Funktion $L(z)$ weiter zu untersuchen.

4. Die Funktion $1 : z$ ist eine eindeutige Funktion der Punkte der z-Ebene und wird nur im Punkte $z = 0$ unendlich groß. Um den Einfluß des Integrationsweges auf das Integral

$$\int_1^z \frac{dz}{z}$$

zu erfahren, haben wir daher den Wert zu berechnen, den das Integral

$$\int \frac{dz}{z}$$

erhält, wenn es über den Umfang eines den Nullpunkt umgebenden Kreises erstreckt wird. Setzen wir in § 2, Nr. 9

$$f(z) = 1, \qquad t = 0 \quad ,$$

so ergibt sich für das gesuchte Integral der Wert

$$1) \qquad 2\pi i \quad .$$

Hieraus folgt: Der natürliche Logarithmus ist eine unendlich vieldeutige Funktion; die demselben Punkte zugehörigen Werte unterscheiden sich durch ganze Vielfache von $2\pi i$. Diese Größe $2\pi i$ wird als der Periodizitätsmodul des Logarithmus bezeichnet.

Um den von z abhängigen Teil des Logarithmus zu bestimmen, wählen wir für das Integral

$$\int_1^z \frac{dz}{z}$$

einen Integrationsweg, durch den der reale und der imaginäre Teil der Funktion gesondert werden; wir integrieren, wenn

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad \text{und} \quad 0 < \varphi < 2\pi \quad ,$$

zunächst auf der realen Achse von 1 bis r und dann auf einem Kreise um den Nullpunkt weiter von r bis zu z. Das erste Integral ist, da für diesen Teil des Integrationsweges $y = 0$ ist,

$$2) \qquad \int_1^r \frac{dx}{x} = lr \quad ,$$

wenn wir mit lr den realen Wert von Lr bezeichnen.

Für das zweite, das Kreisintegral, setzen wir

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad ;$$

da für diesen Teil des Weges r konstant ist, so ist

$$dz = r(-\sin\varphi + i\cos\varphi)\,d\varphi = i\cdot z\,d\varphi \quad ;$$

das Integral erstreckt sich von $\varphi = 0$ bis zur Amplitude von z, ist daher

$$3) \qquad \int_0^\varphi i\,d\varphi = i\varphi \quad .$$

Aus 1), 2), 3) folgt schließlich

$$4) \qquad Lz = Lr(\cos\varphi + i\sin\varphi) = lr + i\varphi + k\cdot 2\pi i \quad .$$

5. Der Logarithmus ist eine unendlich vieldeutige Funktion; so oft z auf dem Integrationswege den Nullpunkt umkreist, vermehrt oder vermindert sich der natürliche Logarithmus um $2\pi i$, je nachdem die Umkreisung im positiven oder negativen Sinne erfolgt. Um die Funktion

$$w = Lz$$

als eindeutige Funktion der Punkte einer Riemannschen Fläche zu erhalten, hat man für z eine Windungsfläche zu benutzen, die sich um den Nullpunkt windet und aus unzählig vielen Blättern besteht, die außer im Windungspunkte keine Verwachsung zeigen; diese Fläche ist als Schraubenfläche mit unendlich kleiner Ganghöhe aufzufassen. Wir wollen auf jeder Windung eine Gerade vom Nullpunkte aus in der Richtung der realen Achse ziehen; der durch zwei solche aufeinander folgende Geraden begrenzte Teil der z-Fläche heiße ein Blatt derselben. Für einen bestimmten Punkt z der Fläche nehmen wir den Wert des Lz zu

$$Lz = lr + i\varphi\,, \qquad 0 < \varphi < 2\pi$$

an; dann ist für alle Punkte desselben Blattes der Logarithmus durch dieselbe Formel dargestellt. Dieses Blatt heiße das Blatt 0, die darauf folgenden das Blatt 1, 2, 3, die vorhergehenden das Blatt $-1, -2, -3, \ldots$ In das Blatt k gelangt man vom Punkte 1 des Blattes 0 durch k-malige Umkreisung des Nullpunktes, wobei ein negatives k negativen Drehungssinn angibt; daher ist für alle Punkte des Blattes k

$$Lz = lr + i\varphi + 2k\pi i\,, \qquad 0 < \varphi < 2\pi \quad .$$

6. Wir konstruieren nun zu den Punkten der z-Fläche die zugehörigen Punkte der w-Ebene, und beginnen zunächst mit dem Blatte 0 (Fig. 61).

Für den an der Grenze der Blätter 0 und -1 liegenden Punkt 1 ist $w = 0$; durchläuft z die realen Werte von 1 bis ∞, so durchläuft w die positive reale Achse; durchläuft z die reale Strecke von 1 bis 0, so legt w die negative reale Achse zurück*). Beschreibt z von dem realen positiven Werte r aus einen positiven Kreisbogen $r\varphi$, so bleibt der reale Teil von Lz ungeändert gleich lr und es tritt nur der imaginäre Bestandteil $i\varphi$ hinzu, w beschreibt also ein Lot zur realen Achse bis zum Abstande φ von derselben. Allen Punkten eines in 0 begrenzten Strahls in der z-Fläche entsprechen also die Punkte einer Parallelen zur realen Achse, die durch den Punkt $i\varphi$ geht; der negativen realen Achse der z-Fläche entspricht insbesondere die durch πi gehende Parallele zur realen Achse der w-Ebene. Die Punkte der Geraden, in welcher die Blätter 0 und 1 zusammenhängen (ihr Grundriß ist OX) haben die Amplitude 2π; dieser Grenzlinie entspricht daher die durch $2\pi i$ gehende Parallele zur realen Achse.

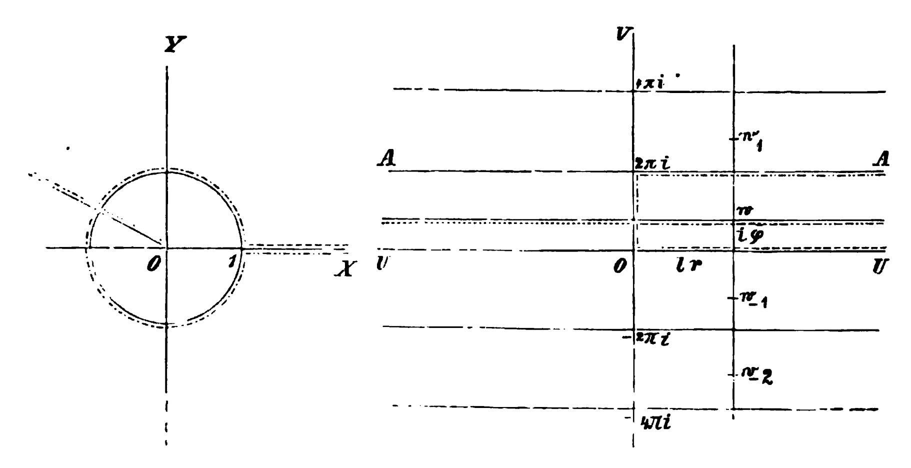


Fig. 61.

Allen Punkten des Blattes 0 der z-Fläche entsprechen daher die Punkte des Streifens $AAUU$ der w-Ebene; und umgekehrt, jedem Punkte w dieses Streifens entspricht eindeutig ein Punkt des Blattes 0 der z-Fläche, — der reale Teil von w ist nämlich der Logarithmus des Moduls von z, der imaginäre Teil von w ergibt sofort die Amplitude.

Der Logarithmus w_1 eines Punktes z_1 des Blattes 1 weicht vom Logarithmus des Punktes z im Blatte 0, der mit ihm gleichen Grundriß hat, nur um $2\pi i$ ab. Hieraus erkennen wir sofort, daß die Punkte des Blattes 1 sich auf dem Streifen der w-Ebene abbilden, dessen Ränder parallel zu OU durch $2\pi i$ und $4\pi i$ gehen. Teilt man die w-Ebene von der realen Achse aus in Streifen von der Breite 2π, so entsprechen den aufeinander folgenden Blättern der z-Fläche der Reihe nach die Streifen der w-Ebene. Durch diese Streifen wird die ganze w-Ebene erfüllt; wir schließen daher: Jede komplexe Zahl ist der natürliche Logarithmus einer eindeutig bestimmten Zahl.

7. Aus der Gleichung

$$L(1+z) = \int_0^z \frac{dz}{1+z}$$

gewinnen wir mit Hilfe des Taylorschen Satzes eine Potenzreihe für $L(1+z)$.

*) In Figur 61 ist die w-Fläche in $\frac{1}{6}$ des Maßstabes ausgeführt, wie die z-Fläche.

Da die Veränderlichenfläche, von deren Punkten $L(1+z)$ eine eindeutige Funktion ist, im Punkte $1+z=0$, d. i. $z=-1$ einen Windungspunkt hat, und zugleich in diesem und in keinem andern Punkte, abgesehen von den Blättern $\pm\infty$, unendlich groß wird, so gilt die Entwicklung von $L(1+z)$ nach der TAYLORschen Reihe für alle Punkte im Innern des Kreises, für welchen $\operatorname{mod} z < 1$.

Wir haben nun

$$f(0) = k \cdot 2\pi i, f'(0) = +1, f''(0) = -1, f'''(0) = 1 \cdot 2, f''''(0) = -1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots$$

und daher

$$L(1+z) = k \cdot 2\pi i + z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots \qquad \operatorname{mod} z < 1 \quad .$$

Für die Punkte des Blattes 0 ist $k = 0$ und daher

$$L(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots \qquad \operatorname{mod} z < 1 \quad .$$

8. Die natürliche Exponentialfunktion. Als natürliche Exponentialfunktion e^z bezeichnen wir die Größe, deren natürlicher Logarithmus z ist.

Es gibt nur eine Zahl, deren natürlicher Logarithmus einer gegebenen Zahl gleich ist; die natürliche Exponentialfunktion e^z ist daher eine eindeutige Funktion von z*).

Aus der Gleichung

$$L(a \cdot b) = La + Lb$$

folgt nach der Definition

$$a \cdot b = e^{(La + Lb)} \quad .$$

Setzen wir

$$La = z, \quad Lb = z_1 \quad ,$$

so ist

$$a = e^z, \quad b = e^{z_1} \quad ,$$

und damit ergibt sich aus 1) die Funktionalgleichung

$$1) \qquad e^z \cdot e^{z_1} = e^{z+z_1} \quad .$$

Da z und $z + k \cdot 2\pi i$ die Logarithmen desselben Logarithmanden sind, so folgt

$$2) \qquad e^{(z + k \cdot 2\pi i)} = e^z \quad .$$

Die Exponentialfunktion ändert sich also nicht, wenn die Veränderliche um ganze Vielfache von $2\pi i$ zu- oder abnimmt. Sie ist daher eine periodische Funktion und hat die Periode $2\pi i$. Nach 1) und 2) ist

$$e^{(z + k \cdot 2\pi i)} = e^z \cdot e^{k \cdot 2\pi i} = e^z \quad ,$$

folglich ist

$$3) \qquad e^{k \cdot 2\pi i} = 1 \quad .$$

Setzen wir $e^z = w$, so ist $z = Lw$ und daher

$$\frac{de^z}{dz} = \frac{dw}{dLw} \quad .$$

Da nun

$$\frac{dLw}{dw} = \frac{1}{w} = \frac{1}{e^z} \quad ,$$

so folgt

$$4) \qquad \frac{de^z}{dz} = e^z \quad .$$

*) Man müßte eigentlich die natürliche Exponentialfunktion von der vieldeutigen z-ten Potenz von e durch ein besonderes Symbol unterscheiden; es ist dies aber nicht üblich. Wo das Zeichen e^z eine vieldeutige Potenz bedeuten soll, muß dies besonders mitgeteilt werden.

Da e^z eine eindeutige und für alle endlichen z endliche Funktion von z ist, so kann e^z nach dem TAYLORschen Satze in eine für jedes endliche z gültige unendliche Reihe entwickelt werden; aus 4) folgt diese Reihe sofort zu

$$5)\qquad e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \dots$$

Wir sehen hieraus, daß diese Reihe, die in der Differentialrechnung für reale z abgeleitet wurde, auch für jedes endliche komplexe z gilt.

Aus der Gleichung

$$L\,r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = lr + i\varphi \quad ,$$

bei welcher rechts die Vielfachen des Periodizitätsmoduls $2\pi i$ wegbleiben können, wenn φ nicht auf eine Umdrehung beschränkt, die Vieldeutigkeit also in die Amplitude φ verlegt wird, folgt sofort

$$6)\qquad e^{(lr+i\varphi)} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad .$$

Ersetzen wir lr und φ durch x und y, so erhalten wir

$$7)\qquad e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \quad .$$

Setzen wir ferner in 6) $r = 1$, so folgt insbesondere

$$8)\qquad e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad .$$

9. Als Potenz a^z (für reale oder komplexe a und z) definieren wir die Funktion

$$a^z = e^{zLa} \quad .$$

Ist $a = \varrho e^{i\alpha}$ und z real, so ist, wenn ϱ^z real und positiv gerechnet wird,

$$a^z = e^{z(l\varrho+i\alpha)} = \varrho^z(\cos z\alpha + i\sin z\alpha) \quad ;$$

für reale z führt die Definition somit auf den bereits bekannten Begriff der Potenz eines beliebigen Dignanden mit realem Exponenten. Ist $z = x + iy$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} a^z &= e^{(x+iy)(l\varrho+i\alpha)} \\ &= e^{(xl\varrho-y\alpha)}[\cos(x\alpha + yl\varrho) + i\sin(x\alpha + yl\varrho)] \quad . \end{aligned}$$

Diese Funktion ist unendlich vieldeutig, weil α um ganze Vielfache von 2π vermehrt oder vermindert werden kann. Nur dann, wenn y verschwindet und x rational ist, tritt eine auf eine endliche Anzahl Werte beschränkte Vieldeutigkeit ein.

---

10. Die Funktion $\operatorname{Arc\,tang} z = \int\limits_0^z \frac{dz}{1+z^2}$.

Durch Zerlegung in Teilbrüche entsteht

$$\int\limits_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^z \frac{dz}{1+iz} + \int\limits_0^z \frac{dz}{1-iz}\right) \quad .$$

Ersetzen wir im ersten Integrale $1 + iz$, im zweiten $1 - iz$ durch ζ, so ergibt sich

$$\int\limits_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\left(\int\limits_1^{1+iz} \frac{d\zeta}{\zeta} - \int\limits_1^{1-iz} \frac{d\zeta}{\zeta}\right) \quad .$$

Daher folgt

$$1)\qquad \operatorname{Arc\,tang} z = \frac{1}{2i}\,L\,\frac{1+iz}{1-iz} \quad .$$

Die Funktion Arc tang z ist also unendlich vieldeutig, der Periodizitätsmodul ist

$$\frac{1}{2i} 2\pi i = \pi \quad .$$

Die Gleichung 1) ergibt nach der Grundeigenschaft des Logarithmus

$$\begin{aligned}\text{Arc tang}\, z + \text{Arc tang}\, z_1 &= \frac{1}{2i} L \frac{1+iz}{1-iz} \cdot \frac{1+iz_1}{1-iz_1} \\ &= \frac{1}{2i} L \frac{1-zz_1+i(z+z_1)}{1-zz_1-i(z+z_1)} \\ &= \frac{1}{2i} L \frac{1+i\cdot\dfrac{z+z_1}{1-zz_1}}{1-i\cdot\dfrac{z+z_1}{1-zz_1}} \quad .\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$2) \qquad \text{Arc tang}\, z + \text{Arc tang}\, z_1 = \text{Arc tang} \frac{z+z_1}{1-zz_1} \quad .$$

Ist ferner

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad ,$$

so ist

$$1 + iz = 1 - y + ix\,, \quad 1 - iz = 1 + y - ix \quad .$$

Folglich ist

$$L(1+iz) = l\sqrt{1+r^2-2y} + i \,\text{arc tang} \frac{x}{1-y} + k_1 \cdot 2\pi i \quad .$$

$$L(1-iz) = l\sqrt{1+r^2+2y} - i \,\text{arc tang} \frac{x}{1+y} + k_2 \cdot 2\pi i \quad .$$

Daher ist weiter

$$\text{Arc tang}(x+iy) = \frac{1}{4i} l \frac{1+r^2-2y}{1+r^2+2y} + \frac{1}{2} \text{arc tang} \frac{x}{1-y} + \frac{1}{2} \text{arc tang} \frac{x}{1+y} + k\pi \quad .$$

Die letzten beiden arc tang lassen sich nach 2) vereinigen; dadurch entsteht

$$3) \qquad \text{Arc tang}(x+iy) = \frac{1}{2} \text{arc tang} \frac{2x}{1-r^2} + \frac{1}{4i} l \frac{1+r^2-2y}{1+r^2+2y} + k\pi \quad .$$

Die Funktion $1:(1+z^2)$ wird unendlich für $z = \pm i$; die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 - \ldots$$

gilt daher innerhalb eines Kreises, der mit Halbmesser 1 um den Nullpunkt beschrieben ist. Aus dieser Reihe folgt durch Integration

$$\text{Arc tang}\, z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \ldots$$
$$\mod z < 1 \quad .$$

Diese Reihe gibt den Wert von Arc tang z, der mit z verschwindet.

11. Die Funktion tang w definieren wir als Umkehrung der Funktion $w = \text{arc tang}\, z$. Aus der Vieldeutigkeit von Arc tang z folgt sofort: Die Funktion tang w ist periodisch und hat die Periode π. Ferner folgt aus Nr. 10, 2)

$$1) \qquad \text{tang}(w+w_1) = \frac{\text{tang}\, w + \text{tang}\, w_1}{1 - \text{tang}\, w \,\text{tang}\, w_1} \quad .$$

Aus der Gleichung

$$\operatorname{Arc\,tang} z = \frac{1}{2i} L \frac{1+iz}{1-iz} = w$$

ergibt sich zunächst

$$\frac{1+iz}{1-iz} = e^{2iw} \quad ,$$

folglich ist

$$2) \qquad z = \frac{1}{i}\frac{e^{2iw}-1}{e^{2iw}+1} = \frac{1}{i}\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{e^{iw}+e^{-iw}} \quad .$$

Ist nun

$$w = u + iv \quad ,$$

so ist

$$e^{iw} = e^{-v+iu} = e^{-v}(\cos u + i \sin u) \quad ,$$

$$e^{-iw} = e^{v-iu} \quad = e^{v} \quad (\cos u - i \sin u) \quad .$$

Setzt man dies in 2) ein und erweitert mit $-i$, so folgt

$$3) \qquad \operatorname{tang}(u+iv) = \frac{(e^v + e^{-v})\sin u + i(e^v - e^{-v})\cos u}{(e^v + e^{-v})\cos u - i(e^v - e^{-v})\sin u} \quad .$$

Die Tangente wird Null für alle Werte von u und v, die den Gleichungen genügen

$$(e^v + e^{-v})\sin u = 0 \,, \quad (e^v - e^{-v})\cos u = 0 \quad ,$$

wenn für dieselben nicht zugleich der Nenner in $\operatorname{tang} w$ verschwindet. Reale Lösungen dieser Gleichungen, die ausschließlich in Betracht kommen, sind nur

$$v = 0 \,, \quad u = k\pi \quad .$$

Die Tangente wird unendlich, sobald die realen u und v den Gleichungen genügen

$$(e^v + e^{-v})\cos u = 0 \,, \quad (e^v - e^{-v})\sin u = 0 \quad ,$$

ohne daß zugleich der Zähler in 2) verschwindet, also für

$$v = 0 \,, \quad u = (2k+1)\tfrac{1}{2}\pi \quad .$$

Wir bemerken noch, daß das Integral jeder rationalen Funktion von z durch ein Aggregat einer rationalen Funktion und der natürlichen Logarithmen linearer Funktionen — die Logarithmen multipliziert mit Koeffizienten, unter denen auch i vorkommen kann — ausgedrückt wird.

§ 4. Arcussinus und Sinus, Arcuscosinus und Cosinus.

1. Wir untersuchen in diesem Abschnitte Integrale von der Form

$$\int f(z, \sqrt{R})\,dz \,, \quad R = a + 2bz + cz^2$$

wenn f eine rationale Funktion von z und $\sqrt{R}$ ist.

Im 1. Buche, § 4 ist gezeigt worden, wie durch eine rationale Änderung ein solches Integral in das Integral einer rationalen Funktion verwandelt werden kann; wir wollen indes von dieser Änderung hier keinen Gebrauch machen, sondern die Untersuchung ohne Beseitigung der Irrationalität führen. Jede rationale Funktion von z und $\sqrt{R}$ kann, wie leicht zu sehen ist, auf die Form gebracht werden

$$1) \qquad f(z, \sqrt{R}) = \frac{\varphi_1 + \psi_1\sqrt{R}}{\varphi + \psi\sqrt{R}} \quad .$$

wobei φ, ψ, φ_1, ψ_1 rationale ganze Funktionen von z sind. Aus 1) gewinnen wir durch Erweiterung mit $\varphi - \psi\sqrt{R}$

$$f(z, \sqrt{R}) = \frac{\Phi + \Psi \cdot \sqrt{R}}{\varphi^2 - \psi^2 R} = \frac{\Phi}{\varphi^2 - \psi^2 R} + \frac{\Psi \cdot R}{\varphi^2 - \psi^2 R} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}} \quad .$$

Hiernach zerfällt das vorgelegte Integral:

$$\int f(z, \sqrt{R})\, dz = \int \frac{\Phi}{\varphi^2 - \psi^2 R} dz + \int \frac{\Psi \cdot R}{\varphi^2 - \psi^2 R} \cdot \frac{dz}{\sqrt{R}} \quad .$$

Das erste Integral ist frei von Irrationalem und ist durch die Untersuchungen des vorigen Abschnitts erledigt. Im zweiten zerlegen wir den rationalen Faktor in die Summe einer ganzen und einer echt gebrochenen Funktion,

$$\frac{\Psi \cdot R}{\varphi^2 - \psi^2 R} = \Lambda + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} \quad ,$$

wo Λ, M, N ganze Funktionen sind, M von niederem Grade als N. Den Teil

$$\int \Lambda \cdot \frac{dz}{\sqrt{R}}$$

bearbeiten wir nach § 4, Nr. 4 des 1. Buches; den Bruch $\mathrm{M} : \mathrm{N}$ zerlegen wir in Partialbrüche und wenden die in § 4, Nr. 5 angegebene Reduktion an. Dies zusammenfassend erkennen wir: Das Integral

$$2) \qquad \int f(z, \sqrt{R})\, dz\,, \quad R = a + 2bz + cz^2 \quad ,$$

wobei f rational in Bezug auf z und $\sqrt{R}$ ist, zerfällt in eine rationale ganze Funktion von z, Logarithmen algebraischer Funktionen von z, ein Produkt einer rationalen ganzen Funktion mit $\sqrt{R}$, und in Integrale der Form

$$3) \qquad \int \frac{dz}{\sqrt{R}} \quad .$$

Wir zerlegen den Radikanden in seine lineare Faktoren

$$a + 2bz + cz^2 = c(\alpha - z)(\beta - z) = -c(\alpha - z)(-\beta + z) \quad ,$$

ersetzen

$$z = \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \zeta + \frac{\alpha + \beta}{2} \quad ,$$

also

$$\alpha - z = \frac{\alpha - \beta}{2}(1 - \zeta)\,, \qquad -\beta + z = \frac{\alpha - \beta}{2}(1 + \zeta) \quad ,$$

und erhalten hierdurch

$$\sqrt{R} = \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sqrt{-c} \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \quad ,$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \cdot \int \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad .$$

2. Die Funktion $\operatorname{Arc}\sin z$ definieren wir durch das bestimmte Integral

$$\operatorname{Arc}\sin z = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \quad .$$

Die Funktion $1:\sqrt{1-z^2}$ ist eine eindeutige Funktion der Punkte einer zweiblätterigen RIEMANNschen Fläche (§ 1, Nr. 26), welche die beiden Windungspunkte $+1$ und -1 hat und deren beide Blätter entlang der Geraden zwischen den Windungspunkten verwachsen sind; in beiden Windungspunkten wird die Funktion unendlich.

Um zu erfahren, welchen Einfluß der Integrationsweg auf das Integral hat, haben wir das Integral über die geschlossenen Wege zu erstrecken, welche Windungspunkte einschließen. Diese Wege lassen sich auf folgende Arten von Wegen zurückführen: 1. Wege, die einen einzigen Windungspunkt umkreisen und daher sich in beide Blätter begeben müssen; 2. Wege, die beide Windungspunkte umkreisen und nur in einem Blatte verlaufen; zur ersten Art gehören die Wege Fig. 62, A und B, zur andern C und D.

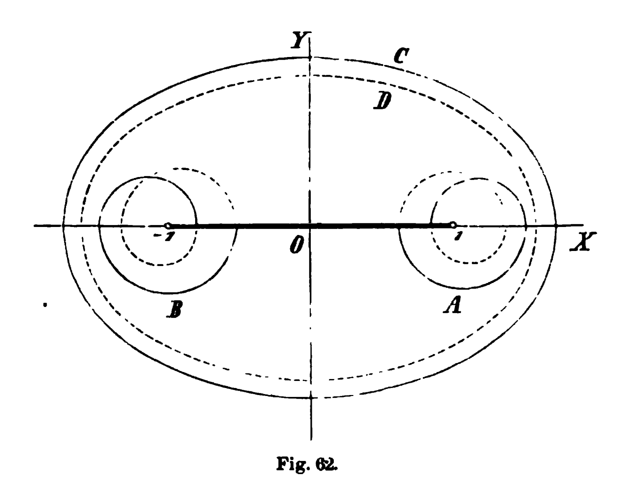


Fig. 62.

Um die Umkreisungsintegrale der ersten Art zu erhalten, integrieren wir über einen Weg, der einen konstanten verschwindend kleinen Abstand von $+1$ hat. Bezeichnen wir mit r den Abstand des Punktes z von $+1$, und mit φ den Winkel der realen Achse mit r, so ist

$$z = 1 + r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 1 + re^{i\varphi} \quad ,$$

daher ist zu untersuchen

$$\lim_{r=0} ir \int_0^{4\pi} \frac{e^{i\varphi}\,d\varphi}{\sqrt{-2re^{i\varphi} - r^2e^{2i\varphi}}} = \lim \sqrt{r} \int_0^{4\pi} \frac{\sqrt{e^{i\varphi}}\,d\varphi}{\sqrt{2+re^{i\varphi}}} \quad .$$

Nimmt r unendlich ab, so bleibt die unter dem Integralzeichen stehende Funktion, also auch das Integral selbst, endlich; da es mit einem verschwindenden Faktor multipliziert wird, so ist der Grenzwert Null. Wir sehen daher:

Das Integral $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ ausgedehnt über eine geschlossene Kurve, die nur einen Windungspunkt umkreist, ist Null.

Anders verhält es sich mit den Wegen der zweiten Art. Um über diese zu urteilen, wollen wir C (Fig. 63) auf folgenden Weg zusammenziehen. Wir gehen vom Nullpunkte aus entlang der realen Achse bis dicht an $+1$, beschreiben dann um $+1$ einen verschwindend kleinen Kreis bis dicht an die Verwachsung (also ganz im obern Blatte) gehen dann entlang der realen Achse bis dicht an -1, beschreiben einen verschwindend kleinen Kreis um -1, und kehren dann entlang der realen Achse zum Nullpunkte zurück. Die Kreisintegrale sind

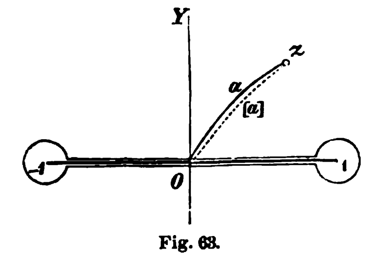


Fig. 63.

$$\lim_{r=0} \sqrt{r} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{e^{i\varphi}}\,d\varphi}{\sqrt{2+re^{i\varphi}}} \quad \text{und} \quad \lim_{r=0} \sqrt{r} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{e^{i\varphi}}\,d\varphi}{\sqrt{-2+re^{i\varphi}}} \quad ,$$

sie verschwinden beide. Für die geradlinigen Integrale von 0 bis 1, von 1 bis 0, von 0 bis -1 und von -1 bis 0 haben wir auf das Vorzeichen zu achten, das $\sqrt{1-z^2}$ auf diesen Wegen hat. Wir wollen annehmen, im Nullpunkte des obern Blattes sei die Wurzel $= +1$; alsdann ist sie auf dem ersten Teile des Weges, von 0 bis $+1$, positiv; durch einmaliges Umkreisen eines Windungspunktes wechselt die Wurzel das Vorzeichen, für den Weg von $+1$ über 0 bis -1 gilt also der negative Wurzelwert; durch einmaliges Umkreisen des Windungspunktes -1 tritt dann nochmaliger Zeichenwechsel ein, auf dem Wege von -1 bis 0 zurück gilt also wieder das positive Vorzeichen. Es ist daher das gesuchte Begrenzungsintegral, wenn überall die Wurzel positiv gerechnet wird,

$$J = \int_0^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{+1}^{0} \frac{dx}{-\sqrt{1-x^2}} + \int_0^{-1} \frac{dx}{-\sqrt{1-x^2}} + \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad .$$

Ersetzt man im dritten und vierten Integrale x durch $-x$, so erhält man

$$J = 4 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\pi \quad .$$

Integriert man in der gleichen Richtung über den Weg, der im zweiten Blatte unter dem soeben beschriebenen liegt, so hat auf allen Punkten dieses Weges die Wurzel das andre Vorzeichen, also ist dieses Integral $J_1 = -2\pi$. Beachten wir, daß die soeben verwendete Integrationsrichtung negativ war, so folgt:

Das Integral $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, im positiven Sinne über eine geschlossene Kurve erstreckt, die in einem Blatte liegt und beide Windungspunkte einmal umkreist, ist $\mp 2\pi$; das obere Zeichen gilt für das Blatt, in dessen Nullpunkte die Wurzel den Wert $+1$ hat.

Hieraus folgt weiter: Die Funktion $\operatorname{Arc}\sin z$ ist unendlich vieldeutig, und hat den realen Periodizitätsmodul 2π.

3. Um das Integral $\operatorname{Arc}\sin z$ auszuführen, benutzen wir die Differentialformel

$$\frac{d(z+\sqrt{z^2-1})}{z+\sqrt{z^2-1}} = \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{1}{i}\,\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \quad .$$

Aus dieser Formel folgt durch Integration von 0 bis z die Gleichung

$$1) \qquad \operatorname{Arc}\sin z = i\,L\,\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{i} \quad .$$

Durch diese Gleichung hätte die Untersuchung des $\operatorname{Arc}\sin z$ ebenso wie die des $\operatorname{Arc}\operatorname{tang} z$ direkt an den Logarithmus angeschlossen werden können; doch erschien es zweckmäßiger, den Nachweis des Periodizitätsmoduls durch Betrachtung des Integrals $\int dz : \sqrt{1-z^2}$ auf der zweiblätterigen Fläche zu gewinnen. Wir werden jetzt von 1) Gebrauch machen, um in $\operatorname{Arc}\sin z$ das Reale vom Imaginären zu sondern. Setzen wir

$$i\,L\,\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{i} = u + iv \quad ,$$

so ist

$$L\,\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{i} = v - iu \quad ,$$

mithin

$$z + \sqrt{z^2 - 1} = i e^v (\cos u - i \sin u)$$
$$= e^v (\sin u + i \cos u) \quad .$$

Der reziproke Wert ist

$$z - \sqrt{z^2 - 1} = e^{-v} (\sin u - i \cos u) \quad .$$

Addieren wir diese Gleichungen und ersetzen z durch $x + iy$, so ergibt sich

$$2) \qquad \tfrac{1}{2}(e^v + e^{-v}) \sin u = x \,, \quad \tfrac{1}{2}(e^v - e^{-v}) \cos u = y \quad .$$

Hieraus folgt weiter

$$x^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}(e^{2v} + e^{-2v}) + \tfrac{1}{2}\sin^2 u - \tfrac{1}{2}\cos^2 u \quad ,$$

mithin ist

$$1 + x^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}(e^v + e^{-v})^2 + \sin^2 u \quad ,$$

und daher

$$(1 + x)^2 + y^2 = [\tfrac{1}{2}(e^v + e^{-v}) + \sin u]^2 \quad ,$$
$$(1 - x)^2 + y^2 = [\tfrac{1}{2}(e^v + e^{-v}) - \sin u]^2 \quad .$$

Hieraus ergibt sich

$$3) \qquad \begin{cases} \tfrac{1}{2}(e^v + e^{-v}) + \sin u = \sqrt{(1 + x)^2 + y^2} \quad , \\ \tfrac{1}{2}(e^v + e^{-v}) - \sin u = \sqrt{(1 - x)^2 + y^2} \quad ; \end{cases}$$

für reale v und u ist

$$\tfrac{1}{2}(e^v + e^{-v}) \geq 1 \,, \quad -1 \leq \sin u \leq 1 \quad ;$$

daher gelten bei beiden Wurzeln nur die positiven Werte. Benutzen wir die Abkürzungen

$$\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{(1 + x)^2 + y^2} + \sqrt{(1 - x)^2 + y^2}\right] = \sigma \quad ,$$
$$\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{(1 + x)^2 + y^2} - \sqrt{(1 - x)^2 + y^2}\right] = \tau \quad ,$$

so ergibt sich aus 3)

$$4) \qquad \tfrac{1}{2}(e^v + e^{-v}) = \sigma \quad ,$$

$$5) \qquad \sin u = \tau \quad .$$

Aus 5) folgt

$$6) \qquad u = \operatorname{Arc} \sin \tau \quad .$$

Aus 4) ergibt sich

$$7) \qquad e^v = \sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1} \quad ,$$

$$8) \qquad v = l(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}) \quad .$$

Führen wir 6) und 8) in 1) ein, so erhalten wir

$$\operatorname{Arc} \sin z = \operatorname{Arc} \sin \tau + i\, l(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}) + 2k\pi \quad .$$

4. Wir haben noch zu entscheiden, welcher Wert von $\operatorname{Arc}\sin\tau$ und welches Vorzeichen von $\sqrt{\sigma^2 - 1}$ gilt.

Wird festgesetzt, daß im Nullpunkte des obern Blattes $\sqrt{1 - z^2}$ den Wert $+1$ (nicht -1) hat, und integriert man im obern Blatte über eine Strecke der realen Achse bis zu einem Punkte $x < 1$, so ergibt sich ein eindeutig bestimmter Wert $\operatorname{arc}\sin\tau$; ist der Integrationsweg dagegen eine Strecke der positiven imaginären Achse des obern Blattes von 0 bis y, so hat man

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = i \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} \quad ,$$

wobei die Wurzel positiv zu nehmen ist; hieraus folgt ein positiver Wert von

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} \quad ,$$

folglich ist im obern Blatte $\sqrt{\sigma^2-1}$ positiv zu nehmen. Daher ergibt sich für das obere Blatt

$$\operatorname{Arc\,sin} z = \arcsin\tau + i\,l\left(\sigma + |\sqrt{\sigma^2-1}\right) + 2k\pi \quad ,$$

wo das Zeichen $|\sqrt{}$ die positive Wurzel bezeichnet.

Im untern Blatte ist im Nullpunkte $\sqrt{1-z^2} = -1$, daher ist hier, unter Hinzurechnung des Integrals auf der Strecke vom Nullpunkte des obern Blattes entlang der Verwachsung bis zum Punkte $+1$, Umgehung dieses Punktes auf einem unendlich kleinen Kreise und Fortschritt im untern Blatte entlang der Verwachsung bis zum Nullpunkte des untern Blattes,

$$\begin{aligned} \operatorname{Arc\,sin}(z) &= \pi - \arcsin\tau - i\,l\left(\sigma + |\sqrt{\sigma^2-1}\right) + 2k\pi \quad , \\ &= -\arcsin\tau + i\,l\left(\sigma - |\sqrt{\sigma^2-1}\right) + (2k+1)\pi \quad , \end{aligned}$$

wobei (z) einen Punkt des untern Blattes bezeichnet.

5. Die Funktion $(1+z)^m$, in der m keine ganze Zahl sei, hat in $z=-1$ einen Windungspunkt, läßt sich daher innerhalb eines Kreises, der um den Nullpunkt mit dem Halbmesser 1 beschrieben ist, nach Potenzen von z entwickeln.

Die binomische Reihe

$$1) \qquad (1+z)^m = 1 + \binom{m}{1}z + \binom{m}{2}z^2 + \binom{m}{3}z^3 + \dots$$

gilt daher innerhalb des Einheitskreises. Die rechte Seite ist eindeutig, die linke dagegen vieldeutig. Erzeugt man die RIEMANNsche Fläche, für die $(1+z)^m$ eine eindeutige Funktion des Ortes in der Fläche ist, so liefert die Reihe den Wert der Funktion in dem Blatte, für dessen Nullpunkt die Funktion den Wert 1 hat; die andern Werte erhält man hieraus durch Multiplikation mit komplexen Wurzeln der Einheit.

Ersetzt man in 1) z durch $-z^2$ und nimmt $m=-\frac{1}{2}$, so entsteht

$$2) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1\cdot 3}{1\cdot 4}\cdot z^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}z^6 + \dots \qquad \operatorname{mod} z < 1 \quad .$$

Die Integration dieser Reihe liefert

$$3) \qquad \operatorname{Arc\,sin} z = \frac{z}{1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 5}\cdot\frac{z^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{z^7}{7} + \dots + 2k\pi$$
$$\operatorname{mod} z < 1 \quad .$$

Diese unendliche Reihe gibt die Werte von $\operatorname{Arc\,sin} z$ für die Punkte z desselben Kreises, für welche die Reihe 2) die Werte von $1:\sqrt{1-z^2}$ liefert. Wenn wir in der Gleichung

$$\operatorname{Arc\,sin} z = i\,L\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{i}$$

z durch iz ersetzen, so entsteht

$$\operatorname{Arc\,sin} iz = i\,L\left(z+\sqrt{z^2-1}\right) \quad ;$$

wird dieselbe Änderung in 3) ausgeführt, so ergibt sich

$$4) \qquad L\left(z+\sqrt{z^2+1}\right) = \frac{z}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{z^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{z^7}{7} + \dots$$
$$+\, i\cdot 2k\pi\,, \qquad \operatorname{mod} z < 1 \quad .$$

6. Wollen wir Arc sin z als eindeutige Funktion des Ortes der für $1 : \sqrt{1 - z^2}$ konstruierten RIEMANNschen Fläche darstellen, so muß die Fläche, die zweifach zusammenhängend ist, durch einen geeigneten Querschnitt in eine einfach zusammenhängende verwandelt werden. Zu diesem Zwecke zerschneiden wir die z-Fläche im obern Blatte entlang der positiven imaginären Achse, und setzen diesen Schnitt über die Verwachsung hinweg ins untere Blatt fort. (In Fig. 64 ist der Schnitt durch eine Doppellinie angedeutet, durch welche die beiden Ränder des Schnittes dargestellt werden sollen.) Den Nullpunkt, von welchem die Integration ausgeht, nehmen wir, wie immer, im obern Blatte, oberhalb der Verwachsung und rechts vom Querschnitte an.

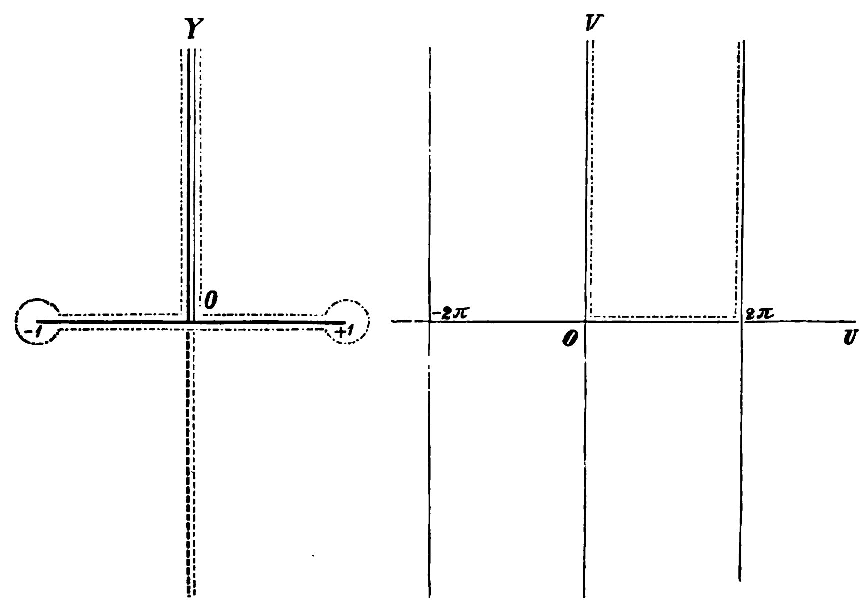


Fig. 64.

Wird ferner angenommen, daß Arc sin z für den Nullpunkt den Wert $2k\pi$ hat, wo nun k eine bestimmte natürliche Zahl bedeutet, so ist für jeden Punkt der z-Fläche die Funktion Arc sin z eindeutig bestimmt, wenn wir festsetzen, daß die z-Fläche durch die Ränder des Querschnitts begrenzt ist, daß also der Integrationsweg den Querschnitt nirgends überschreiten darf. Um von einem Punkte des Querschnitts zu dem auf dem andern Rande gegenüberliegenden Punkte zu gelangen, haben wir eine Kurve zu beschreiben, die beide Windungspunkte umkreist; in zwei gegenüberliegenden Punkten des Querschnitts hat also Arc sin z Werte, die um 2π voneinander verschieden sind.

Nehmen wir zunächst $k = 0$ an, so entspricht dem Nullpunkte der z-Fläche der Nullpunkt der w-Ebene. Geht z von 0 entlang der Verwachsung bis 1, so durchläuft $w = \arcsin z$ die reale Achse von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$; geht z (nach Umgehung des Windepunkts 1 in einem verschwindend kleinen Kreise) auf der andern Seite der Verwachsung bis -1, so geht w von $\frac{1}{2}\pi$ bis $\frac{3}{2}\pi$; kehrt z oberhalb der Verwachsung bis zu dem Punkte des Querschnitts zurück, der O gegenüberliegt, so geht w weiter bis zu 2π. Geht z entlang des Querschnitts von 0 bis $i\eta$, so ist

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = i \int_0^\eta \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} = i\, l(\eta + \sqrt{1 + \eta^2}) \quad .$$

Dem positiven Teile des rechten Querschnittrandes entspricht daher die positive imaginäre Achse der w-Ebene, dem negativen Teile die negative. Dem andern Rande des Querschnitts entspricht die Gerade, welche die w-Werte $2\pi + iv$ enthält, also im Abstande 2π zur imaginären Achse parallel ist. Der ganzen durch den Querschnitt begrenzten z-Fläche entspricht der von der v-Achse und der Parallelen $u = 2\pi$ begrenzte Streifen der w-Ebene. Die obere Hälfte des Streifens entspricht dem obern Blatte, die untere dem untern der z-Fläche.

7. Um die Beziehung der z-Fläche und dieses Streifens der w-Ebene vollständig aufzuhellen, wollen wir untersuchen, welchen Kurven der z-Fläche die zu den Achsen parallelen Geraden der w-Ebene entsprechen.

Soll in $w = \operatorname{Arc} \sin z = u + iv$ der reale bezw. der imaginäre Teil konstant sein, so müssen τ, bezw. σ konstante Werte haben. Gehören zu $u = u_0$ bezw. $v = v_0$ die Werte $\tau = \tau_0$, bezw. $\sigma = \sigma_0$, so entspricht

$$1)\quad \begin{cases} u = u_0 \text{ den Punkten } \sqrt{(1+x)^2 + y^2} - \sqrt{(1-x)^2 + y^2} = \tau_0 \quad , \\ v = v_0 \text{ den Punkten } \sqrt{(1+x)^2 + y^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2} = \sigma_0 \quad . \end{cases}$$

Bezeichnen wir in der z-Fläche die Windungspunkte -1 und $+1$ mit F und F_1 und den Punkt x, y mit P, so ist

$$PF = \sqrt{(1+x)^2 + y^2}\,, \qquad PF_1 = \sqrt{(1-x)^2 + y^2} \quad .$$

Die Gleichungen 1) gehen somit über in

$$PF - PF_1 = \tau_0\,, \qquad PF + PF_1 = \sigma_0 \quad .$$

Hieraus folgt: Eine Parallele zur V-Achse ($u = u_0$) entspricht einem Hyperbelaste der z-Fläche; eine Parallele zur U-Achse ($v = v_0$) entspricht einer Ellipse der z-Fläche. Diese Ellipsen und Hyperbeln haben ihre Brennpunkte in den Windungspunkten. Eine innerhalb der obern (untern) Streifenhälfte liegende Parallele zur U-Achse entspricht einer Ellipse im obern (untern) Blatte der z-Fläche. Die beiden Äste derselben Hyperbel gehören zwei entgegengesetzt gleichen Werten von τ, mithin zwei Parallelen der V-Achse zu, die gleich weit von den Rändern des Streifens in der w-Ebene abstehen; zwei Hyperbeläste, von denen der eine aus der obern Hälfte des ersten Blattes in die untere des zweiten Blattes sich fortsetzt, während der andre aus der untern Hälfte des ersten Blattes nach der obern des zweiten geht, und mit dem ersten Aste sich deckt, gehören zu zwei Parallelen der V-Achse, deren Abscissen den Bedingungen genügen

$$\operatorname{arc} \sin u = \tau_0\,, \qquad 0 < u < 2\pi \quad .$$

Hieraus folgt, daß die Abscissen u_0 und u_0' der Parallelen zur V-Achse, die zwei sich deckenden Hyperbeln entsprechen, die Summe π oder 3π haben.

Hieraus erkennen wir: Jedem Punkte des Streifens der w-Ebene entspricht ein und nur ein Punkt der z-Fläche.

Wenn wir nun die Funktion $\operatorname{Arc} \sin z$ im Nullpunkte statt mit dem Werte Null mit den Werten

$$\ldots -6\pi,\ -4\pi,\ -2\pi,\ +2\pi,\ +4\pi,\ +6\pi \ldots$$

beginnen lassen, so ist ersichtlich, daß den Punkten der z-Fläche immer andre Streifen der w-Ebene entsprechen, alle parallel der V-Achse und von der Breite 2π, so daß nun die ganze W-Ebene von solchen Streifen bedeckt wird.

8. Der Summensatz für den Arcussinus. Neben den Summensätzen für den Logarithmus und Arcustangens

$$L z + L \zeta = L(z\zeta) \quad ,$$

$$\operatorname{Arc\,tang} z + \operatorname{Arc\,tang} \zeta = \operatorname{Arc\,tang} \frac{z+\zeta}{1 - z\zeta} \quad ,$$

steht ein verwandter Satz für den Arcussinus, der für reale Werte der Veränderlichen ebenfalls bereits aus den Elementen bekannt ist. Setzt man

$$\operatorname{Arc\,sin} z = u + iv \,, \quad \operatorname{Arc\,sin} \zeta = \mathfrak{u} + i\mathfrak{v} \quad ,$$

so ist

$$\operatorname{Arc\,sin} z + \operatorname{Arc\,sin} \zeta = u + \mathfrak{u} + i(v + \mathfrak{v}) \quad .$$

Der Geraden der w-Ebene, die im Abstande $u + \mathfrak{u}$ zur V-Achse parallel ist, entspricht ein Hyperbelast der z-Fläche; der Geraden, die im Abstande $v + \mathfrak{v}$ der U-Achse parallel ist, entspricht eine Ellipse der z-Fläche; der Hyperbelast hat mit der Ellipse auf der z-Fläche nur einen wirklichen Schnittpunkt; wird dieser mit Z bezeichnet, so ist

$$\operatorname{Arc\,sin} z + \operatorname{Arc\,sin} \zeta = \operatorname{Arc\,sin} Z \quad .$$

Frei von geometrischen Betrachtungen erreichen wir das Ziel folgendermaßen: Wir bestimmen zunächst den Funktionszusammenhang zwischen z und ζ, für welchen die Gleichung erfüllt ist

$$1) \qquad \int_0^z \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}} + \int_0^\zeta \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}} = c \quad .$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß unendlich kleine von z und ζ herrührende Zunahmen beider Integrale die Summe Null haben müssen, daß also

$$2) \qquad \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0 \quad .$$

Werden die Nenner beseitigt, so entsteht

$$\sqrt{1-\zeta^2}\,dz + \sqrt{1-z^2}\,d\zeta = 0 \quad .$$

Hier integrieren wir teilweise und erhalten

$$z\sqrt{1-\zeta^2} + \zeta\sqrt{1-z^2} + \int z\zeta\left(\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\right) = \text{Konst.}$$

Das letzte Integral verschwindet gemäß der Gleichung 1), daher ergibt sich der gesuchte Zusammenhang zu

$$3) \qquad z\sqrt{1-\zeta^2} + \zeta\sqrt{1-z^2} = \gamma \quad .$$

Um den Zusammenhang der Konstanten γ und c zu erkennen, vergleichen wir die unendlich kleinen Änderungen, die γ und c erleiden, wenn z und ζ sich um verschwindende Beträge verändern. Wir erhalten aus 1) und 3)

$$dc = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad ,$$

$$d\gamma = \sqrt{1-\zeta^2}\cdot dz + \sqrt{1-z^2}\cdot d\zeta - z\zeta\left(\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\right) \quad ,$$

$$= -(z\zeta - \sqrt{1-z^2}\cdot\sqrt{1-\zeta^2})\,dc \quad .$$

Nun ist

$$1-\gamma^2 = 1 - z^2 - \zeta^2 + 2z^2\zeta^2 - 2z\zeta\sqrt{1-z^2}\cdot\sqrt{1-\zeta^2} \quad ,$$
$$= (1-z^2)(1-\zeta^2) + z^2\zeta^2 - 2z\zeta\sqrt{1-z^2}\cdot\sqrt{1-\zeta^2} \quad .$$

Daher folgt

$$4)\qquad dc = \frac{d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \quad .$$

Für $x = y = 0$ verschwindet γ, und c hat einen der Werte $k\cdot 2\pi$; hieraus und aus 4) folgt

$$c = \int_0^\gamma \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}} \quad .$$

Dies ergibt den Summensatz

$$\operatorname{Arc}\sin z + \operatorname{Arc}\sin\zeta = \operatorname{Arc}\sin\left(z\sqrt{1-\zeta^2} + \zeta\sqrt{1-z^2}\right) \quad .$$

9. Als den Sinus der komplexen Zahl $w = u + iv$ definieren wir die Zahl z, die der Gleichung genügt

$$\operatorname{Arc}\sin z = w \quad .$$

Zu jedem Werte von w gehört ein eindeutig bestimmtes z, die Funktion $\sin w$ ist also eine eindeutige Funktion der Veränderlichen w. Nimmt w alle Werte an, die innerhalb des Streifens zwischen $u = 0$ und $u = 2\pi$ liegen, so durchläuft $z = \sin w$ alle möglichen Werte; dabei nimmt $\sin w$ jeden Wert zweimal an, nämlich für $w = u + iv$ denselben wie für $w = \pi - (u + iv)$, es ist also

$$\sin w = \sin(\pi - w) \quad .$$

Für alle Zahlen w, die sich um gerade Vielfache von 2π unterscheiden, hat $\sin w$ denselben Wert, es ist

$$\sin w = \sin(w + 2k\pi) \quad .$$

Der Sinus ist somit eine periodische Funktion und hat die reale Periode 2π. Aus Nr. 3, 2) ergibt sich sofort

$$\sin(u + iv) = \frac{e^v + e^{-v}}{2}\sin u + i\,\frac{e^v - e^{-v}}{2}\cos u \quad .$$

10. Die Funktion $\operatorname{Arc}\cos z$ definieren wir durch die Gleichung

$$1)\qquad \operatorname{Arc}\cos z = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc}\sin z \quad .$$

Die Funktion $\operatorname{Arc}\cos z$ ist daher unendlich vieldeutig und hat denselben Periodizitätsmodul 2π, wie $\operatorname{Arc}\sin w$. Drückt man in dem Summensatze

$$\operatorname{Arc}\sin\left(z\sqrt{1-\zeta^2} + \zeta\sqrt{1-z^2}\right) - \operatorname{Arc}\sin z = \operatorname{Arc}\sin\zeta \quad ,$$

ζ durch $z\sqrt{1-\zeta^2} + \zeta\sqrt{1-z^2} = z_1$ und z aus, so entsteht

$$2)\qquad \operatorname{Arc}\sin z_1 - \operatorname{Arc}\sin z = \operatorname{Arc}\sin\left(z_1\sqrt{1-z^2} - z\sqrt{1-z_1^2}\right) \quad .$$

Schreibt man für 1)

$$\operatorname{Arc}\cos z = \operatorname{Arc}\sin 1 - \operatorname{Arc}\sin z \quad ,$$

und benutzt 2) indem man z_1 durch 1 ersetzt, so folgt

$$3)\qquad \operatorname{Arc}\cos z = \operatorname{Arc}\sin\sqrt{1-z^2} \quad .$$

Welchen Wert der Quadratwurzel man hierin zu nehmen hat, ist ebensowenig unbestimmt, wie bei den Quadratwurzeln im Summensatze.

Ist $\operatorname{Arc}\cos z = w$, so gehört zu jedem w ein eindeutig bestimmtes z. Wir definieren die Funktion $z = \cos w$ durch die Gleichung

$$\operatorname{Arc}\cos z = w \quad ;$$

es ist mithin $\cos w$ eine eindeutige Funktion von w. Aus der Vieldeutigkeit von $\operatorname{Arc}\cos z$ folgt: Die Funktion $\cos w$ ist periodisch und hat die reale Periode 2π. Aus 3) folgt

$$4) \qquad \cos w = \sqrt{1 - \sin^2 w} \quad .$$

Schreibt man für 1)

$$\operatorname{Arc}\sin z = \tfrac{1}{2}\pi \dot{-} \operatorname{Arc}\cos z \quad ,$$

und setzt

$$\operatorname{Arc}\cos z = w \quad ,$$

so folgt

$$z = \sin(\tfrac{1}{2}\pi - w) \quad ,$$

oder

$$5) \qquad \cos w = \sin(\tfrac{1}{2}\pi - w) \quad .$$

Durch 5) ist vollständig bestimmt, welcher Wert der Quadratwurzel in 4) zu nehmen ist. Ferner folgt aus 5) und Nr. 9

$$6) \qquad \cos(u + iv) = \frac{e^v + e^{-v}}{2}\cos u - i\frac{e^v - e^{-v}}{2}\sin u \quad .$$

Macht man im Summensatze

$$\operatorname{Arc}\sin z + \operatorname{Arc}\sin\zeta = \operatorname{Arc}\sin\left(z\sqrt{1-\zeta^2} + \zeta\sqrt{1-z^2}\right) \quad ,$$

die Ersetzung

$$\operatorname{Arc}\sin z = w\,, \qquad \operatorname{Arc}\sin\zeta = \mathfrak{w} \quad ,$$

so folgt

$$7) \qquad \sin(w + \mathfrak{w}) = \sin w \cos\mathfrak{w} + \cos w \sin\mathfrak{w} \quad ,$$

und hieraus, wenn man w durch $\frac{1}{2}\pi - w$ ersetzt,

$$8) \qquad \cos(w - \mathfrak{w}) = \cos w \cos\mathfrak{w} + \sin w \sin\mathfrak{w} \quad .$$

11. Ist $w = \operatorname{Arc}\sin z$, so ist

$$dw = \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \quad ,$$

mithin

$$dz = \sqrt{1 - z^2}\, dw \quad ,$$

d. i.

$$d\sin w = \cos w\, dw \quad .$$

Hieraus folgt, daß die für reale w bewiesenen Differentialquotienten des Sinus und Cosinus auch für komplexe w unverändert gelten. Da nun $\sin w$ und $\cos w$ für alle endlichen $w = u + iv$ endlich bleiben, so folgt, daß die TAYLORschen Reihen

$$\sin w = w - \frac{w^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{w^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - \cdots \quad ,$$

$$\cos w = 1 - \frac{w^2}{1\cdot2} + \frac{w^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \frac{w^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \cdots$$

für alle endlichen Werte von w gültig sind.

§ 5. Definition des elliptischen Integrals; Reduktion auf die Normalformen; Vieldeutigkeit elliptischer Integrale.

1. Unter einem elliptischen Integrale versteht man jedes Integral von der Form

$$\int f\left(z, \sqrt{a z^4 + b z^3 + c z^2 + d z + e}\right) dz \quad ,$$

wobei f eine rationale Funktion von z und der Quadratwurzel bezeichnet, unter der Voraussetzung, daß sich das Integral nicht infolge besonderer Werte der Koeffizienten $a \ldots e$ oder besonderer Art der Funktion f durch algebraische oder cyklometrische Funktionen oder Logarithmen ausdrücken läßt.

2. Wir beschäftigen uns zunächst damit, die Größe

$$R \equiv a z^4 + b z^3 + c z^2 + d z + e$$

durch die lineare Ersetzung

$$1) \qquad z = \frac{\lambda + \mu \zeta}{1 + \nu \zeta}$$

überzuführen in

$$R \equiv \frac{A}{(1 + \nu \zeta)^4} \cdot (1 - \zeta^2)(1 - k^2 \zeta^2) \quad .$$

Die Werte von z und ζ, für die R verschwindet, entsprechen einander; setzen wir

$$R \equiv a(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)(z - \delta) \quad ,$$

und ordnen den Werten $z = \alpha, \beta, \gamma, \delta$ der Reihe nach $\zeta = 1, \ -1, \ 1:k, \ -1:k$ zu, so gehen aus 1) die Formeln hervor:

$$2) \qquad \alpha = \frac{\lambda + \mu}{1 + \nu} \quad ,$$

$$3) \qquad \beta = \frac{\lambda - \mu}{1 - \nu} \quad ,$$

$$4) \qquad \gamma = \frac{\lambda k + \mu}{k + \nu} \quad ,$$

$$5) \qquad \delta = \frac{\lambda k - \mu}{k - \nu} \quad .$$

Durch Subtraktion der Gleichungen 2) und 4), sowie der Gleichungen 3) und 4) ergibt sich

$$6) \qquad \alpha - \gamma = \frac{(\lambda \nu - \mu)(1 - k)}{(1 + \nu)(k + \nu)}, \qquad \beta - \gamma = \frac{(\lambda \nu - \mu)(1 + k)}{(1 - \nu)(k + \nu)} \quad .$$

Hieraus folgt durch Division

$$7) \qquad \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} = \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \cdot \frac{1 - k}{1 + k} \quad .$$

Vertauschen wir μ und ν mit $-\mu$ und $-\nu$, so gehen $\alpha - \gamma$ und $\beta - \gamma$ in $\beta - \delta$ und $\alpha - \delta$ über, wie man aus den Gleichungen 2) bis 5) erkennt; daher ist

$$8) \qquad \frac{\alpha - \delta}{\beta - \delta} = \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \cdot \frac{1 + k}{1 - k} \quad .$$

Aus 7) und 8) folgt zur Bestimmung von k

$$9) \qquad \left(\frac{1 - k}{1 + k}\right)^2 = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} \cdot \frac{\beta - \delta}{\alpha - \delta} \quad .$$

Die beiden Werte von k, die sich hieraus ergeben, sind reziprok; wir können daher immer k so wählen, daß der Modul von k ein echter Bruch ist.

Sind insbesondere $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sämtlich real, und setzt man $\alpha > \beta > \gamma > \delta$ voraus, so ist k real.

Nachdem wir uns entschieden haben, welche Wurzel der Gleichung 9) für k genommen werden soll, folgt der zugehörige Wert von ν eindeutig aus der Gleichung 7). Für λ und μ ergeben 2) und 3)

$$\lambda + \mu = \alpha(1+\nu) \quad ,$$
$$\lambda - \mu = \beta(1-\nu) \quad ;$$

also folgt

$$10) \qquad \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2}[(\alpha+\beta) + \nu(\alpha-\beta)] \quad , \\ \mu = \frac{1}{2}[(\alpha-\beta) + \nu(\alpha+\beta)] \quad . \end{cases}$$

Führen wir die berechneten Werte in die Änderungsgleichung ein, so erhalten wir

$$11) \qquad z = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \frac{\nu+\zeta}{1+\nu\zeta} \quad .$$

Um die Grösse A zu bestimmen, bilden wir

$$z - \alpha = \frac{\lambda + \mu\zeta}{1+\nu\zeta} - \alpha = \frac{\lambda - \alpha + (\mu - \alpha\nu)\zeta}{1+\nu\zeta}$$

und ebenso $z-\beta$, $z-\gamma$, $z-\delta$.

Aus den Gleichungen 2) bis 5) folgt sofort

$$\mu - \alpha\nu = \alpha - \lambda\,, \qquad \mu - \gamma\nu = k(\gamma - \lambda) \quad ,$$
$$\mu - \beta\nu = \lambda - \beta\,, \qquad \mu - \delta\nu = k(\lambda - \delta) \quad .$$

Mit Hilfe dieser Werte ergeben sich

$$12) \qquad \begin{cases} z - \alpha = (\lambda - \alpha)\cdot\dfrac{1-\zeta}{1+\nu\zeta}\,, & z - \gamma = (\lambda-\gamma)\cdot\dfrac{1-k\zeta}{1+\nu\zeta} \\ z - \beta = (\lambda-\beta)\cdot\dfrac{1+\zeta}{1+\nu\zeta}\,, & z - \delta = (\lambda-\delta)\cdot\dfrac{1+k\zeta}{1+\nu\zeta} \quad . \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$13) \qquad \begin{cases} (z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta) \\ = (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)(\lambda-\delta)\cdot\dfrac{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}{(1+\nu\zeta)^4} \quad . \end{cases}$$

Aus 10) folgt

$$14) \qquad \lambda - \alpha = \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)(\nu-1)\,, \qquad \lambda - \beta = \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)(\nu+1) \quad .$$

Aus 4) und 5) erhalten wir

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[(\gamma+\delta) + \frac{\nu}{k}(\gamma-\delta)\right] \quad ,$$

und hieraus weiter

$$15) \qquad \lambda - \gamma = \frac{1}{2}(\gamma-\delta)\left(\frac{\nu}{k} - 1\right), \qquad \lambda - \delta = \frac{1}{2}(\gamma-\delta)\left(\frac{\nu}{k}+1\right) \quad .$$

Somit ist

$$16) \qquad (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)(\lambda-\delta) = \frac{1}{16}(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2(1-\nu^2)\left(1-\frac{\nu^2}{k^2}\right) \quad .$$

Daher ergibt sich schließlich

$$17)\quad \begin{cases} \sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)} \\ = \frac{1}{4}(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)\sqrt{(1-\nu^2)\left(1-\frac{\nu^2}{k^2}\right)}\cdot\frac{1}{(1+\nu\zeta)^2}\cdot\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}\,. \end{cases}$$

Durch Differentiation der Formeln 12) erhalten wir zunächst

$$18)\quad \begin{cases} dz = -(\lambda-\alpha)\cdot\frac{1+\nu}{(1+\nu\zeta)^2}d\zeta\,, & dz = -(\lambda-\gamma)\cdot\frac{k+\nu}{(1+\nu\zeta)^2}d\zeta\,, \\ dz = (\lambda-\beta)\cdot\frac{1-\nu}{(1+\nu\zeta)^2}d\zeta\,, & dz = (\lambda-\delta)\cdot\frac{k-\nu}{(1+\nu\zeta)^2}d\zeta\,. \end{cases}$$

Durch Multiplikation dieser Formeln ergibt sich in Rücksicht auf 16)

$$19)\quad dz = \frac{1}{2}\sqrt{k(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)(1-\nu^2)\left(1-\frac{\nu^2}{k^2}\right)}\cdot\frac{d\zeta}{(1+\nu\zeta)^2}\,.$$

Für das einfachste elliptische Differential haben wir somit

$$20)\quad \frac{dz}{\sqrt{a(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}} = \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{a(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}}\cdot\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}\,.$$

3. Ist $a = 0$ und setzt man

$$1)\quad b z^3 + c z^2 + d z + e = b(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)\,,$$

so wird in

$$a z^4 + b z^3 + c z^2 + d z + e = 0$$

die Wurzel $\delta = \infty$, und daher

$$2)\quad \begin{cases} \nu = k\,, & \alpha = \frac{\lambda+\mu}{1+k}\,, \\ \beta = \frac{\lambda-\mu}{2k}\,, & \gamma = \frac{k\lambda+\mu}{2k}\,, \\ \alpha-\gamma = \frac{(k\lambda-\mu)(1-k)}{2k(1+k)}\,, & \beta-\gamma = \frac{(k\lambda-\mu)(1+k)}{2k(1-k)}\,, \\ \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 = \frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}\,; & \\ \lambda-\alpha = \frac{1}{2}(\alpha-\beta)(k-1)\,, & \lambda-\beta = \frac{1}{2}(\alpha-\beta)(k+1)\,, \\ \lambda-\gamma = \frac{k\lambda-\mu}{2k}\,, & k\lambda-\mu = -\frac{1}{2}(\alpha-\beta)(1-k^2)\,. \end{cases}$$

Ferner hat man

$$3)\quad (z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma) = -(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)\cdot(\alpha-\beta)\cdot\frac{1-k^2}{4k}\cdot\frac{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}{(1+k\zeta)^4}\,.$$

Aus Nr. 2, 18) entnimmt man

$$dz^2 = -(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)\cdot\frac{1-k^2}{(1+k\zeta)^4}\cdot d\zeta^2\,,$$

und hat daher

$$\frac{dz}{\sqrt{b(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)}} = \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{b(\alpha-\beta)}}\cdot\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}\,.$$

4. Bei den Anwendungen der elliptischen Integrale in Geometrie und Mechanik tritt insbesondere der Fall hervor, daß $a z^4 + b z^3 + \ldots + e$ nur reale Koeffizienten hat und z nur solche reale Werte beigelegt werden, für welche die Wurzel aus diesem Polynom reale Werte erhält. Wir wollen nun zeigen, daß in diesem Falle sich jederzeit reale Änderungen angeben lassen, durch welche

$$\int f(z, \sqrt{a z^4 + \ldots})\, dz$$

durch algebraische Funktionen, Logarithmen, cyklometrische Funktionen und ein Integral von der Form ausgedrückt werden kann

$$\int \frac{F(\mathfrak{z})}{\sqrt{(1 - \mathfrak{z}^2)(1 - k^2 \mathfrak{z}^2)}}\, d\mathfrak{z} \quad ,$$

wobei $F(\mathfrak{z})$ eine rationale Funktion bezeichnet und k und $\mathfrak{z}$ reale echte Brüche sind. Dies läßt sich allerdings nicht immer durch eine rationale Ersetzung erreichen, wir müssen uns vielmehr dazu bequemen, irrationale, von sehr einfacher Art, zu verwenden.

Wir wenden zunächst die lineare Ersetzung an

$$1) \qquad z = \frac{\lambda + \mu \zeta}{1 + \zeta} \quad ,$$

um dadurch zu erhalten

$$a(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)(z - \delta) = \frac{a_1}{(1 + \zeta)^4}(p^2 - \zeta^2)(q^2 - \zeta^2) \quad .$$

Entsprechen den Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der Reihe nach die Wurzeln $p, -p, q, -q$, so erhalten wir aus 1) die vier Gleichungen

$$2) \qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\lambda + \mu p}{1 + p}, & \gamma = \dfrac{\lambda + \mu q}{1 + q} \quad , \\[2ex] \beta = \dfrac{\lambda - \mu p}{1 - p}, & \delta = \dfrac{\lambda - \mu q}{1 - q} \quad . \end{cases}$$

Durch Subtraktion ergibt sich

$$3) \qquad \alpha - \gamma = \frac{(\lambda - \mu)(q - p)}{(1 + p)(1 + q)} \quad .$$

Wechseln wir hier der Reihe nach das Vorzeichen erst von p, dann von q, dann von p und q, so erhalten wir

$$4) \qquad \beta - \gamma = \frac{(\lambda - \mu)(q + p)}{(1 - p)(1 + q)} \quad ,$$

$$5) \qquad \alpha - \delta = \frac{-(\lambda - \mu)(q + p)}{(1 + p)(1 - q)} \quad ,$$

$$6) \qquad \beta - \delta = \frac{-(\lambda - \mu)(q - p)}{(1 - p)(1 - q)} \quad .$$

Aus 3), 4), 5), 6), folgt weiter

$$7) \qquad \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta} = -\frac{(1 - p)(1 - q)}{(1 + p)(1 + q)}, \qquad \frac{\alpha - \delta}{\beta - \gamma} = -\frac{(1 - p)(1 + q)}{(1 + p)(1 - q)} \quad .$$

Hieraus ergibt sich durch Multiplikation und Division

$$8) \qquad \left(\frac{1 - p}{1 + p}\right)^2 = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} \cdot \frac{\alpha - \delta}{\beta - \delta} \quad ,$$

$$9) \qquad \left(\frac{1 - q}{1 + q}\right)^2 = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \delta} \cdot \frac{\beta - \gamma}{\beta - \delta} \quad .$$

Sind α, β, γ, δ real und $\alpha > \beta > \gamma > \delta$, so folgen aus 8) und 9) reale Werte für p und q. Sind α und β real, γ und δ konjugiert komplex, so sind auch $\alpha - \gamma$ und $\alpha - \delta$, sowie $\beta - \gamma$ und $\beta - \delta$ konjugiert komplex, mithin die rechte Seite in Gleichung 8) real und positiv, folglich p real. Ist $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 i$, $\delta = \gamma_1 - \gamma_2 i$, so ergibt sich für die rechte Seite von 9)

$$\frac{\alpha - \gamma_1 - \gamma_2 i}{\alpha - \gamma_1 + \gamma_2 i} \cdot \frac{\beta - \gamma_1 - \gamma_2 i}{\beta - \gamma_1 + \gamma_2 i} \ .$$

Hierin sind Zähler und Nenner konjugiert komplex; der Quotient der Quadratwurzeln ist mithin ebenfalls der Quotient zweier konjugiert Komplexen, also erhält man aus 9) ein Resultat von der Form

$$\frac{1-q}{1+q} = \pm \frac{\varrho - \sigma i}{\varrho + \sigma i} = \frac{\varrho - \sigma i}{\varrho + \sigma i} \quad \text{oder} \quad \frac{\sigma + \varrho i}{\sigma - \varrho i} \ ,$$

woraus sofort hervorgeht

$$10) \qquad q = \frac{\sigma}{\varrho} i \quad \text{oder} \quad -\frac{\varrho}{\sigma} i \ ,$$

also ist q rein imaginär.

Sind α und β, sowie γ und δ konjugiert komplex,

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i \ , \qquad \beta = \alpha_1 - \alpha_2 i \ ,$$

so ist

$$11) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{1-p}{1+p}\right)^2 = \dfrac{(\alpha_1 - \gamma_1) + (\alpha_2 - \gamma_2) i}{(\alpha_1 - \gamma_1) - (\alpha_2 + \gamma_2) i} \cdot \dfrac{(\alpha_1 - \gamma_1) + (\alpha_2 + \gamma_2) i}{(\alpha_1 - \gamma_1) - (\alpha_2 - \gamma_2) i} \ , \\[2ex] \left(\dfrac{1-q}{1+q}\right)^2 = \dfrac{(\alpha_1 - \gamma_1) + (\alpha_2 - \gamma_2) i}{(\alpha_1 - \gamma_1) + (\alpha_2 + \gamma_2) i} \cdot \dfrac{(\alpha_1 - \gamma_1) - (\alpha_2 + \gamma_2) i}{(\alpha_1 - \gamma_1) - (\alpha_2 - \gamma_2) i} \ . \end{cases}$$

Zähler und Nenner der rechten Seiten sind bei beiden Gleichungen konjugiert komplex, daher folgen aus beiden rein imaginäre Werte für p und q.

Setzen wir

$$p^2 = b_1 \ , \qquad q^2 = b_2 \ ,$$

so haben wir,

$$12) \qquad \begin{cases} \text{wenn} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ real sind,} & b_1 > 0 \ , \quad b_2 > 0 \ , \\ \text{wenn nur } \alpha \text{ und } \beta \text{ real sind,} & b_1 > 0 \ , \quad b_2 < 0 \ , \\ \text{wenn} \quad \alpha \text{ und } \beta, \text{ sowie } \gamma \text{ und } \delta \text{ konjugiert komplex,} & b_1 < 0 \ , \quad b_2 < 0 \ . \end{cases}$$

Ist δ unendlich groß, reduziert sich also $\sqrt{R}$ auf

$$\sqrt{b(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)} \ ,$$

so folgt aus 8) und 9)

$$13) \qquad \left(\frac{1-p}{1+p}\right)^2 = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} \ , \qquad q = 1 \ .$$

Daher ist

$$\sqrt{R} = \sqrt{b(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)} = \frac{1}{(1+\zeta)^2} \sqrt{a_1(1-\zeta^2)(p^2-\zeta^2)} \ .$$

Ersetzt man hier p^2 durch b_2, so erhält man wie bei einem endlichen Werte von δ für die geänderte Wurzel

$$\sqrt{a_1(b_1 - \zeta^2)(b_2 - \zeta^2)} \ ,$$

wobei $b_1 = 1$, $b_2 = p^2$ ist.

Führt man die lineare Ersetzung in

$$f(z, \sqrt{R})\, dz \ , \qquad R = a z^4 + b z^3 + \dots$$

aus, so erhält man

$$f_1(\zeta, \sqrt{R_1})\,d\zeta \quad ,$$

wobei f_1 eine rationale Funktion von ζ und $\sqrt{R_1} \equiv \sqrt{a_1(b_1 - \zeta^2)(b_2 - \zeta^2)}$ bezeichnet. Diese Funktion läßt sich immer auf die Form bringen

$$14) \qquad f_1(\zeta, \sqrt{R_1}) = \frac{\varphi + \psi\sqrt{R_1}}{\varphi_1 + \psi_1\sqrt{R_1}} \quad ,$$

worin φ, ψ, φ_1, ψ_1 ganze rationale Funktionen von ζ sind. Macht man rechts den Nenner rational, so entsteht

$$f_1 = \frac{\Phi + \Psi\sqrt{R_1}}{L} \quad ,$$

wo nun L, Φ, Ψ ganze Funktionen von ζ sind. Daher ist schließlich

$$\int f(z, \sqrt{R})\,dz = \int \frac{\Phi}{L}\,d\zeta + \int \frac{\Psi}{L}\sqrt{R_1}\,d\zeta \quad .$$

Das erste Integral rechts enthält ein rationales Differential und führt daher auf algebraische Funktionen und Logarithmen. Im zweiten schreiben wir

$$15) \qquad \int \frac{\Psi}{L}\sqrt{R_1}\cdot d\zeta = \int \frac{\Psi_1}{L\cdot\sqrt{R_1}}\cdot d\zeta \quad ,$$

worin $\Psi_1 = \Psi \cdot R_1$ ist.

5. Wir beschäftigen uns nun zunächst mit der Änderung des Ausdrucks

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{a_1(b_1 - \zeta^2)(b_2 - \zeta^2)}} \quad .$$

A) Ist $a_1 > 0$, $b_1 > b_2 > 0$, so hat die Wurzel

$$\sqrt{a_1(b_1 - \zeta^2)(b_2 - \zeta^2)}$$

reale Werte, sobald $b_2 > \zeta^2$ oder $b_1 < \zeta^2$. Im ersten Unterfalle setzen wir

$$\zeta = \sqrt{b_2}\cdot\mathfrak{z}\,, \qquad k = \sqrt{\frac{b_2}{b_1}} \quad ,$$

und erhalten

$$\sqrt{R_1} = \sqrt{a_1 b_1 b_2}\cdot\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)(1-k^2\mathfrak{z}^2)} \quad ,$$

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{R_1}} = \frac{1}{\sqrt{a_1 b_1}}\cdot\frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)(1-k^2\mathfrak{z}^2)}} \quad .$$

Im zweiten Unterfalle nehmen wir

$$\zeta = \sqrt{b_1}\cdot\frac{1}{\mathfrak{z}}\,, \qquad k = \sqrt{\frac{b_2}{b_1}} \quad ,$$

woraus folgt

$$\sqrt{R_1} = \sqrt{a_1 b_1 b_2}\cdot\frac{1}{\mathfrak{z}^2}\cdot\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)(1-k^2\mathfrak{z}^2)} \quad ,$$

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{R_1}} = -\frac{1}{\sqrt{a_1 b_2}}\cdot\frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)(1-k^2\mathfrak{z}^2)}} \quad .$$

B) Ist $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, $b_2 < 0$, so muß $\zeta^2 > b_1$ sein; wir setzen

$$\zeta = \frac{\sqrt{b_1}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}}\,, \qquad k = \sqrt{\frac{-b_2}{b_1 - b_2}} \quad ,$$

und haben

$$\sqrt{R_1} = \sqrt{a_1 b_1 (b_1 - b_2)} \cdot \frac{\mathfrak{z}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}^3} \cdot \sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)(1-k^2\mathfrak{z}^2)} \quad ,$$

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{a_1(b_1-b_2)}} \cdot \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)(1-k^2\mathfrak{z}^2)}} \quad .$$

C) Ist $a_1 > 0$, $b_1 < b_2 < 0$, so kann ζ alle realen Werte annehmen. Die Ersetzung

$$\zeta = \sqrt{-b_2} \cdot \frac{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}}{\mathfrak{z}}, \qquad k = \sqrt{\frac{b_1 - b_2}{-b_2}}$$

liefert

$$\sqrt{R_1} = \frac{b_2\sqrt{a}}{\mathfrak{z}^2\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}} \cdot \sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)(1-k^2\mathfrak{z}^2)} \quad ,$$

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{R_1}} = -\frac{1}{\sqrt{-a_1 b_2}} \cdot \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)(1-k^2\mathfrak{z}^2)}} \quad .$$

D) Ist $a_1 < 0$, $b_1 > b_2 > 0$, so muß ζ^2 zwischen b_1 und b_2 liegen. Durch

$$\zeta = \frac{\sqrt{b_2}}{\sqrt{1-k^2\mathfrak{z}^2}}, \qquad k = \sqrt{\frac{b_1 - b_2}{b_1}}$$

ergibt sich

$$\sqrt{R_1} = k^2\sqrt{-a_1 b_1 b_2} \cdot \frac{\mathfrak{z}}{\sqrt{1-k^2\mathfrak{z}^2}^3} \sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)(1-k^2\mathfrak{z}^2)} \quad ,$$

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{R_1}} = \frac{1}{\sqrt{-a_1 b_1}} \cdot \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)(1-k^2\mathfrak{z}^2)}} \quad .$$

E) Ist $a_1 < 0$, $b_1 > 0$, $b_2 < 0$, so muß $\zeta^2 < b_1$ sein; wir setzen

$$\zeta = \sqrt{b_1}\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}, \qquad k = \sqrt{\frac{b_1}{b_1 - b_2}} \quad ,$$

und erhalten

$$\sqrt{R_1} = \sqrt{-a_1 b_1 (b_1 - b_2)} \cdot \frac{\mathfrak{z}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}} \cdot \sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)(1-k^2\mathfrak{z}^2)} \quad ,$$

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{R_1}} = -\frac{1}{\sqrt{-a_1(b_1-b_2)}} \cdot \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)(1-k^2\mathfrak{z}^2)}} \quad .$$

Im Falle $a_1 < 0$, $b_1 < b_2 < 0$ ist die Wurzel für jedes reale ζ imaginär. Führt man die Ersetzung A) aus, so gelangt man zu denselben Formeln wie bei A), und erhält für k ebenfalls einen realen, echten Bruch.

6. Wir wenden uns nun zu dem Integrale Nr. 4, 15) zurück. Sondern wir in Ψ_1 und L die Glieder geraden Grades in Bezug auf ζ von den Gliedern ungeraden Grades, so erhalten wir

$$\frac{\Psi_1}{L} = \frac{M_1 + \zeta M_2}{L_1 + \zeta L_2}$$

worin M_1, M_2, L_1, L_2 nur Glieder mit geraden Exponenten enthalten.

Durch Erweiterung mit $L_1 - \zeta L_2$ beseitigen wir die ungeraden Potenzen des Nenners; es entsteht

$$\frac{\Psi_1}{L} = \frac{M_1L_1 - \zeta^2 M_2L_2}{L_1^2 - \zeta^2 L_2^2} + \frac{\zeta(M_2L_1 - M_1L_2)}{L_1^2 - \zeta^2 L_2^2} \quad .$$

Daher haben wir

$$1)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{\Psi_1}{L}\cdot\frac{d\zeta}{\sqrt{R_1}} = \int \frac{M_2L_1 - M_1L_2}{L_1^2 - \zeta^2 L_2^2}\cdot\frac{\zeta\, d\zeta}{\sqrt{R_1}} \\ \displaystyle\qquad\qquad + \int \frac{M_1L_1 - \zeta^2 M_2L_2}{L_1^2 - \zeta^2 L_2^2}\cdot\frac{d\zeta}{\sqrt{R_1}} \;. \end{cases}$$

Im ersten Integrale rechts setzen wir $\zeta^2 = z$ und erhalten dadurch ein Integral

$$\int \Pi\cdot\frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(b_1 - \mathfrak{z})(b_2 - \mathfrak{z})}}\;,$$

worin Π eine rationale Funktion von $\mathfrak{z}$ ist. Dieses Integral ist im vorigen Paragraphen behandelt worden. Im letzten Integrale von 1) führen wir eine der Änderungen Nr. 5, A), B), C), D), E) aus; da sie alle unter der Form enthalten sind

$$\zeta^2 = \frac{e_1 + e_2\mathfrak{z}^2}{f_1 + f_2\mathfrak{z}^2}\;,$$

so geht die Funktion von ζ, die nur gerade Potenzen enthält, in eine ebensolche Funktion von $\mathfrak{z}$ über. Wir behalten daher ein Integral übrig

$$\int \frac{N}{N_1}\cdot\frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(1 - \mathfrak{z}^2)(1 - k^2\mathfrak{z}^2)}}\;,$$

worin N und N_1 nur gerade Potenzen von $\mathfrak{z}$ enthalten.

Zerlegen wir $N : N_1$ in eine ganze Funktion und in Teilbrüche, und betrachten bei dieser Zerlegung $\mathfrak{z}^2$ als Veränderliche, so sehen wir, daß das Integral 2) in Integrale von der Form zerfällt

$$\int \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(1 - \mathfrak{z}^2)(1 - k^2\mathfrak{z}^2)}}\,,\qquad \int \frac{\mathfrak{z}^{2n}\, d\mathfrak{z}}{\sqrt{(1 - \mathfrak{z}^2)(1 - k^2\mathfrak{z})}}\;,$$

$$\int \frac{d\mathfrak{z}}{(1 + \lambda\mathfrak{z}^2)^n\sqrt{(1 - \mathfrak{z}^2)(1 - k^2\mathfrak{z}^2)}}\;.$$

Die letzten beiden Arten können noch weiter behandelt werden.

7. Betreffs des an zweiter Stelle aufgeführten Integrals wollen wir zeigen, wie jedes Integral

$$\int (A_1 z^{2n} + A_2 z^{2n-2} + A_3 z^{2n-4} + \ldots + A_n z^2)\frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

auf einen algebraischen Teil und auf die Integrale

$$\int \frac{z^2\, dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} \quad\text{und}\quad \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

zurückgeführt werden kann, indem wir nachweisen, daß sich die unbekannten Zahlen B_1, B_2, $B_3 \ldots B_{n-1}$, C, D gemäß der Gleichung bestimmen lassen

$$\int (A_1 z^{2n} + \ldots + A_n z^2)\frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

$$= (B_1 z^{2n-3} + B_2 z^{2n-5} + \ldots + B_{n-1} z)\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}$$

$$+ C\int \frac{z^2\, dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} + D\int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}\;.$$

Durch Differentiation und nachfolgende Multiplikation mit $\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ folgt aus dieser Gleichung

$$
\begin{aligned}
A_1 z^{2n} + A_2 z^{2n-2} + A_3 z^{2n-4} + \ldots + A_n z^2 \\
= (B_1 z^{2n-3} + B_2 z^{2n-5} + \ldots + B_{n-1} z)[2k^2 z^3 - (k^2+1)z] \\
+ [(2n-3)B_1 z^{2n-4} + (2n-5)B_2 z^{2n-6} + \ldots + B_{n-1}] \cdot [k^2 z^4 - (k^2+1)z^2 + 1] \\
+ Cz^2 + D \quad .
\end{aligned}
$$

Vergleicht man beiderseits die gleich hohen Potenzen von z, so erhält man zur Bestimmung von $B_1, B_2, B_3, \ldots B_{n-1}, C, D$ die linearen Gleichungen

$$
\begin{aligned}
A_1 &= (2n-1)k^2 \cdot B_1 \quad , \\
A_2 &= (2n-3)k^2 \cdot B_2 - (2n-2)(k^2+1)B_1 \quad , \\
A_3 &= (2n-5)k^2 \cdot B_3 - (2n-4)(k^2+1)B_2 + (2n-3)B_1 \quad , \\
A_4 &= (2n-7)k^2 \cdot B_4 - (2n-6)(k^2+1)B_3 + (2n-5)B_2 \quad , \\
A_5 &= (2n-9)k^2 \cdot B_5 - (2n-8)(k^2+1)B_4 + (2n-7)B_3 \quad , \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{n-1} &= 3k^2 \cdot B_{n-1} - 4 \cdot (k^2+1)B_{n-2} + 5 \cdot B_{n-3} \quad , \\
A_n &= \qquad\qquad 2 \cdot (k^2+1)B_{n-1} + 3 \cdot B_{n-2} + C \quad , \\
0 &= B_{n-1} + D \quad .
\end{aligned}
$$

Aus den ersten n Gleichungen ergeben sich die n Unbekannten $B_1, B_2, \ldots B_{n-1}, C$; aus der letzten folgt $D = -B_{n-1}$.

Statt des Integrales

$$\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

betrachten wir das folgende

$$\int \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} - k^2 \int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad .$$

8. Das Integral

$$\int \frac{dz}{(1+\lambda z^2)^n \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

läßt sich ebenfalls reduzieren; man kann die Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, C$ immer so bestimmen, daß

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dz}{(1+\lambda z^2)^n \sqrt{R}} = \frac{\sqrt{R}}{(1+\lambda z^2)^{n-1}} (A_1 z + A_2 z^3 + \ldots + A_{n-1} z^{2n-3}) \\
+ \int \frac{(B_1 + B_2 z^2)\,dz}{\sqrt{R}} + C \int \frac{dz}{(1+\lambda z^2)\sqrt{R}} \quad .
\end{aligned}
$$

Durch Differentiation erhält man

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1+\lambda z^2)^n \sqrt{R}} = \left[\frac{2k^2z^3 - (k^2+1)z}{(1+\lambda z^2)^{n-1} \cdot \sqrt{R}} - \frac{2(n-1)\lambda z \cdot \sqrt{R}}{(1+\lambda z^2)^n} \right] (A_1 z + A_2 z^3 + \ldots) \\
+ \frac{\sqrt{R}}{(1+\lambda z^2)^{n-1}} (A_1 + 3A_2 z^2 + \ldots) + \frac{B_1 + B_2 z^2}{\sqrt{R}} + \frac{C}{(1+\lambda z^2)\sqrt{R}} \quad .
\end{aligned}
$$

Beseitigt man die Nenner, so entsteht

$$1 = (-2k^2\lambda(n-2)z^5 + [2k^2 + \lambda(k^2+1)(2n-3)]z^3 - [k^2 + 1 - 2\lambda(n-1)]z)$$
$$\cdot (A_1 z + A_2 z^3 + \ldots + A_{n-1} z^{2n-3})$$
$$+ [k^2\lambda z^6 + (k^2 - \lambda k^2 - \lambda)z^4 + (\lambda - k^2 - 1)z^2 + 1][A_1 + 3A_2 z^2 + \ldots$$
$$+ (2n-3)A_{n-1} z^{2n-4}] + (B_1 + B_2 z^2)(1 + \lambda z^2)^n + C(1 + \lambda z^2)^{n-1} \quad .$$

Diese Gleichung ist vom Grade $2n+2$; sie enthält nur Glieder gerader Potenz, die Zahl derselben ist also $n+2$; ebenso groß ist die Zahl der Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}, B_1, B_2, C$. Man kann diese so wählen, daß die letzte Gleichung identisch erfüllt ist, und hat zu ihrer Bestimmung $n+2$ lineare Gleichungen, deren Auflösung bei gegebenen Werten von k, λ, n ohne Schwierigkeit erfolgt.

9. Hiernach sind alle elliptischen Integrale auf drei Normalintegrale zurückgeführt, nämlich auf

$$\int \frac{dz}{\sqrt{R}}, \quad \int \frac{(1-k^2z^2)\,dz}{\sqrt{R}}, \quad \int \frac{dz}{(1+\lambda z^2)\sqrt{R}} \quad .$$

Sie nehmen eine einfachere Gestalt an, wenn man z durch eine neue Veränderliche φ ersetzt gemäß

$$z = \sin\varphi \quad ;$$

denn dann ist

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = d\varphi \quad ,$$

und die drei Integrale gehen über in

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\cdot d\varphi, \quad \int \frac{d\varphi}{(1+\lambda\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad .$$

Die Größe $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ wird gewöhnlich mit $\Delta(\varphi)$ oder, wenn es der Unterscheidung wegen nötig ist, mit $\Delta(k,\varphi)$ bezeichnet.

Werden die Integrale zwischen den Grenzen 0 und z, bezw. φ genommen, so bezeichnet man sie nach LEGENDRE*) als die elliptischen Integrale erster, zweiter und dritter Gattung; k heißt der Modulus, die obere Grenze φ die Amplitude, λ der Parameter; man benutzt die Funktionszeichen

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = F(\varphi,k), \quad \int_0^\varphi \Delta(\varphi)\,d\varphi = E(\varphi,k), \quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+\lambda\sin^2\varphi)\Delta(\varphi)} = \Pi_0(\varphi,k,\lambda) \quad .$$

10. Das Integral erster Art kann durch eine bemerkenswerte quadratische Ersetzung in ein Integral erster Art mit andrem Modul und andrer Amplitude verwandelt werden.

Setzt man

$$z = U:V \quad ,$$

wo U und V Funktionen der neuen Veränderlichen ζ, nicht höher als zweiten Grades, sein mögen, so erhält man zunächst

$$1) \qquad \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \frac{VdU - UdV}{\sqrt{(V-U)(V+U)(V-kU)(V+kU)}} \quad .$$

Kann man V und U so wählen, daß

$$2) \qquad V - U = (1-\zeta)(1-\lambda\zeta) \quad ,$$
$$3) \qquad V + U = (1+\zeta)(1+\lambda\zeta) \quad ,$$

*) LEGENDRE, Traité des fonctions elliptiques, Paris 1825.

$$4)\qquad V - kU = (1 + m\zeta)^2 \quad ,$$
$$5)\qquad V + kU = (1 + n\zeta)^2 \quad ,$$

wobei λ, m und n noch unbestimmt sind, so ergibt sich

$$VdU - UdV \equiv \frac{1}{2k}\{(V - kU)d(V + kU) - (V + kU)d(V - kU)\}$$
$$= \frac{n - m}{k}(1 + m\zeta)(1 + n\zeta)\,d\zeta \quad .$$

$$6)\qquad \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = \frac{n - m}{k} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - \lambda^2\zeta^2)}} \quad .$$

Aus 2) und 3) folgt

$$7)\qquad V = 1 + \lambda\zeta^2\,, \quad U = (1 + \lambda)\zeta\,, \quad z = \frac{(1 + \lambda)\zeta}{1 + \lambda\zeta^2} \quad ,$$

aus 4) und 5) erhält man

$$8)\qquad \begin{cases} V = 1 + (m + n)\zeta + \frac{1}{2}(m^2 + n^2)\zeta^2 \quad , \\ U = \frac{n - m}{k}\zeta\left[1 + \frac{1}{2}(m + n)\zeta\right] \quad . \end{cases}$$

Der Vergleich von 8) und 7) ergibt

$$9)\qquad n = -m = \sqrt{\lambda}\,, \quad k = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1 + \lambda} \quad .$$

Hieraus folgt, wenn $\lambda < 1$ sein soll,

$$10)\qquad \sqrt{\lambda} = \frac{1 - k'}{k} \quad ,$$

wobei gesetzt ist

$$k' = \sqrt{1 - k^2} \quad .$$

Aus 10) schließt man noch

$$11)\qquad \lambda = \frac{1 - k'}{1 + k'} \quad .$$

Endlich folgt aus 6) und 9)

$$12)\qquad \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = (1 + \lambda)\int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - \lambda^2\zeta^2)}} \quad .$$

11. Um die zweideutige irrationale Größe

$$\sqrt{R} = \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)} \quad ,$$

in welcher wir von nun an k positiv real und echt gebrochen voraussetzen wollen, als eine eindeutige Funktion des Ortes in der Fläche darzustellen, haben wir eine zweiblätterige RIEMANNsche Fläche zu verwenden, die vier Windungspunkte hat: $z = -1:k$, -1, $+1$, $+1:k$ (Fig. 65); entlang der Strecken von $-1:k$ bis -1 und von $+1$ bis $+1:k$ mögen die beiden Blätter verwachsen sein. Jeder Weg, der, auf das obere Blatt abgebildet, eine ungerade Anzahl von Windungspunkten eine ungerade Anzahl Male umkreist, führt aus einem Blatte ins andre; wird hingegen eine ungerade Anzahl von Windungspunkten eine gerade

Anzahl Male oder eine gerade Anzahl von Windungspunkten umkreist, so liegen Anfang und Ende des Weges in demselben Blatte.

Wir nehmen an, daß im Nullpunkte des obern Blattes $\sqrt{R}$ den Wert $+1$ hat; für den des untern Blattes ist alsdann $\sqrt{R} = -1$. Auf der realen Achse des obern Blattes nimmt $\sqrt{R}$ von $z = 0$ bis $z = +1$ die Werte von $+1$ bis 0, von $z = 0$ bis $z = -1$ ebenfalls die Werte von $+1$ bis 0, und in den entsprechenden Punkten der realen Achse des untern Blattes die entgegengesetzt gleichen Werte an.

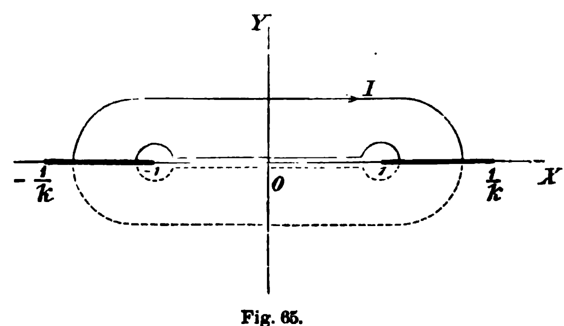


Fig. 65.

12. Wir untersuchen nun die Werte, um welche das Integral erster und das zweiter Art sich ändern, wenn z einen Teil eines verschwindend kleinen Kreises beschreibt, der einen Windungspunkt zur Mitte hat.

Ist z auf einem Kreise gelegen, der um a mit dem Halbmesser ϱ beschrieben ist, so ist

$$1) \qquad z = a + \varrho e^{i\varphi} \quad ,$$

wobei φ den Winkel bezeichnet, um den ϱ gedreht werden muß, um aus der Richtung der positiven realen Achse in die Richtung az überzugehen.

Aus 1) ergibt sich

$$2) \qquad dz = i\varrho e^{i\varphi} d\varphi \quad .$$

Ferner ist

$$3) \quad \sqrt{(a-z)(b-z)(c-z)(d-z)} = i\sqrt{\varrho e^{i\varphi}(b-a-\varrho e^{i\varphi})(c-a-\varrho e^{i\varphi})(d-a-\varrho e^{i\varphi})} \quad .$$

Daher ist

$$4) \quad \frac{dz}{\sqrt{(a-z)(b-z)(c-z)(d-z)}} = \frac{\sqrt{\varrho}\cdot e^{\frac{i\varphi}{2}} d\varphi}{\sqrt{(b-a-\varrho e^{i\varphi})(c-a-\varrho e^{i\varphi})(d-a-\varrho e^{i\varphi})}} \,,$$

$$5) \quad \sqrt{(a-z)(b-z)(c-z)(d-z)}\, dz = -\varrho^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3i\varphi}{2}} \sqrt{(b-a-\varrho e^{i\varphi})\ldots}\, d\varphi \quad .$$

Wird ϱ verschwindend klein, so ist

$$\lim \sqrt{(b-a-\varrho e^{i\varphi})\ldots} = \sqrt{(b-a)(c-a)(d-a)} \quad .$$

Setzen wir a, b, c, d als endliche, voneinander verschiedene Zahlen voraus, so ist dieser Grenzwert weder unendlich groß, noch verschwindend klein. Integriert man die Differentiale 4) und 5) unter der Voraussetzung eines verschwindend kleinen ϱ zwischen den Grenzen φ_0 und φ_1, so erhält man

$$6) \qquad \lim\sqrt{\varrho}\cdot\frac{1}{A}\cdot\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} e^{\frac{1}{2}i\varphi} d\varphi\,, \qquad \text{bezw.} \qquad -\lim\sqrt{\varrho^3}\cdot A\cdot\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} e^{\frac{3}{2}i\varphi} d\varphi \quad .$$

Hierin sind die Integrale endlich, die Faktoren $1:A$ und A nicht unendlich, während die Grenzwerte von $\sqrt{\varrho}$ und $\sqrt{\varrho^3}$ verschwinden. Dies ergibt: Werden die Integrale

$$\int\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} \quad \text{und} \quad \int\Delta(\varphi)\, d\varphi$$

über Wege erstreckt, die einem einzigen Windungspunkte sich unendlich nahe anschmiegen, so haben beide den Wert Null.

13. Geht z auf der realen Achse im obern Blatte von 0 bis $+1$, so erhält $F(k, \varphi)$ den Wert

$$1)\qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \;,$$

wobei durch die Veränderliche x der geradlinige Weg angedeutet ist. Das Differential wird an der obern Grenze für $x=1$ unendlich groß; man überzeugt sich aber leicht, daß trotzdem das Integral einen endlichen Wert hat.

Denn der Faktor $1:\sqrt{1-k^2x^2}$ hat innerhalb der Integralgrenzen für $x=1$ seinen größten Wert $1:\sqrt{1-k^2}$; daher ist

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} < \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,, \text{ d. i. } < \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\cdot\frac{\pi}{2} \;.$$

Das Integral 1) hat in der Theorie der elliptischen Integrale eine ähnliche Bedeutung wie bei den cyklometrischen Integralen die Zahl $\frac{1}{2}\pi$; es wird mit K bezeichnet, so daß man also hat

$$2)\qquad K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \;.$$

Umgeht man den Windungspunkt $+1$ in einem verschwindend kleinen Kreise, so ist der auf diesen Weg entfallende Zuwachs des Integrals F gleich Null. Geht man alsdann im untern Blatte entlang der realen Achse bis zum untern Nullpunkte zurück, so haben $\sqrt{R}$, sowie dz dabei entgegengesetzt gleiche Werte wie in den darüber liegenden Punkten des obern Blattes bei der Integration von 0 bis 1. Wird daher das Integral F im obern Blatte entlang der realen Achse von 0 bis $+1$ und dann weiter im untern von $+1$ bis 0 erstreckt, so hat es den Wert $2K$. In Punkten, die in demselben Blatte auf der realen Achse zwischen $+1$ und -1 gleich weit vom Nullpunkte entfernt sind, haben dz und $\sqrt{R}$ dieselben Werte, wenn ein geschlossener Weg zurückgelegt wird, der $+1$ und -1 in unendlich kleinen Kreisen umgeht. Daher ist

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \begin{cases} 2K \text{ im obern Blatte}\;, \\ -2K \text{ im untern Blatte}\;, \end{cases}$$

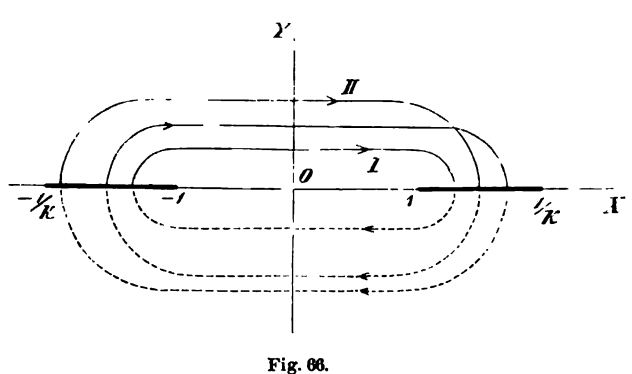


Fig. 66.

und das Integral über den ganzen beschriebenen Weg ist $4K$. Wir schließen daher: Wird das Integral

$$F = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

über einen Weg (I, Fig. 66) erstreckt, der nur die beiden Windungspunkte -1 und $+1$ einfach umkreist, so hat es den Wert $4K$.

Über den geschlossenen Weg II erstreckt, hat daher F den Wert $8K$ u. s. w.

14. Befindet sich z auf der realen Achse im obern Blatte in dem unendlich nahe vor $+1$ liegenden Punkte $1-\varrho$ (Fig. 67), so ist, wenn im Radikanden Glieder zweiten Grades in ϱ vernachlässigt werden, und die Wurzel positiv gerechnet wird,

$$\sqrt{R} = k'\sqrt{2\varrho} \quad .$$

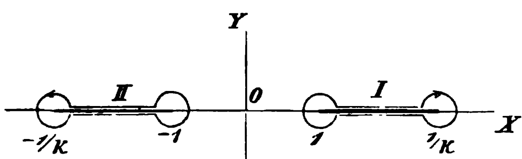


Fig. 67.

Geht z in einem verschwindend kleinen Halbkreise in der Richtung der abnehmenden Winkel um den Punkt $+1$ bis wieder auf die reale Achse, so durchläuft es die Werte $1+\varrho e^{i\varphi}$ von $\varphi=\pi$ bis $\varphi=0$; $\sqrt{R}$ erlangt den Endwert $ik'\sqrt{2\varrho}$, ist also verschwindend klein positiv imaginär. Geht nun z auf der realen Achse weiter bis zu dem unendlich nahe vor $1:k$ liegenden Punkte $\frac{1}{k}-\varrho$, so ist am Ende dieses Weges

$$\sqrt{R} = \frac{ik'}{k}\sqrt{2k\varrho} \quad .$$

Wird z weiter auf einem verschwindenden Kreise um den Punkt $1:k$ geführt, so durchläuft es die Werte

$$\frac{1}{k}+\varrho e^{i\varphi} \quad \text{von} \quad \varphi=\pi \quad \text{bis} \quad \varphi=-\pi \quad ,$$

und am Ende ist

$$\sqrt{R} = -\frac{ik'}{k}\sqrt{2k\varrho} \quad .$$

Auf dem weitern Wege im obern Blatte entlang der realen Achse bis zu dem dicht vor $+1$ liegenden Punkte $1+\varrho e^{2i\pi}$ nimmt $\sqrt{R}$ anfangs zu und dann wieder ab und ist schließlich

$$\sqrt{R} = -ik'\sqrt{2\varrho} \quad .$$

Durchläuft dann z in der Richtung abnehmender Winkel einen verschwindend kleinen Halbkreis um den Punkt $+1$, so erlangt $\sqrt{R}$ wieder seinen Ausgangswert

$$\sqrt{R} = k'\sqrt{2\varrho} \quad .$$

Dieser Weg ist in Fig. 67 durch I veranschaulicht. Das Integral F über diesen Weg erstreckt besteht aus den beiden Integralen über die verschwindend kleinen Kreise und aus zwei geradlinigen Integralen. Die ersten beiden sind bekanntlich Null. Der geradlinige Teil entlang des obern Randes der realen Achse liefert

$$\frac{1}{i}\int\limits_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}} \quad .$$

Setzt man hier

$$k'^2 = 1-k^2 , \qquad x = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2\xi^2}} \quad ,$$

so erhält man leicht

$$\frac{1}{i}\int\limits_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}} = -i\int\limits_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k'^2\xi^2)}} \quad .$$

Das letztere Integral, eine zweite charakteristische Zahl in der Theorie der elliptischen Integrale erster Art, wird mit K' bezeichnet, es ist also

$$K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}} \quad .$$

Geht z auf dem untern Rande der realen Achse von $1:k$ bis 1, so haben dz und $\sqrt{R}$ entgegengesetzte Zeichen, wie in den am andern Rande der realen Achse gegenüberliegenden Punkten; daher hat das Integral von $1:k$ bis 1 denselben Wert, wie entlang des obern Randes von 1 bis $1:k$. Das ganze in der angegebenen Richtung über den Weg Fig. 67, I erstreckte Integral F hat also den Betrag

$$-2iK' \quad .$$

Man überzeugt sich leicht, daß das Integral entlang des Weges, der im untern Blatte unter dem soeben beschriebenen liegt, den entgegengesetzt gleichen Weg hat.

In den Punkten der realen Achse, die unendlich nahe bei -1 in der Richtung nach $-1:k$ zu auf dem obern bezw. untern Rande der realen Achse liegen, hat $\sqrt{R}$ die Werte, wenn wieder im Radikanden Glieder zweiten Grades in ϱ vernachlässigt werden,

$$\sqrt{R} = ik'\sqrt{2\varrho}\,, \qquad \text{bezw.} \qquad = -ik'\sqrt{2\varrho} \quad ,$$

für die Punkte der realen Achse, die unmittelbar vor $-1:k$, nach -1 zu, auf dem obern bezw. untern Rande liegen, ist

$$\sqrt{R} = i\frac{k'}{k}\sqrt{2k\varrho} \qquad \text{bezw.} \qquad -i\frac{k'}{k}\sqrt{2k\varrho} \quad .$$

Das entlang des obern Randes der realen Achse von -1 bis $-1:k$ erstreckte Integral F hat somit den Wert

$$\frac{1}{i}\int_{-1}^{-\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}} \quad .$$

Ersetzt man hier x durch $-x$, so erkennt man, daß dieser Wert gleich iK' ist.

Geht z auf dem untern Rande der realen Achse von $-1:k$ bis -1, so haben dz und $\sqrt{R}$ entgegengesetzte Zeichen, wie in den am obern Rande gegenüberliegenden Punkten; also ist auch das Integral F über diesen Weg erstreckt gleich iK'. Verbindet man diese beiden Integrationsstrecken durch verschwindende Kreise um die Punkte -1 und $-1:k$, so ist für diese Integrationswege $F = 0$, mithin ist das Integral über den Weg II (Fig. 67) gleich

$$2iK' \quad ,$$

das über den im zweiten Blatte darunter liegenden Weg ist daher $-2iK'$.

15. Wir erkennen leicht, daß jeder Weg, der vom Nullpunkte auf der RIEMANNschen Fläche bis zu einem gegebenen Endpunkte irgendwie führt, durch einen Weg ersetzt werden kann, der keinen Ausnahmepunkt umkreist und auf Wege von der Art a, b, c, d, e, f, im positiven oder negativen Sinne durch-

laufen, und auf einmalige oder zweimalige Umkreisungen der einzelnen Windungspunkte (Fig. 68). Hieraus folgt: Das Integral erster Art

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$$

ist unendlich vieldeutig und hat zwei Periodizitätsmoduln, nämlich den realen $4K$ und den imaginären $2iK'$.

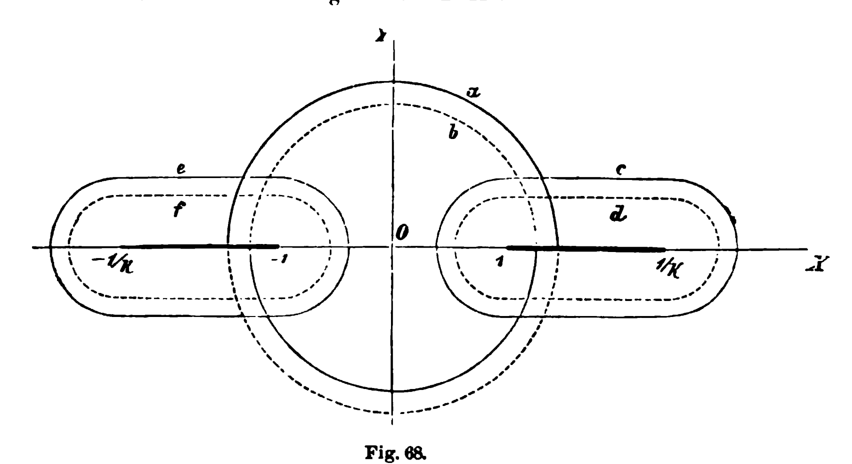


Fig. 68.

Um das elliptische Integral erster Art als eindeutige Funktion des Ortes der RIEMANNschen Fläche darzustellen, haben wir zwei Querschnitte Q_1 und Q_2 zu ziehen, die wir so anordnen, wie in Fig. 69.

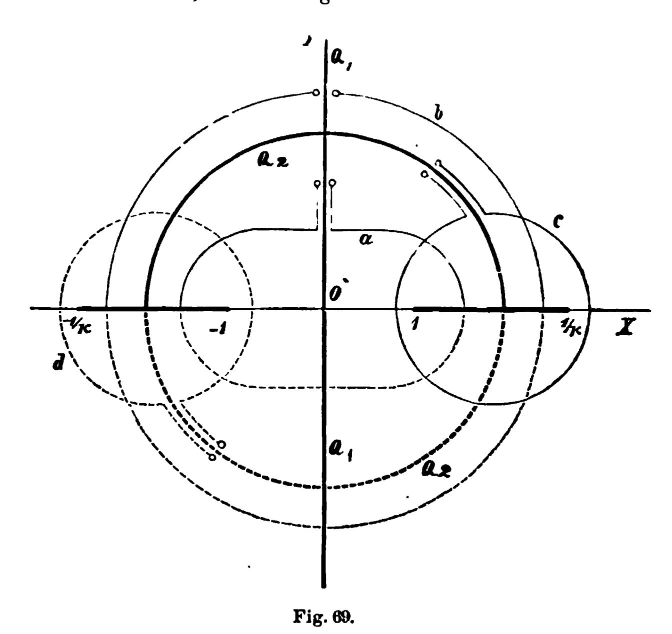


Fig. 69.

Um von einem Punkte am rechten Ufer von Q_1 zu dem am linken gegenüberliegenden zu kommen, haben wir einen Weg wie *a* oder *b* zurückzulegen; daher ist für jeden Punkt des linken Ufers F um $4K$ größer als für den gegenüberliegenden des rechten Ufers. Von einem Punkte des innern Ufers von Q_2

gelangt man zu einem Punkte des äußern Ufers auf einem Wege c oder d; mithin ist F für einen Punkt des innern Ufers um $2iK'$ kleiner, als für den am andern Ufer gegenüberliegenden Punkt.

Für jeden Punkt der Fläche ist das Integral eindeutig bestimmt, sobald es in einem Punkte einen gegebenen (nicht willkürlichen) Wert hat, sobald z. B. festgestellt ist, daß es im obern Blatte im Nullpunkte rechts vom Querschnitte den Wert

$$m \cdot 4K + n \cdot 2K'i$$

haben soll, wo m und n gegebene ganze positive oder negative Zahlen sind.

16. Im Anschlusse hieran ergeben sich die Periodizitätsmoduln des elliptischen Integrals zweiter Art.

Wird das Integral

$$\int \sqrt{R}\,dz\,, \quad R = \frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}$$

im obern Blatte entlang der realen Achse von 0 bis $+1$ erstreckt, so hat es den Wert

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}}\,dx \quad ,$$

die Wurzel positiv gerechnet.

Dies ist eine charakteristische Zahl für die Integrale zweiter Art; sie wird mit E bezeichnet, so daß also

$$E = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}}\,dx \quad .$$

Geht z in einem unendlich kleinen Kreise dann um den Punkt $+1$ bis ins untere Blatt, so ist für diesen Teil des Weges das Integral $\int \sqrt{R}\,dz = 0$.

In den Punkten der realen Achse des untern Blattes haben $\sqrt{R}$ und dz entgegengesetzt gleiche Werte wie in den darüber liegenden Punkten des obern, also ist für diesen Weg im untern Blatte

$$\int_1^0 \sqrt{R}\,dz = E \quad .$$

In Punkten der realen Achse, die in demselben Blatte und gleich weit vom Nullpunkte gelegen sind, hat $\sqrt{R}$ denselben Wert. Integriert man daher im untern Blatte in der bisherigen Richtung weiter bis zum Punkte -1, umgeht denselben in einem verschwindenden Kreise, der ins obere Blatt führt, und kehrt hier entlang der realen Achse zum Nullpunkte zurück, so hat für den ganzen in der angegebenen Richtung beschriebenen Weg das Integral zweiter Art den Wert $4E$.

Wird das Integral zweiter Art über den Weg I in Fig. 67 erstreckt, so ist es doppelt so groß wie das im obern Blatte genommene Integral

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \sqrt{R}\,dx \quad .$$

Wir setzen

$$x = \frac{1}{k}\sqrt{1 - k'^2 \xi^2} \quad ;$$

den Grenzen $x = 1$ und $x = 1:k$ entsprechen dann die Grenzen $\xi = 1$ und $\xi = 0$. Ferner findet man

$$1 - x^2 = \frac{1}{k^2}(k^2 - 1 + k'^2\xi^2) = -\frac{k'^2}{k^2}(1 - \xi^2)\,, \quad 1 - k^2x^2 = k'^2\xi^2 \quad ,$$

$$dx = -\frac{k'^2}{k}\cdot\frac{\xi\,d\xi}{\sqrt{1 - k'^2\xi^2}} \quad .$$

Hieraus folgt

$$\int_1^{\frac{1}{k}}\sqrt{\frac{1 - k^2x^2}{1 - x^2}}\,dx = i\int_0^1 \frac{-k'^2\xi^2\,d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k'^2\xi^2)}}$$

$$= i\int_0^1\sqrt{\frac{1 - k'^2\xi^2}{1 - \xi^2}}\,d\xi - i\int_0^1\frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k'^2\xi^2)}} \quad .$$

Das erste Integral rechts bezeichnen wir mit E', es ist also

$$E' = \int_0^1\sqrt{\frac{1 - k'^2x^2}{1 - x^2}}\,dx \quad .$$

Daher ist

$$\int_1^{\frac{1}{k}}\sqrt{\frac{1 - k^2x^2}{1 - x^2}}\,dx = i(E' - K') \quad .$$

Das Integral zweiter Art, erstreckt über den Weg I oder II Fig. 67, hat somit den Betrag $i\cdot 2(E' - K')$. Wir schließen daher: Das elliptische Integral zweiter Art ist unendlich vieldeutig; es hat den realen Periodizitätsmodul $4E$ und den imaginären $i\cdot 2(E' - K')$.

Führen wir die RIEMANNsche Fläche durch dieselben Querschnitte, wie bei Integralen erster Art, auf eine einfach zusammenhängende Fläche zurück, so ist das Integral zweiter Art eine eindeutige Funktion des Ortes der Fläche. Für einen Punkt auf dem rechten Ufer von Q_1 ist das Integral um $4E$ kleiner als für den gegenüberliegenden Punkt des linken Ufers; und für einen Punkt des innern Ufers von Q_2 ist es um $i\cdot 2(E' - K')$ größer als für den gegenüberliegenden Punkt des äußern Ufers.

Wir werden später sehen, daß sich jedes Integral zweiter Art durch ein Vielfaches eines Integrals erster Art mit derselben obern Grenze, vermehrt um eine periodische transcendente Funktion dieses Integrals ausdrücken läßt; das Integral dritter Art wird in ähnlicher Weise dargestellt werden.

Aus diesen Darstellungen — bis zu denen wir uns vorwiegend mit den Integralen erster Art beschäftigen werden — folgen dann ohne weiteres die Periodizitätsmoduln der Integrale zweiter und dritter Art.

§ 6. Der Summensatz für elliptische Integrale. Numerische Berechnung von Integralen erster und zweiter Art.

1. EULER hat zuerst nachgewiesen, welche von Differentialen freie Bedingungsgleichung zwischen z und ζ bestehen muß, wenn die elliptischen Integrale erster Art

$$\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E}} \quad \text{und} \quad \int_0^\zeta\frac{dz}{\sqrt{Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E}}$$

eine gegebene Summe G haben sollen. Insofern man die Zahl G als ein elliptisches Integral

$$G = \int_0^{\mathfrak{z}} \frac{dz}{\sqrt{Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E}}$$

ansehen kann, lehrt die Entdeckung EULERS, die Summe zweier elliptischen Integrale erster Art mit gleichem Modul in eins zu verwandeln. Angewendet auf Normalintegrale erster Art lautet dieser Satz: Es ist

$$1)\quad \int_0^{z} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + \int_0^{\zeta} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \int_0^{\mathfrak{z}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} ,$$

wenn

$$\mathfrak{z} = \frac{z\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)} + \zeta\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}{1-k^2z^2\zeta^2} .$$

Beweis. Wir setzen zunächst $\mathfrak{z}$ als konstant voraus; zwischen unendlich kleinen Änderungen von z und ζ besteht dann die Differentialgleichung

$$2)\quad \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} = 0 ,$$

aus welcher wir die folgende ableiten

$$3)\quad \frac{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}{1-k^2z^2\zeta^2}\,dz + \frac{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}{1-k^2z^2\zeta^2}\,d\zeta = 0 .$$

Beide Glieder links integrieren wir teilweis; das erste Glied ergibt

$$4)\quad z\frac{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}{1-k^2z^2\zeta^2} - \int \frac{P\,d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} - \int Q\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}\,dz ,$$

wobei abkürzungsweise gesetzt worden ist

$$P = \frac{z\zeta[2k^2(z^2+\zeta^2) - (1+k^2)(1+k^2z^2\zeta^2)]}{(1-k^2z^2\zeta^2)^2} , \quad Q = \frac{2k^2z^2\zeta^2}{(1-k^2z^2\zeta^2)^2} .$$

Vertauscht man in 4) z mit ζ, so erhält man das Ergebnis der teilweisen Integration des zweiten Teils der linken Seite in 3); dabei ändern P und Q ihre Werte nicht; daher folgt aus 3) schließlich

$$5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{z\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\zeta^2)} + \zeta\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}{1-k^2z^2\zeta^2} \\ &- \int P\left[\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}\right] \\ &- \int Q\left[\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}\,dz + \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}\,d\zeta\right] = c ,\end{aligned}\right.$$

wobei c eine noch näher zu bestimmende Konstante bezeichnet. Zufolge der Differentialgleichung 2) verschwinden die Integrale in 5) und es ergibt sich

$$6)\quad \frac{z\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)} + \zeta\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}{1-k^2z^2\zeta^2} = c .$$

Setzt man in 1) und 6) $\zeta = 0$, so ergibt sich $z = \mathfrak{z} = c$, w. z. b. w.

Macht man die Ersetzungen

$$z = \sin\varphi\,,\qquad \zeta = \sin\psi\,,\qquad \mathfrak{z} = \sin\sigma\quad,$$

so nimmt der Summensatz die Gestalt an: Es ist

$$7)\qquad \int\limits_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + \int\limits_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = \int\limits_0^{\sigma}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}\quad,$$

wenn

$$\sin\sigma = \frac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta(\psi) + \sin\psi\cos\varphi\,\Delta(\varphi)}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}\quad.$$

Für $\zeta = z$ ergibt sich insbesondere: Es ist

$$8)\qquad \int\limits_0^{z}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\mathfrak{z}}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\quad,$$

wenn

$$\mathfrak{z} = \frac{2z\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}{1-k^2z^4}\quad.$$

Hat in der durch die beiden angegebenen Querschnitte auf einfachen Zusammenhang gebrachten RIEMANNschen Fläche das Integral erster Art für den Nullpunkt des obern Blattes den Wert Null, so ist

$$\int\limits_0^{-\psi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = -\int\limits_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}\quad.$$

Ersetzt man in 7) ψ durch $-\psi$, so folgt daher: Es ist

$$9)\qquad \int\limits_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} - \int\limits_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = \int\limits_0^{\sigma}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}\quad,$$

wenn

$$\sin\sigma = \frac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta(\psi) - \sin\psi\cos\varphi\,\Delta(\varphi)}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}\quad.$$

2. Von der Gleichung ausgehend

$$\sin\sigma = \frac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta(\psi) + \sin\psi\cos\varphi\,\Delta(\varphi)}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

kann man $\cos\sigma$ und $\Delta(\sigma)$ als rationale Funktionen von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\Delta(\varphi)$, $\sin\psi$, $\cos\psi$, $\Delta(\psi)$ erhalten. Wir wählen zu dieser Ableitung folgenden Weg*): Aus der Gleichung

$$1)\qquad \sin\sigma = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

folgt bekanntlich $\sigma = \alpha + \beta$ oder $\pi - (\alpha + \beta)$ und

$$2)\qquad \cos\sigma = \pm(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\quad.$$

Ersetzen wir hier

$$\sin\alpha \text{ durch } \frac{\cos\varphi}{n}\,,\qquad \sin\beta \text{ durch } \frac{\cos\psi}{n}\quad,$$

---

*) Vgl. SCHELLBACH, Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunktionen. Berlin 1864, S. 109.

wobei

$$n = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi \sin^2\psi} \quad ,$$

so ist zu setzen

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{\cos^2\varphi}{n^2}} = \pm\frac{\sin\varphi\,\Delta(\psi)}{n}, \quad \cos\beta = \pm\frac{\sin\psi\,\Delta(\varphi)}{n} \quad .$$

Wählt man hier die obern Vorzeichen, so ergibt sich aus 1) und 2)

$$3) \quad \begin{cases} \sin\sigma = \dfrac{\cos\varphi\sin\psi\,\Delta(\varphi) + \cos\psi\sin\varphi\,\Delta(\psi)}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi} \quad , \\[2ex] \cos\sigma = \pm\dfrac{\sin\varphi\sin\psi\,\Delta(\varphi)\,\Delta(\psi) - \cos\varphi\cos\psi}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi} \quad . \end{cases}$$

Im Summensatze entsprechen einander $\psi = 0$ und $\sigma = \varphi$; daher hat man in $\cos\sigma$ das untere Zeichen, und in 2)

$$4) \qquad \sigma = \pi - (\alpha + \beta)\,, \quad \alpha = \pi - (\sigma + \beta)\,, \quad \beta = \pi - (\sigma + \alpha)$$

zu nehmen; es ist also

$$5) \qquad \cos\sigma = \frac{\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta(\varphi)\,\Delta(\psi)}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi} \quad .$$

Aus 1) folgt mit Rücksicht auf 4)

$$\sin\beta = \sin\sigma\cos\alpha + \cos\sigma\sin\alpha \quad ,$$
$$\sin\alpha = \sin\sigma\cos\beta + \cos\sigma\sin\beta \quad ,$$

daher hat man

$$6) \quad \begin{cases} \cos\psi = \cos\sigma\cos\varphi + \sin\sigma\sin\varphi\,\Delta(\psi) \quad , \\ \cos\varphi = \cos\sigma\cos\psi + \sin\sigma\sin\psi\,\Delta(\varphi) \quad . \end{cases}$$

Vertauscht man σ, φ, ψ gegen φ, σ, $-\psi$, so ergibt sich aus der letzten Formel

$$7) \qquad \cos\sigma = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta(\sigma) \quad .$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf 5)

$$8) \qquad \Delta(\sigma) = \frac{\Delta(\varphi)\,\Delta(\psi) - k^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi} \quad .$$

Aus 3) und 5) folgt noch die für die numerische Berechnung von σ brauchbare Gleichung

$$9) \qquad \operatorname{tang}\sigma = \frac{\operatorname{tang}\psi\,\Delta(\varphi) - \operatorname{tang}\varphi\,\Delta(\psi)}{1 - \operatorname{tang}\psi\operatorname{tang}\varphi\,\Delta(\varphi)\,\Delta(\psi)} \quad .$$

Hiernach ist $\operatorname{tang}\sigma = \operatorname{tang}(\mu + \nu)$, wenn

$$\operatorname{tang}\mu = \Delta(\varphi)\operatorname{tang}\psi\,, \quad \operatorname{tang}\nu = \Delta(\psi)\operatorname{tang}\varphi \quad .$$

3. Es liegt nahe zu fragen, ob unter der Voraussetzung, daß φ, ψ und σ durch die in Nr. 1 und 2 entwickelten Gleichungen verbunden sind, das Normalintegral zweiter Art

$$E(\sigma) = \int_0^\sigma \Delta(\varphi)\,d\varphi$$

mit der Summe

$$E(\varphi) + E(\psi) = \int_0^\varphi \Delta(\varphi)\,d\varphi + \int_0^\psi \Delta(\varphi)\,d\varphi$$

in einfacher Weise zusammenhängt. Wir setzen*)

$$1) \qquad E(\varphi) + E(\psi) = S \quad ,$$

*) SCHLOEMILCH, Kompendium der höheren Analysis, 2. Band, 2. Aufl., S. 333. Braunschweig 1874.

und nehmen σ als gegeben, φ und ψ dagegen als veränderlich an. Durch Differentiation folgt aus 1)

$$2)\qquad \Delta(\varphi)\,d\varphi + \Delta(\psi)\,d\psi = dS \quad .$$

Nach der Annahme für σ gilt

$$3)\qquad \Delta(\psi)\,d\varphi + \Delta(\varphi)\,d\psi = 0 \quad ,$$

daher hat man

$$4)\qquad [\Delta(\varphi) + \Delta(\psi)]\,(d\varphi + d\psi) = dS \quad .$$

Setzt man den Wert für $\cos\sigma$ aus Nr. 2, 7) in 6) ein, so erhält man

$$5)\qquad \begin{cases} \Delta(\varphi) = \dfrac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta(\sigma) + \cos\varphi\sin\psi}{\sin\sigma} \quad , \\[2ex] \Delta(\psi) = \dfrac{\sin\psi\cos\varphi\,\Delta(\sigma) + \cos\psi\sin\varphi}{\sin\sigma} \quad . \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$6)\qquad \Delta(\varphi) \pm \Delta(\psi) = \frac{\Delta(\sigma) \pm 1}{\sin\sigma}\sin(\varphi \pm \psi) \quad ,$$

wobei entweder die obern oder die untern Zeichen gelten.

Setzt man diesen Wert für $\Delta(\varphi) + \Delta(\psi)$ in 4) ein, so entsteht

$$-\frac{\Delta(\sigma) + 1}{\sin\sigma}\,d\cos(\varphi + \psi) = dS \quad ,$$

und hieraus durch Integration und in Rücksicht auf 1)

$$E(\varphi) + E(\psi) = \frac{\Delta(\sigma) + 1}{\sin\sigma}\,[C - \cos(\varphi + \psi)] \quad .$$

Für $\psi = 0$ wird $\varphi = \sigma$; wählt man $E(0) = 0$, so ist

$$E(\sigma) = \frac{\Delta(\sigma) + 1}{\sin\sigma}\,(C - \cos\sigma) \quad .$$

Durch Subtraktion von der vorhergehenden Gleichung ergibt sich

$$E(\varphi) + E(\psi) - E(\sigma) = \frac{\Delta(\sigma) + 1}{\sin\sigma}\,(\cos\sigma - \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi) \quad .$$

Nach Nr. 2, 7) ist

$$\cos\sigma - \cos\varphi\cos\psi = -\sin\varphi\sin\psi\,\Delta(\sigma) \quad ,$$

und daher

$$E(\varphi) + E(\psi) - E(\sigma) = \frac{1 - \Delta^2(\sigma)}{\sin\sigma}\cdot\sin\varphi\sin\psi \quad .$$

Ersetzt man hier $\Delta^2(\sigma)$ durch $1 - k^2\sin^2\sigma$, so folgt schließlich

$$7)\qquad E(\varphi) + E(\psi) = E(\sigma) + k^2\sin\sigma\sin\varphi\sin\psi \quad .$$

Dies ist der **Summensatz für elliptische Integrale zweiter Art.**

Es ist selbstverständlich, daß man τ so bestimmen kann, daß der Gleichung genügt wird

$$E(\varphi) + E(\psi) = E(\tau) \quad ;$$

dann würde aber $\sin\tau$ sich nicht, wie $\sin\sigma$, rational durch $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\Delta(\varphi)$, $\sin\psi$, $\cos\psi$, $\Delta(\psi)$ ausdrücken lassen.

4. Ähnlich verfahren wir bei den Integralen dritter Art

$$\Pi_0(h, k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + h\sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi)} \quad .$$

Wir setzen

$$1)\qquad \Pi_0(\varphi) + \Pi_0(\psi) = S$$

und nehmen wieder σ als gegeben, φ und ψ als veränderlich an.

Durch Differentiation folgt aus 1)

$$\frac{d\varphi}{(1 + h\sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi)} + \frac{d\psi}{(\Delta + h\sin^2\psi)\,\Delta(\psi)} = dS \quad .$$

Da nun

$$2)\qquad \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + \frac{d\psi}{\Delta(\psi)} = 0 \quad ,$$

so folgt

$$3)\qquad \begin{cases} dS = \left(\dfrac{1}{1 + h\sin^2\varphi} - \dfrac{1}{1 + h\sin^2\psi}\right)\dfrac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} \quad , \\ \quad = \dfrac{h(\sin^2\psi - \sin^2\varphi)}{(1 + h\sin^2\varphi)(1 + h\sin^2\psi)} \cdot \dfrac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} \quad . \end{cases}$$

Aus Nr. 3, 7) folgt durch Differentiation

$$\Delta(\varphi)\,d\varphi + \Delta(\psi)\,d\psi = k^2 \sin\sigma\, d(\sin\varphi\sin\psi) \quad .$$

Führt man hier $\Delta(\psi)$ aus 2) ein, so entsteht

$$(\sin^2\psi - \sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = \sin\sigma\, d(\sin\varphi\sin\psi) \quad .$$

Dies in 3) eingesetzt, ergibt

$$dS = \frac{h\sin\sigma}{(1 + h\sin^2\varphi)(1 + h\sin^2\psi)}\, d(\sin\varphi\sin\psi) \quad .$$

Setzen wir

$$\sin\varphi\sin\psi = q\,, \quad \sin^2\varphi + \sin^2\psi = p \quad ,$$

so wird

$$dS = \frac{h\sin\sigma}{1 + hp + h^2q^2}\, dq \quad .$$

Um p durch q auszudrücken, gehen wir von der Gleichung aus

$$\cos\sigma = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta(\sigma)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} [\cos\sigma + q\,\Delta(\sigma)]^2 &= \cos^2\varphi\cos^2\psi = (1 - \sin^2\varphi)(1 - \sin^2\psi) \\ &= 1 - p + q^2 \quad . \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} p &= 1 + q^2 - [\cos\sigma + q\,\Delta(\sigma)]^2 \\ &= \sin^2\sigma - 2\cos\sigma\,\Delta(\sigma)\cdot q + k^2\sin^2\sigma\cdot q^2 \quad . \end{aligned}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$A = 1 + h\sin^2\sigma\,, \quad B = h\cos\sigma\,\Delta(\sigma)\,, \quad C = h\,k^2\sin^2\sigma + h^2 \quad ,$$

so wird

$$dS = \frac{h\sin\sigma\, dq}{A - 2Bq + Cq^2} \quad .$$

Daher ist schließlich

$$S = h\sin\sigma\int\frac{dq}{A - 2Bq + Cq^2} + \text{Konst} \quad .$$

Die Integrationskonstante wird bestimmt, indem wir $\psi = 0$ setzen; alsdann wird $q = 0$, $\varphi = \sigma$, $S = \Pi_0(h, k, \sigma)$, und es ist daher

$$\Pi_0(\sigma) = h \sin\sigma \int\limits_{(q=0)} \frac{dq}{A - 2Bq + Cq^2} + \text{Konst} \quad ,$$

folglich

$$S = \Pi_0(\sigma) + h \sin\sigma \int\limits_0^q \frac{dq}{A - 2Bq + Cq^2} \quad .$$

Wird dies in 1) eingeführt, so entsteht schließlich

$$\Pi_0(\varphi) + \Pi_0(\psi) = \Pi_0(\sigma) + h \sin\sigma \int\limits_0^q \frac{dq}{A - 2Bq + Cq^2} \quad ,$$

Sind also die Winkel φ, ψ, σ durch die vom Parameter h unabhängige Gleichung verbunden

$$\sin\sigma = \frac{\sin\varphi \cos\psi\, \Delta\psi + \sin\psi \cos\varphi\, \Delta(\varphi)}{1 - k^2 \sin^2\varphi \sin^2\psi} \quad ,$$

so wird durch das Integral $\Pi_0(h, k, \sigma)$ die Summe $\Pi_0(h, k, \varphi) + \Pi_0(h, k, \psi)$ bis auf ein Glied dargestellt, welches das Integral einer $\sin\sigma$, $\cos\sigma$ und $\Delta(\sigma)$ rational enthaltenden algebraischen Funktion ist.

Dies ist der Summensatz für Legendres Normalintegrale dritter Art.

---

5. Aus § 5, Nr. 12, 12) entsteht, wenn $z = \sin\varphi$, $\zeta = \sin\psi$ gesetzt wird,

$$1) \qquad F(k, \varphi) = (1 + \lambda) F(\lambda, \psi) \quad ,$$

wobei

$$2) \quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{1 - k'}{1 + k'}, & \sin\varphi = \dfrac{(1 + \lambda)\sin\psi}{1 + \lambda \sin^2\psi} \quad , \\[2ex] \cos\varphi = \dfrac{\cos\psi \cdot \Delta(\lambda, \psi)}{1 + \lambda \sin^2\psi}, & \Delta(k, \varphi) = \dfrac{1 - \lambda \sin^2\psi}{1 + \lambda \sin^2\psi} \quad . \end{cases}$$

Das Integral $F(\lambda, \psi)$ ändern wir weiter nach Nr. 1, 8). Ersetzen wir dort z durch $\sin\psi$, $\mathfrak{z}$ durch $\sin\varphi_1$, k durch λ, so ergibt sich

$$3) \qquad F(\lambda, \psi) = \tfrac{1}{2} F(\lambda, \varphi_1) \quad ,$$

wenn

$$4) \qquad \sin\varphi_1 = \frac{2 \sin\psi \cos\psi\, \Delta(\lambda, \psi)}{1 - \lambda^2 \sin^4\psi} \quad .$$

Aus 2) folgt

$$\frac{\cos\varphi \sin\varphi}{\Delta(k, \varphi)} = \frac{(1 + \lambda)\cos\psi \sin\psi\, \Delta(\lambda, \psi)}{1 - \lambda^2 \sin^4\psi} \quad .$$

Daher ist

$$5) \qquad \sin\varphi_1 = \frac{(1 + k')\cos\varphi \sin\varphi}{\Delta(k, \varphi)} \quad .$$

Hieraus findet sich leicht

$$6) \qquad \cos\varphi_1 = \frac{\cos^2\varphi - k' \sin^2\varphi}{\Delta(k, \varphi)}, \quad \Delta(\lambda, \varphi_1) = \frac{\cos^2\varphi + k' \sin^2\varphi}{\Delta(k, \varphi)} \quad .$$

Setzt man hierin

$$\cos^2\varphi = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi), \quad \sin^2\varphi = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) \quad ,$$

so erhält man

$$7)\qquad \cos\varphi_1 = \frac{1 - k' + (1 + k')\cos 2\varphi}{2\,\Delta(k, \varphi)} = \frac{1 + k'}{2} \cdot \frac{\lambda + \cos 2\varphi}{\Delta(k, \varphi)} \quad .$$

Aus 5) und 7) folgt nun

$$8)\qquad \operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{\sin 2\varphi}{\lambda + \cos 2\varphi} \quad ,$$

und hieraus

$$9)\qquad \sin(2\varphi - \varphi_1) = \lambda \sin\varphi_1 \quad .$$

Diese Gleichung ist brauchbar zur Berechnung von φ, wenn φ_1 gegeben ist. Will man φ_1 aus φ finden, so kann man statt 5) oder 6) bequemere Formeln haben, indem man aus 5) und 6) durch Division bildet

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{(1 + k')\operatorname{tang}\varphi}{1 - k'\operatorname{tang}^2\varphi} \quad ,$$

woraus folgt

$$10)\qquad \operatorname{tang}(\varphi_1 - \varphi) = k'\operatorname{tang}\varphi \quad .$$

Aus 1), 3) und 10) hat man daher

$$11)\qquad F(k, \varphi) = \frac{1 + \lambda}{2} F(\lambda, \varphi_1) = \frac{1}{1 + k'} F(\lambda, \varphi_1) \quad ,$$

wenn

$$\lambda = \frac{1 - k'}{1 + k'}, \quad \operatorname{tang}(\varphi_1 - \varphi) = k'\operatorname{tang}\varphi \quad .$$

Für die umgekehrte Änderung vertauschen wir in 1), 2), 3) und 9)

$$\varphi, \ \varphi_1, \ k, \ \lambda$$

mit

$$\varphi_1, \ \varphi, \ \lambda, \ k$$

und erhalten

$$12)\qquad F(k, \varphi) = \frac{2}{1 + k} F(\lambda, \varphi_1) \quad ,$$

wenn

$$\lambda = \frac{2\sqrt{k}}{1 + k}, \quad \sin(2\varphi_1 - \varphi) = k \sin\varphi \quad .$$

Beide Änderungen, 11) und 12), sind für die numerische Berechnung von Integralen erster Art sehr gut zu gebrauchen*).

6. Bezüglich der letzten bemerken wir zunächst, daß $(1 + k) : 2 < 1$, also $\lambda > \sqrt{k}$ und um so mehr also, da k echt gebrochen ist,

$$\lambda > k \quad ;$$

ferner sieht man sofort, daß

$$\varphi_1 < \varphi \quad .$$

Durch diese Änderung wird also der Modul vergrößert und die Amplitude verkleinert. Wenden wir dies wiederholt an, berechnen also eine Reihe $\lambda, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ von Moduln

$$\lambda = \frac{2\sqrt{k}}{1 + k}, \quad \lambda_2 = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1 + \lambda}, \quad \lambda_3 = \frac{2\sqrt{\lambda_2}}{1 + \lambda_2}, \quad \ldots \quad \lambda_n = \frac{2\sqrt{\lambda_{n-1}}}{1 + \lambda_{n-1}}$$

*) Die erstere heißt nach ihrem Erfinder LANDENsche Änderung. Philosophical Transactions 1775.

und die zugehörigen Amplituden aus

$$\sin(2\varphi_1 - \varphi) = k \sin\varphi\,, \quad \sin(2\varphi_2 - \varphi_1) = \lambda \sin\varphi_1\,, \quad \sin(2\varphi_3 - \varphi_2) = \lambda_2 \sin\varphi_2\,, \quad \ldots \quad \sin(2\varphi_n - \varphi_{n-1}) = \lambda_{n-1} \sin\varphi_{n-1}\,,$$

so fragt es sich, welchen Grenzen diese zunehmenden Moduln und die abnehmenden Amplituden sich nähern, wenn n unendlich wächst. Aus

$$\lambda_n = \frac{2\sqrt{\lambda_{n-1}}}{1 + \lambda_{n-1}}$$

folgt

$$1 - \lambda_n = \frac{(1 - \sqrt{\lambda_{n-1}})^2}{1 + \lambda_{n-1}} \quad .$$

Da nun $\sqrt{\lambda_{n-1}} > \lambda_{n-1} > k$, so folgt

$$1 - \lambda_n < \frac{(1 - \lambda_{n-1})^2}{1 + k} \quad .$$

Wendet man dies wiederholt an, so erhält man

$$1 - \lambda < \frac{(1-k)^2}{1+k}\,, \quad 1 - \lambda_1 < \frac{(1-\lambda)^2}{1+k} < \frac{(1-k)^4}{(1+k)^3} \quad ,$$

$$1 - \lambda_3 < \frac{(1-\lambda_2)^2}{1+k} < \frac{(1-k)^8}{(1+k)^7}\,, \quad 1 - \lambda_4 < \frac{(1-\lambda_3)^2}{1+k} < \frac{(1-k)^{16}}{(1+k)^{15}}$$

$$\ldots, \quad 1 - \lambda_n < \frac{(1-k)^{2n}}{(1+k)^{2n-1}} \quad .$$

Hieraus folgt, daß sich $1 - \lambda_n$ der Grenze Null nähert, und zwar sehr rasch, wenn k nicht zu klein ist; also ist

$$\lim \lambda_n = 1 \quad .$$

Der Grenzwert von φ_n ergibt sich durch wiederholte Anwendung der Gleichung

$$\sin(2\varphi_n - \varphi_{n-1}) = \lambda_{n-1} \sin\varphi_{n-1}$$

im Verlaufe der Rechnung von selbst; wird derselbe mit Φ bezeichnet, so kommt man schließlich auf das Integral

$$F(1, \Phi) = \int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = l\,\mathrm{tang}\left(\frac{\Phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

und hat daher

$$F(k, \varphi) = \lim\left(\frac{2}{1+k} \cdot \frac{2}{1+\lambda} \cdot \frac{2}{1+\lambda_2} \cdot \frac{2}{1+\lambda_3} \ldots\right) l\,\mathrm{tang}\left(\frac{\Phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad .$$

Da $2 : (1 + \lambda_n) = \lambda_{n+1} : \sqrt{\lambda_n}$, so kann man hierfür auch setzen

$$F(k, \varphi) = \frac{\lim \sqrt{\lambda \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \ldots}}{\sqrt{k}} \cdot l\,\mathrm{tang}\left(\frac{\Phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad .$$

7. Die Änderung Nr. 5, 11) gestaltet sich besonders einfach, wenn sie auf das Integral angewendet wird

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{a} F\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \varphi\right) \quad .$$

Alsdann ist

$$k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad k' = \frac{b}{a}, \quad \frac{1}{1+k'} = \frac{a}{a+b}, \quad \lambda = \frac{a-b}{a+b},$$

$$\operatorname{tang}(\varphi_1 - \varphi) = \frac{b}{a} \operatorname{tang}\varphi .$$

Da nun

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 \sin^2\varphi}} = \frac{a+b}{2} \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cos^2\varphi + (\sqrt{ab})^2 \sin^2\varphi}},$$

so ergibt sich aus Nr. 5, 11)

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_1^2\cos^2\varphi + b_1^2\sin^2\varphi}},$$

wobei

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{ab}, \quad \operatorname{tang}(\varphi_1 - \varphi) = \frac{b}{a} \operatorname{tang}\varphi .$$

Wendet man dies wiederholt an, so hat man zu berechnen

$$a_1 = \tfrac{1}{2}(a+b), \quad b_1 = \sqrt{ab}; \quad \operatorname{tang}(\varphi_1 - \varphi) = \frac{b}{a}\operatorname{tang}\varphi;$$

$$a_2 = \tfrac{1}{2}(a_1+b_1), \quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1}; \quad \operatorname{tang}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{b_1}{a_1}\operatorname{tang}\varphi_1;$$

$$a_3 = \tfrac{1}{2}(a_2+b_2), \quad b_3 = \sqrt{a_2 b_2}; \quad \operatorname{tang}(\varphi_3 - \varphi_2) = \frac{b_2}{a_2}\operatorname{tang}\varphi_2;$$

$$a_4 = \tfrac{1}{2}(a_3+b_3), \quad b_4 = \sqrt{a_3 b_3}; \quad \operatorname{tang}(\varphi_4 - \varphi_3) = \frac{b_3}{a_3}\operatorname{tang}\varphi_3;$$

u. s. w. u. s. w.

Bekanntlich ist

$$a_n - b_n < \tfrac{1}{2}(a_{n-1} - b_{n-1});$$

daher hat man

$$a_1 - b_1 < \tfrac{1}{2}(a - b),$$
$$a_2 - b_2 < \tfrac{1}{2}(a_1 - b_1) < \tfrac{1}{4}(a - b),$$
$$a_3 - b_3 < \tfrac{1}{2}(a_2 - b_2) < \tfrac{1}{8}(a - b),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n - b_n < \frac{1}{2}(a_{n-1} - b_{n-1}) < \frac{1}{2^n}(a - b) .$$

Wächst n unendlich, so ist daher

$$\lim(a_n - b_n) = 0 .$$

Hieraus folgt, daß die Zahlen a_n und b_n sich einer gemeinsamen Grenze c nähern; diese wird nach GAUSS*) als das arithmetisch-geometrische Mittel von a und b bezeichnet.

*) GAUSS, Sämtliche Werke, herausgegeben von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. 3, S. 361. 1866.

Wenn a_r von b_r innerhalb der angenommenen Genauigkeitsgrenzen nicht mehr voneinander (und von c) zu unterscheiden sind, so hat φ_r eine bestimmte, durch die Rechnung sich ergebende Grenze Φ erreicht, und es ist

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{2^r}\cdot\Phi \quad .$$

8. Auch durch den Summensatz allein, ohne Verbindung mit einer quadratischen Änderung, kann man ein Normalintegral erster Art und auf demselben Wege eins zweiter Art berechnen. Ist

$$1)\qquad \sin\varphi = \frac{2\sin\varphi_1\cos\varphi_1\,\Delta(\varphi_1)}{1-k^2\sin^4\varphi_1} \quad ,$$

so ist bekanntlich

$$2)\qquad F(k,\varphi) = 2F(k,\varphi_1)$$

und nach dem Summensatze für Integrale zweiter Art

$$3)\qquad E(k,\varphi) = 2E(k,\varphi_1) - k^2\sin\varphi\sin^2\varphi_1 \quad .$$

Statt der Gleichung 1) kann zur Bestimmung des Winkels φ_1 durch den Winkel φ passender die Gleichung benutzt werden, die aus Nr. 2, 7) folgt, wenn darin φ_1 für φ und ψ, und φ für σ gesetzt wird,

$$\cos\varphi = \cos^2\varphi_1 - \sin^2\varphi_1\,\Delta(\varphi) \quad ,$$

woraus sofort folgt

$$\sin\varphi_1 = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\Delta(\varphi)}} \quad .$$

Bestimmt man einen Hilfswinkel γ durch die Gleichung

$$\sin\gamma = k\sin\varphi \quad ,$$

so ist

$$\Delta(\varphi) = \cos\gamma \quad ,$$

und

$$\sin\varphi_1 = \sin\tfrac{1}{2}\varphi : \cos\tfrac{1}{2}\gamma \quad .$$

Berechnet man nun eine Reihe von Winkeln nach den Formeln

$$\begin{aligned}
&\sin\varphi_1 = \sin\tfrac{1}{2}\varphi : \cos\tfrac{1}{2}\gamma\,, && \sin\gamma_1 = k\sin\varphi_1 \;;\\
&\sin\varphi_2 = \sin\tfrac{1}{2}\varphi_1 : \cos\tfrac{1}{2}\gamma_1\,, && \sin\gamma_2 = k\sin\varphi_2 \;;\\
&\sin\varphi_3 = \sin\tfrac{1}{2}\varphi_2 : \cos\tfrac{1}{2}\gamma_2\,, && \sin\gamma_3 = k\sin\varphi_3 \;;\\
&\sin\varphi_4 = \sin\tfrac{1}{2}\varphi_3 : \cos\tfrac{1}{2}\gamma_3\,, && \sin\gamma_4 = k\sin\varphi_4 \;;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\sin\varphi_r = \sin\tfrac{1}{2}\varphi_{r-1} : \cos\tfrac{1}{2}\gamma_{r-1} \quad ,
\end{aligned}$$

so ist

$$F(k,\varphi) = 2^r F(k,\varphi_r)$$

$$E(k,\varphi) = 2^r E(k,\varphi_r)$$

$$-(\sin\varphi\sin^2\gamma_1 + 2\sin\varphi_1\sin^2\gamma_2 + 2^2\sin\varphi_2\sin^2\gamma_3 + \ldots + 2^{r-1}\sin\varphi_{r-1}\sin^2\gamma_r) \quad .$$

Setzt man die Berechnung so weit fort, bis höhere Potenzen von φ, als die fünfte, vernachlässigt werden können, so hat man zu setzen, wenn vorübergehend φ_r durch φ ersetzt wird,

$$\frac{1}{\Delta(\varphi)} = (1 - k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{k^2}{2}\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6}\right)^2 + \frac{3k^4}{8}\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6}\right)^4,$$

$$\Delta(\varphi) = 1 - \frac{k^2}{2}\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6}\right)^2 - \frac{k^4}{8}\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6}\right)^4;$$

also

$$\frac{1}{\Delta(\varphi)} = 1 + \frac{k^2}{2}\varphi^2 - \left(\frac{k^2}{6} - \frac{3k^4}{8}\right)\varphi^4 \quad ,$$

$$\Delta(\varphi) = 1 - \frac{k^2}{2}\varphi^2 + \left(\frac{k^2}{6} - \frac{k^4}{8}\right)\varphi^4 \quad .$$

Daher ist

$$F(k, \varphi_r) = \varphi_r + \frac{k^2}{6}\varphi_r^3 - \frac{k^2(4 - 9k^2)}{120}\varphi_r^5 \quad ,$$

$$E(k, \varphi_r) = \varphi_r - \frac{k^2}{6}\varphi_r^3 + \frac{k^2(4 - 3k^2)}{120}\varphi_r^5 \quad .$$

Für hinlänglich kleine Werte von k können diese Werte selbst als erste Annäherungen für $F(k, \varphi)$ und $E(k, \varphi)$ benutzt werden, indem man φ_r durch φ ersetzt.

Führt man diese Rechnungen mit fünfstelligen Logarithmen für die Zahlenwerte durch

$$k = 0{,}93970\,, \quad \varphi = 80^0\,0',00 \quad ,$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
\varphi &= 80^0\ 0',0 & \gamma &= 67^0\,44',0 \\
\varphi_1 &= 50^0\,43',6 & \gamma_1 &= 46^0\,40',4 \\
\varphi_2 &= 27^0\,48',5 & \gamma_2 &= 26^0\ 0',1 \\
\varphi_3 &= 14^0\,16',7 & \gamma_3 &= 13^0\,24',0 \\
\varphi_4 &= 7^0\,11,3 & \gamma_4 &= 6^0\,45,2 \\
\varphi_5 &= 3^0\,36,0 & \log\sin\gamma_5 &= 8{,}77094 \quad .
\end{aligned}$$

Bezeichnet man, wie in den Formeln, mit φ wieder den Arcus, so ist

$$\varphi_5 = 0{,}062832 \quad ,$$

daher ist $\varphi_5^5 < 0{,}000001$; in den Formeln für $F(\varphi_r)$ und $E(\varphi_r)$ genügen somit die ersten beiden Glieder. Man erhält

$$F(\varphi_5) = 0{,}062868 \quad ,$$

$$E(\varphi_5) = 0{,}062796 \quad .$$

Aus dem ersten dieser Werte folgt

$$F(k, \varphi) = 32 \cdot F(k, \varphi_5) = 2{,}01178 \quad .$$

Um $E(k, \varphi)$ zu finden, berechnet man noch folgende Glieder, die sich leicht ergeben, da man die nötigen Logarithmen schon bei der Hand hat,

$$\begin{aligned}
\sin\varphi\ \sin^2\gamma_1 &= 0{,}52116 \\
2\sin\varphi_1\sin^2\gamma_2 &= 0{,}29757 \\
4\sin\varphi_2\sin^2\gamma_3 &= 0{,}10024 \\
8\sin\varphi_3\sin^2\gamma_4 &= 0{,}02728 \\
16\sin\varphi_4\sin^2\gamma_5 &= 0{,}00697 \\
\hline
\text{Summe} &= 0{,}95322 \quad .
\end{aligned}$$

Subtrahiert man dies von

$$32\,E(k,\varphi_5) = 2{,}0094 \quad ,$$

so erhält man

$$E(k,\varphi) = 1{,}0562 \quad .$$

Das Beispiel zeigt, daß man auf diesem Wege selbst bei ungünstigen Voraussetzungen, nämlich bei großen Werten von k und φ, rasch zum Ziele kommt.

---

9. Das geradlinige Integral

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

wird rein imaginär, wenn die obere Grenze z rein imaginär ist; in jedem andern Falle ist es real oder komplex. Ersetzt man z durch iy, so entsteht

$$\int_0^{iy} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = i\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)}} \quad .$$

Führt man hier $y = \operatorname{tang}\varphi$ ein, so erhält man

$$i\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + k^2\sin^2\varphi}} = i\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}} \quad ,$$

und hat daher schließlich

$$\int_0^{iy} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = i\,F(k',\varphi) \quad ,$$

wobei

$$\operatorname{tang}\varphi = y \quad .$$

Hierdurch ist die Berechnung eines rein imaginären elliptischen Integrals erster Art auf die eines realen Integrals mit dem Ergänzungsmodul k' zurückgeführt.

10. Mit Hilfe des Summensatzes läßt sich *jedes elliptische Integral erster Art, dessen obere Grenze komplex ist, in die Summe eines realen und eines rein imaginären Integrals zerlegen.* Aus der Gleichung

$$\int_0^{a+ib} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + \int_0^{iy} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

folgt

$$1)\qquad a+ib = \frac{x\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\cdot i}{1+k^2x^2y^2} \quad .$$

Durch Vergleichung des Realen und Imaginären ergeben sich hieraus die beiden Gleichungen

$$\frac{x\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)}}{1+k^2x^2y^2} = a\,, \qquad \frac{y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1+k^2x^2y^2} = b \quad ,$$

oder die rationalen

$$2)\qquad x^2[1+(k^2+1)y^2+k^2y^4] = a^2(1+k^2x^2y^2)^2 \quad ,$$

$$3)\qquad y^2[1-(k^2+1)x^2+k^2x^4] = b^2(1+k^2x^2y^2)^2 \quad .$$

Durch Addition folgt, wenn $a^2 + b^2 = c^2$ gesetzt wird,

$$x^2 + y^2 + k^2 x^2 y^2 (y^2 + x^2) = c^2 (1 + k^2 x^2 y^2)^2 \quad ,$$

und hieraus nach Division durch $1 + k^2 x^2 y^2$

$$4) \qquad x^2 + y^2 = c^2 (1 + k^2 x^2 y^2) \quad .$$

Dieser Gleichung entnehmen wir

$$5) \qquad y^2 = \frac{c^2 - x^2}{1 - k^2 c^2 x^2} \quad ,$$

und erhalten hieraus durch Addition von x^2

$$6) \qquad x^2 + y^2 = \frac{c^2 (1 - k^2 x^4)}{1 - c^2 k^2 x^2} \quad .$$

Aus 3) und 4) folgt

$$y^2 [1 - (k^2 + 1) x^2 + k^2 x^4] = \frac{b^2}{c^4} (x^2 + y^2)^2 \quad .$$

Führt man hier die in 5) und 6) berechneten Werte ein, so entsteht

$$(c^2 - x^2)(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)(1 - c^2 k^2 x^2) = b^2 (1 - k^2 x^4)^2 \quad .$$

Hieraus erhält man schließlich

$$7) \quad \begin{cases} a^2 - (1 + c^2)(1 + k^2 c^2) x^2 + (1 + 2 k^2 c^2 + c^4 k^4 + k^2 + c^4 k^2 + 2 b^2 k^2) x^4 \\ \qquad - k^2 (1 + c^2)(1 + k^2 c^2) x^6 + a^2 k^4 x^8 = 0 \quad . \end{cases}$$

Dividiert man durch x^4 und faßt die Glieder folgendermaßen zusammen

$$a^2 \left(\frac{1}{x^4} + k^4 x^4 \right) - (1 + c^2)(1 + k^2 c^2) \left(\frac{1}{x^2} + k^2 x^2 \right) + A = 0 \quad ,$$

wobei

$$A = 1 + 2 c^2 k^2 + c^4 k^4 + k^2 + c^4 k^2 + 2 b^2 k^2 \quad ,$$

und setzt

$$8) \qquad k^2 x^2 + \frac{1}{x^2} = t \quad ,$$

so erhält man für t die quadratische Gleichung

$$a^2 t^2 - (1 + c^2)(1 + k^2 c^2) t + 1 + 4 b^2 k^2 + c^4 k^4 + k^2 + c^4 k^2 = 0 \quad .$$

Aus dieser Gleichung erhält man t, hierauf x^2 aus 8) und schließlich y^2 aus 5).

Ebenso wie die Gleichung 7) für x^2, erhält man eine Gleichung achten Grades zur direkten Bestimmung von y^2.

Beispiel.

$$k = 0{,}6 \, , \quad a = 1{,}623 \, , \quad b = 0{,}6114 \quad .$$

Die quadratische Gleichung für t ist

$$t^2 - 2 \cdot 1{,}5846 \cdot t + 2{,}4024 = 0 \quad ;$$

die Wurzeln sind

$$t_1 = 1{,}9140 \, , \quad t_2 = 1{,}2552 \quad .$$

Die Wurzel t_2 führt auf Werte von x, die größer als 1 und daher unbrauchbar sind, da das entlang der realen Achse erstreckte Integral nur für $x < 1$ real ist. Aus t_1 folgt

$$x = 0{,}7664 \, , \quad y = 2{,}579 \quad .$$

Daher hat man die Zerlegung

$$\int_0^{1,623+i\cdot 0,6114} \frac{dz}{\sqrt{R}} = \int_0^{0,7665} \frac{dz}{\sqrt{R}} + \int_0^{i\cdot 2,579} \frac{dz}{\sqrt{R}} \quad ,$$

$$\sqrt{R} = \sqrt{(1-z^2)(1-0,36\cdot z^2)} \quad .$$

In Rücksicht auf Nr. 9 erhält man hieraus

$$\int_0^{1,623+i\cdot 0,6114} \frac{dz}{\sqrt{R}} = F(0,6;\, 50^0\, 2',0) + iF(0,8;\, 68^0\, 48',4) \quad .$$

11. Denkt man sich in Nr. 10, 7) x gegeben, dagegen a und b veränderlich, so ist 7) die Gleichung der Kurve, auf welcher sich der veränderliche Punkt $a+ib$ der z-Fläche bewegen muß, wenn der reale Teil der Funktion

$$F = \int_0^{a+ib} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$$

den durch x gegebenen Betrag haben soll; diese Kurve entspricht daher einer Parallelen zur imaginären Achse der Funktionsebene. Wie man sieht, ist diese Kurve vom vierten Grade und symmetrisch gegen die Achsen. Die Gleichung achten Grades in y ist ebenso wie Gleichung 7) vierten Grades in a und b und stellt, wenn a und b veränderlich sind, y gegeben ist, die Kurve dar, die einer Parallelen zur realen Achse der Funktionsebene entspricht; sie ist ebenfalls symmetrisch gegen die Achsen.

§ 7. Die elliptischen Funktionen. Entwicklung derselben in Potenzreihen und in periodische Reihen.

1. In der Theorie der Kreisfunktionen stellt man dem Integrale

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = w$$

die Umkehrung gegenüber

$$\sin w = z \quad ,$$

und neben diese Funktion treten noch eine Reihe algebraisch mit ihr zusammenhängende, $\cos w$, $\operatorname{tang} w$, $\cot w$, $\sec w$, $\operatorname{cosec} w$; es zeigt sich, daß diese einfach periodischen Funktionen für die Theorie sowohl, wie für die Verwendung von größerer Bedeutung sind, als die unendlich vieldeutigen algebraischen Integrale, deren Umkehrungen sie sind. Von dem dort befolgten Gedankengange angeleitet, betrachten wir die Umkehrung des elliptischeu Integrals

$$1) \qquad \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} = w \quad .$$

Ausgehend von der goniometrischen Form

$$2) \qquad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}} = w \quad ,$$

die mit der algebraischen durch die Gleichung $z = \sin\varphi$ zusammenhängt, führte JACOBI*) für φ, als Funktion von w betrachtet, das Zeichen ein

$$\varphi = \operatorname{am} w \text{ (Amplitude von } w) \quad .$$

Hieraus ergibt sich dann für die Umkehrung von 1) die Funktionsbezeichnung

$$z = \sin\operatorname{am} w \text{ (Sinus amplitudinis } w) \quad .$$

Hieraus folgt

$$\sqrt{1 - z^2} = \cos\operatorname{am} w \quad .$$

Neben diesen beiden Funktionen ist noch $\sqrt{1 - k^2 z^2}$ von besonderer Wichtigkeit; sie wird nach JACOBI mit

$$\Delta\operatorname{am} w \text{ (Delta amplitudinis } w)$$

bezeichnet; $\sin\operatorname{am} w$, $\cos\operatorname{am} w$, $\Delta\operatorname{am} w$ nennt man elliptische Funktionen im Gegensatze zu den elliptischen Integralen.

Aus 2) folgt $d\varphi = \Delta(\varphi)\, dw$; daher ist

$$\frac{d\operatorname{am} w}{dw} = \Delta\operatorname{am} w \quad .$$

Hieraus ergibt sich ferner

$$3)\quad \begin{cases} \dfrac{d\sin\operatorname{am} w}{dw} = \dfrac{d\sin\operatorname{am} w}{d\operatorname{am} w} \cdot \dfrac{d\operatorname{am} w}{dw} = \cos\operatorname{am} w\, \Delta\operatorname{am} w \quad , \\ \dfrac{d\cos\operatorname{am} w}{dw} = \dfrac{d\cos\operatorname{am} w}{d\operatorname{am} w} \cdot \dfrac{d\operatorname{am} w}{dw} = -\sin\operatorname{am} w\, \Delta\operatorname{am} w \quad , \\ \dfrac{d\Delta\operatorname{am} w}{dw} = \dfrac{d\Delta\operatorname{am} w}{d\operatorname{am} w} \cdot \dfrac{d\operatorname{am} w}{dw} = -k^2 \sin\operatorname{am} w \cos\operatorname{am} w \quad . \end{cases}$$

Über die Vorzeichen verfügen wir so, daß dem Werte $z = \sin\operatorname{am} w = 0$ die Werte $\cos\operatorname{am} w = \Delta\operatorname{am} w = +1$ (nicht -1) entsprechen.

2. Bezeichnet w den Wert, den das elliptische Integral erster Art für die Punkte der mit den nötigen Querschnitten versehenen z-Fläche hat, in welcher w mit z zugleich verschwindet, so ist

$$z = \sin\operatorname{am} w \quad .$$

Der allgemeine Wert des Integrals ist $w + m \cdot 4K + n \cdot 2K'i$, es ist daher auch

$$z = \sin\operatorname{am}(w + m \cdot 4K + n \cdot 2K'i) \quad .$$

Daher haben wir

$$\sin\operatorname{am}(w + m \cdot 4K + n \cdot 2K'i) = \sin\operatorname{am} w \quad .$$

Hieraus ergibt sich die Haupteigenschaft des Amplitudensinus, durch welche er sich vor allen bisher untersuchten Funktionen wesentlich unterscheidet: Die Funktion $\sin\operatorname{am} w$ ist doppelt periodisch; sie hat die reale Periode $4K$ und die rein imaginäre $2K'i$.

3. Wir stellen hier einige Werte zusammen, welche die drei elliptischen Hauptfunktionen für besondere Werte der Veränderlichen w haben. Zunächst ist

$$1)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am} 0 = 0 \,, & \cos\operatorname{am} 0 = 1 \,, & \Delta\operatorname{am} 0 = 1 \quad , \\ \sin\operatorname{am} K = 1 \,, & \cos\operatorname{am} K = 0 \,, & \Delta\operatorname{am} K = k' \quad . \\ \sin\operatorname{am} 2K = 0 \,, & \cos\operatorname{am} 2K = -1 \,, & \Delta\operatorname{am} 2K = 1 \quad . \end{cases}$$

*) JACOBI, Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, S. 30.

Aus

$$K + iK' = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

folgt weiter

$$2)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}(K+iK') = \dfrac{1}{k}\,, \quad \cos\operatorname{am}(K+iK') = i\dfrac{k'}{k}\,, \\ \Delta\operatorname{am}(K+iK') = 0\,. \end{cases}$$

Aus § 6, Nr. 9 folgt

$$\int_0^{i\operatorname{tang}\varphi} \frac{dz}{\sqrt{R}} = i\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}\,.$$

Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ergibt dies

$$3)\quad \sin\operatorname{am}(iK') = \infty\,,\quad \cos\operatorname{am}(iK') = \infty\,,\quad \Delta\operatorname{am} iK' = \infty\,.$$

Die Verhältnisse dieser Werte ergeben sich aus

$$\frac{\sin\operatorname{am} w}{\cos\operatorname{am} w} = 1 : \sqrt{\frac{1}{\sin^2\operatorname{am} w} - 1}\,,\quad \frac{\sin\operatorname{am} w}{\Delta\operatorname{am} w} = 1 : \sqrt{\frac{1}{\sin^2\operatorname{am} w} - k^2}$$

zu

$$4)\quad \frac{\sin\operatorname{am} iK'}{\cos\operatorname{am} iK'} = -i\,,\quad \frac{\sin\operatorname{am} iK'}{\Delta\operatorname{am} iK'} = -\frac{i}{k}\,.$$

Ferner ist

$$5)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}(-w) = -\sin\operatorname{am} w\,, \\ \cos\operatorname{am}(-w) = \cos\operatorname{am} w\,, \\ \Delta\operatorname{am}(-w) = \Delta\operatorname{am} w\,. \end{cases}$$

4. Aus dem Summensatze ergeben sich sofort die Gleichungen

$$1)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}(w \pm w_1) = \dfrac{\sin\operatorname{am} w \cos\operatorname{am} w_1 \Delta\operatorname{am} w_1 \pm \sin\operatorname{am} w_1 \cos\operatorname{am} w\, \Delta\operatorname{am} w}{1 - k^2\sin^2\operatorname{am} w \sin^2\operatorname{am} w_1}\,, \\[2ex] \cos\operatorname{am}(w \pm w_1) = \dfrac{\cos\operatorname{am} w \cos\operatorname{am} w_1 \mp \sin\operatorname{am} w \sin\operatorname{am} w_1 \Delta\operatorname{am} w\, \Delta\operatorname{am} w_1}{1 - k^2\sin^2\operatorname{am} w \sin^2\operatorname{am} w_1}\,, \\[2ex] \Delta\operatorname{am}(w \pm w_1) = \dfrac{\Delta\operatorname{am} w\, \Delta\operatorname{am} w_1 \mp k^2 \sin\operatorname{am} w \cos\operatorname{am} w \sin\operatorname{am} w_1 \cos\operatorname{am} w_1}{1 - k^2\sin^2\operatorname{am} w \sin^2\operatorname{am} w_1}\,. \end{cases}$$

Wendet man dies auf das komplexe Argument $u + iv$ an, so erhält man die Hauptfunktionen für ein komplexes Argument in ihre realen und imaginären Bestandteile zerlegt. Aus § 6, Nr. 9 ergibt sich

$$\sin\operatorname{am}(iv) = i\operatorname{tang}\operatorname{am}(v, k')\,.$$

Mithin ist

$$\cos\operatorname{am}(iv) = \frac{1}{\cos\operatorname{am}(v, k')}\,,\quad \Delta\operatorname{am}(iv) = \frac{\Delta\operatorname{am}(v, k')}{\cos\operatorname{am}(v, k')}\,.$$

Berücksichtigt man dies, so erhält man

$$
2)\quad \begin{cases}
\sin \operatorname{am}(u+iv) \\
= \dfrac{\sin \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am}(v,k') + i \cos \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am} u \sin \operatorname{am}(v,k') \cos \operatorname{am}(v,k')}{\cos^2 \operatorname{am}(v,k') + k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am}(v,k')} , \\
\cos \operatorname{am}(u+iv) \\
= \dfrac{\cos \operatorname{am} u \cos \operatorname{am}(v,k') - i \sin \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am} u \sin \operatorname{am}(v,k') \, \Delta \operatorname{am}(v,k')}{\cos^2 \operatorname{am}(v,k') + k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am}(v,k')} , \\
\Delta \operatorname{am}(u+iv) \\
= \dfrac{\Delta \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am}(v,k') - i k^2 \sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u \sin \operatorname{am}(v,k')}{\cos^2 \operatorname{am}(v,k') + k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am}(v,k')} .
\end{cases}
$$

Unter Berücksichtigung der in Nr. 3 gegebenen Werte ergeben die Summensätze

$$
3)\quad \begin{cases}
\sin \operatorname{am}(w \pm K) = \pm \dfrac{\cos \operatorname{am} w}{\Delta \operatorname{am} w} , \\
\cos \operatorname{am}(w \pm K) = \mp k' \dfrac{\sin \operatorname{am} w}{\Delta \operatorname{am} w} , \\
\Delta \operatorname{am}(w \pm K) = \dfrac{k'}{\Delta \operatorname{am} w} ;
\end{cases}
$$

sowie

$$
4)\quad \begin{cases}
\sin \operatorname{am}(w \pm 2K) = -\sin \operatorname{am} w , \\
\cos \operatorname{am}(w \pm 2K) = -\cos \operatorname{am} w , \\
\Delta \operatorname{am}(w \pm 2K) = \Delta \operatorname{am} w .
\end{cases}
$$

Aus der zweiten folgt

$$
\cos \operatorname{am}(w \pm 4K) = \cos \operatorname{am} w .
$$

Um die Funktionen des Arguments $w \pm iK'$ zu erhalten, teilen wir Zähler und Nenner der Summenformeln durch $\sin^2 \operatorname{am} w'$, und ersetzen dann w' durch iK'; in Rücksicht auf Nr. 3, 4) folgt

$$
5)\quad \begin{cases}
\sin \operatorname{am}(w + iK') = \dfrac{1}{k \sin \operatorname{am} w} , \\
\cos \operatorname{am}(w + iK') = -i \cdot \dfrac{\Delta \operatorname{am} w}{k \sin \operatorname{am} w} , \\
\Delta \operatorname{am}(w + iK') = -i \cdot \dfrac{\cos \operatorname{am} w}{\sin \operatorname{am} w} .
\end{cases}
$$

Durch wiederholte Anwendung entsteht

$$
6)\quad \begin{cases}
\sin \operatorname{am}(w + i \cdot 2K') = \sin \operatorname{am} w , \\
\cos \operatorname{am}(w + i \cdot 2K') = -\cos \operatorname{am} w , \\
\Delta \operatorname{am}(w + i \cdot 2K') = -\Delta \operatorname{am} w .
\end{cases}
$$

Aus den Gleichungen 4) und 6) folgt

$$
\cos \operatorname{am}(w + 2K + i \cdot 2K') = \cos \operatorname{am} w ,
$$

und aus 6)

$$
\Delta \operatorname{am}(w + i \cdot 4K') = \Delta \operatorname{am} w .
$$

Hieraus folgt: Die Funktion $\cos \operatorname{am} w$ hat die reale Periode $4K$ und die komplexe $2K + i \cdot 2K'$; die Funktion $\Delta \operatorname{am} w$ hat die reale Periode $2K$ und die imaginäre $i \cdot 4K'$.

5. Um diese Ergebnisse anschaulich zu machen, zeichnen wir auf der w-Ebene zunächst die Linien, für welche eine elliptische Funktion dieselben Werte hat, wie für die Punkte der realen und der imaginären Achse; die Punkte, für welche die Funktion verschwindet, unendlich groß oder gleich der positiven oder negativen Einheit wird, sind der Reihe nach durch kleine Kreise, Sternchen, einfache und doppelte senkrechte Striche ausgezeichnet.

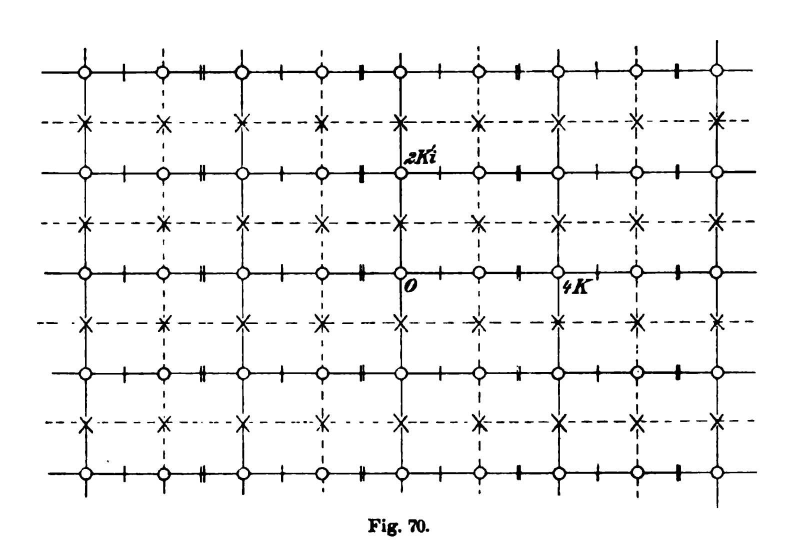


Fig. 70.

Der Amplitudensinus (Fig. 70) hat die reale Periode $4K$ und hat daher für die Punkte der imaginären Achse dieselben Werte, wie für Parallele zur imaginären Achse, die durch die Punkte

$$\ldots -8K, \quad -4K, \quad 0, \quad 4K, \quad 8K, \quad 12K\ldots$$

gehen; wegen der imaginären Periode $i \cdot 2K'$ hat $\sin \operatorname{am} w$ in den Punkten der realen Achse dieselben Werte, wie in den Parallelen zu dieser Achse durch die Punkte

$$\ldots -i \cdot 6K', \quad -i \cdot 4K', \quad -i \cdot 2K', \quad 0, \quad i \cdot 2K', \quad i \cdot 4K', \quad i \cdot 6K', \ldots$$

Durch beide Scharen von Parallelen wird die ganze w-Ebene in kongruente Rechtecke geteilt, welche die Länge $4K$ und die Breite $2K'$ haben. Durchläuft w das ganze Gebiet des Rechtecks, das die Ecken hat

$$0, \quad 4K, \quad 4K + i \cdot 2K', \quad i \cdot 2K',$$

so nimmt $\sin \operatorname{am} w$ alle möglichen realen und komplexen Werte an. Denkt man sich jeden Punkt dieses Rechtecks mit dem zugehörigen Werte von $\sin \operatorname{am} w$ belegt, so erhält man die Werte, die $\sin \operatorname{am} w$ für die Punkte irgend eines andern der Rechtecke annimmt, indem man das erste Rechteck parallel verschiebt, bis es mit dem andern zur Deckung kommt.

6. Die Punkte, in denen der Amplitudencosinus infolge der komplexen Periode $2K + i \cdot 2K'$ denselben Wert hat wie im Nullpunkte, liegen auf der Geraden OA, die den Nullpunkt mit dem Punkte $2K + i \cdot 2K'$ verbindet (Fig. 71), und zwar liegen sie hier zu beiden Seiten von O um natürliche Vielfache der Strecke OA entfernt. Die Punkte, in denen $\cos \operatorname{am} w$ infolge der komplexen Periode denselben Wert hat, wie in irgend einem Punkte B, liegen auf der durch B gehenden Parallelen zu OA, und sind von B um natürliche Vielfache von OA getrennt.

Die Punkte, in denen $\cos \operatorname{am} w$ infolge der realen Periode $4K$ dieselben Werte hat, wie in den Punkten dieser Parallelen, sind auf Parallelen zu OA enthalten, die von B in der Richtung der realen Achse um Vielfache von $4K$ abstehen, und zwar liegen die Punkte dieser Parallelen, die einem bestimmten Punkte B entsprechen, auf der durch B gehenden Parallelen zur realen Achse.

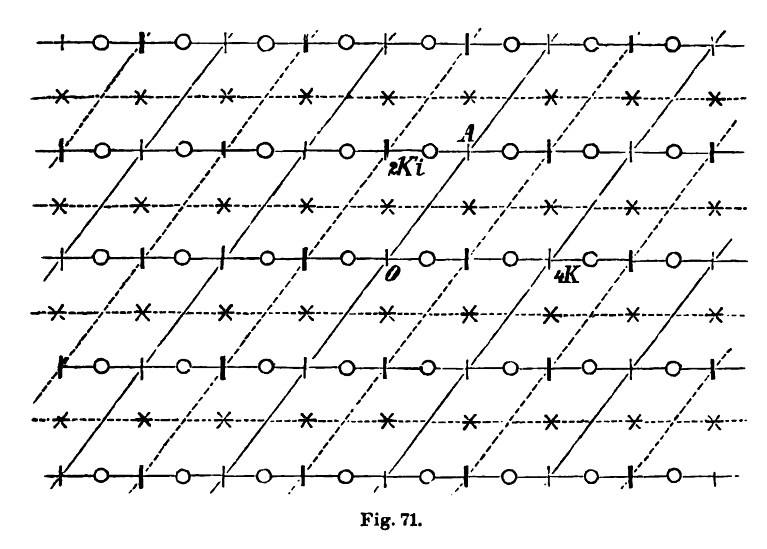


Fig. 71.

Zerlegt man die w-Ebene durch Parallele zu OA, welche die Punkte enthalten

$$\ldots -8K, \quad -4K, \quad 0, \quad 4K, \quad 8K, \quad \ldots,$$

sowie durch Parallele zur realen Achse durch die Punkte

$$\ldots - i \cdot 4K', \quad -i \cdot 2K', \quad 0, \quad i \cdot 2K', \quad i \cdot 4K', \quad \ldots,$$

so zerfällt sie in kongruente Parallelogramme; eins derselben hat die Ecken $0,\ 4K,\ 6K + i \cdot 2K',\ 2K + i \cdot 2K'$.

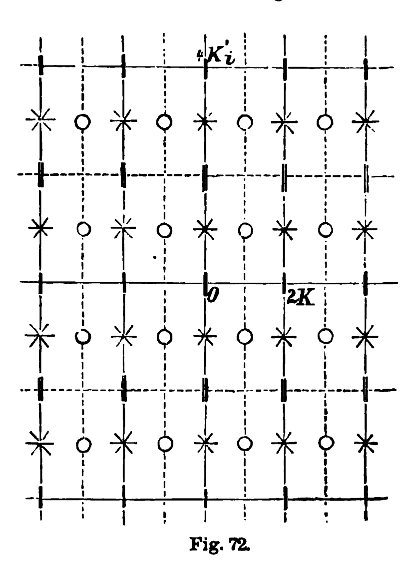


Fig. 72.

Durchläuft w dieses Parallelogramm, so nimmt $\cos \operatorname{am} w$ alle möglichen realen und komplexen Werte an. Denken wir uns wieder jeden Punkt dieses Parallelogramms mit dem zugehörigen Werte von $\cos \operatorname{am} w$ behaftet, so erhalten wir die Werte, welche den in einem andern Parallelogramme enthaltenen w-Werten zugehören, indem wir das erstere mit dem letzteren durch Parallelverschiebung zur Deckung bringen.

7. Die Funktion $\Delta \operatorname{am} w$ hat die reale Periode $2K$ und die imaginäre $i \cdot 4K'$ (Fig. 72); daher ziehen wir in der w-Ebene Parallele zur realen Achse durch die Punkte

$$\ldots - i \cdot 8K', \quad -i \cdot 4K', \quad 0, \quad i \cdot 4K', \quad i \cdot 8K', \quad \ldots$$

sowie Parallele zur imaginären Achse durch die Punkte

$$\ldots -4K, \quad -2K, \quad 0, \quad 2K, \quad 4K, \quad \ldots$$

Durchläuft w das Rechteck, das die Ecken hat 0, $2K$, $2K + i \cdot 4K'$, $i \cdot 4K'$, so nimmt $\Delta \operatorname{am} w$ alle möglichen Werte an. Denken wir uns auch diesmal die Punkte dieses Rechtecks mit den zugehörigen Funktionswerten behaftet, so erhalten wir die Funktionswerte für die Punkte eines andern der Rechtecke, indem wir das erstere parallel verschieben, bis es mit dem letztern zusammenfällt.

8. Setzt man im Summensatze $w_1 = w$, so folgen die Formeln

$$\sin \operatorname{am} 2w = \frac{2 \sin \operatorname{am} w \cos \operatorname{am} w \, \Delta \operatorname{am} w}{1 - k^2 \sin^4 \operatorname{am} w},$$

$$\cos \operatorname{am} 2w = \frac{\cos^2 \operatorname{am} w - \sin^2 \operatorname{am} w \, \Delta^2 \operatorname{am} u}{1 - k^2 \sin^4 \operatorname{am} u} = \frac{1 - 2\sin^2 \operatorname{am} w + k^2 \sin^4 \operatorname{am} w}{1 - k^2 \sin^4 \operatorname{am} w},$$

$$\Delta \operatorname{am} 2w = \frac{\Delta^2 \operatorname{am} w - k^2 \sin^2 \operatorname{am} w \cos^2 \operatorname{am} w}{1 - k^2 \sin^4 \operatorname{am} w} = \frac{1 - 2k^2 \sin^2 \operatorname{am} w + k^2 \sin^4 \operatorname{am} w}{1 - k^2 \sin^4 \operatorname{am} w}.$$

Setzt man in der zweiten Gleichung $w = \frac{1}{2}K$, so erhält man

$$1 - 2\sin^2 \operatorname{am} \tfrac{1}{2}K + k^2 \sin^4 \operatorname{am} \tfrac{1}{2}K = 0 .$$

In Rücksicht darauf, daß $\sin \operatorname{am} \frac{1}{2}K$ positiv und kleiner als 1 ist, folgen hieraus die Werte

$$\sin \operatorname{am} \frac{K}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+k'}}, \quad \cos \operatorname{am} \frac{K}{2} = \sqrt{\frac{k'}{1+k'}}, \quad \Delta \operatorname{am} \frac{K}{2} = \sqrt{k'} .$$

Auf ähnliche Weise erhält man

$$\sin \operatorname{am} i\frac{K'}{2} = i\frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \cos \operatorname{am} i\frac{K'}{2} = \sqrt{\frac{1+k}{k}}, \quad \Delta \operatorname{am} i\frac{K'}{2} = \sqrt{1+k} .$$

Mit Hilfe der Summensätze findet sich dann noch

$$\sin \operatorname{am}\left(\frac{K}{2} \pm iK'\right) = \frac{1}{\sqrt{1-k'}}, \quad \cos \operatorname{am}\left(\frac{K}{2} \pm iK'\right) = \mp i\sqrt{\frac{k'}{1-k'}},$$

$$\Delta \operatorname{am}\left(\frac{K}{2} \pm iK'\right) = \mp i\sqrt{k'} ;$$

$$\sin \operatorname{am}\left(K \pm i\frac{K'}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \cos \operatorname{am}\left(K \pm i\frac{K'}{2}\right) = \mp i\sqrt{\frac{1-k}{k}},$$

$$\Delta \operatorname{am}\left(K \pm i\frac{K'}{2}\right) = \sqrt{1-k} ;$$

$$\sin \operatorname{am} \frac{K \pm iK'}{2} = \sqrt{1 \pm i\frac{k'}{k}}, \quad \cos \operatorname{am} \frac{K \pm iK'}{2} = (1 \mp i)\sqrt{\frac{k'}{2k}},$$

$$\Delta \operatorname{am} \frac{K \pm iK'}{2} = k'\sqrt{1 \mp i\frac{k}{k'}} .$$

Für den drittletzten Wert erhält man nämlich zunächst

$$\sqrt{\frac{1+k'}{k}} \cdot \frac{1+k+ik'}{1+k+k'} = \sqrt{\frac{1+k'}{k}} \cdot \frac{\sqrt{1+k} + i\sqrt{1-k}}{\sqrt{1+k} + \sqrt{1-k}} .$$

Die Quadratwurzel aus der zweiten Potenz hiervon liefert den mitgeteilten Wert.

9. Die Funktionen $\sin\operatorname{am} w$, $\cos\operatorname{am} w$, $\Delta\operatorname{am} w$ sind eindeutige Funktionen von w.

Nehmen wir an, $\sin\operatorname{am} w$ sei eine mehrdeutige Funktion von w und dem Werte w_0 entsprechen $\sin\operatorname{am} w_0 = \zeta_0$ und $\sin\operatorname{am} w_0 = z_0$; bewegt sich z auf der durch Querschnitte auf einfachen Zusammenhang gebrachten RIEMANNschen Fläche von ζ_0 nach z_0 (Fig. 73), so beschreibt w eine Kurve, die in w_0 anfängt und auch da endigt, da w eine eindeutige Funktion der Punkte der einfach zusammenhängenden z-Fläche ist. Der Weg $\zeta_0 z_0$ sei so gewählt, daß der zugehörige Weg von w keinen Windungspunkt enthält. Geht w über B nach A und hierauf denselben Weg zurück, so geht ein Wert der Veränderlichen von ζ_0 bis zu einem A entsprechenden Punkte a und dann denselben Weg zurück nach ζ_0. Wir wollen nun den Weg $l = ABw_0$ stetig so verändern, daß er in den Weg ACw_0 übergeht. Solange bei diesen Veränderungen der Weg nicht einem Punkte unendlich nahe kommt, für den $dz : dw$ unendlich groß ist, solange gehört zu jeder unendlich kleinen Verrückung eines Punktes der Kurve l auch eine unendlich kleine Verrückung des zugehörigen Punktes der z-Fläche, solange ist also auch die Änderung des Weges $a\zeta_0$ stetig und ζ_0 der Endpunkt. Da nun der Weg $a\zeta_0$ nicht durch stetige Änderungen in den ACw_0 entsprechenden Weg az_0 übergeführt werden kann, so folgt, daß, wenn anders die Annahme der Vieldeutigkeit von $\sin\operatorname{am} w$ zutreffen soll, die Kurve $w_0 CAB$ einen Punkt einschließen muß, für den

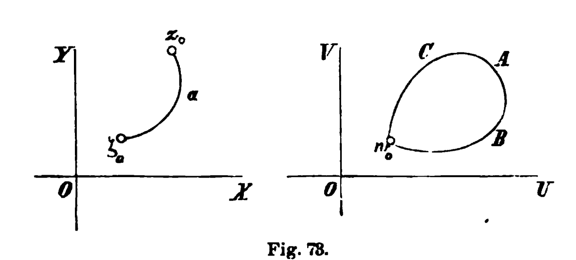


Fig. 73.

$$\frac{dz}{dw} = \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}$$

unendlich groß wird. Dies tritt nur ein, wenn $z = \infty$, und hierfür ist

$$w = iK' + 2mK + 2niK' \quad .$$

Es müßte also, wenn w einen geschlossenen Weg beschreibt, der einen dieser Punkte umgibt, z von einem Anfangswerte ζ_0 zu einem andern Endwerte z_0 gelangen. Wir können uns dabei darauf beschränken, w einen unendlich kleinen Kreis beschreiben zu lassen, der einen dieser Punkte einschließt. Nun ist

$$\sin\operatorname{am}(iK' + 2mK + 2inK' + \varrho e^{i\varphi}) = \pm \sin\operatorname{am}(iK' + \varrho e^{i\varphi}) = \pm \frac{1}{k \sin\operatorname{am} \varrho e^{i\varphi}};$$

wächst φ von 0 bis 2π, so beschreibt $w = \varrho e^{i\varphi}$ einen unendlich kleinen Kreis um den Nullpunkt; dieser schließt keinen Punkt ein, für welchen $dz : dw = \infty$, also erlangt $\sin\operatorname{am} \varrho^{i\varphi}$ am Ende desselben Wegs denselben Wert, wie am Anfange; mithin gilt das gleiche auch für $\sin\operatorname{am} w$, wenn w einen der Punkte $iK' + 2mK + 2inK'$ umkreist. Hieraus folgt, daß bei jedem geschlossenen Wege von w auch $z = \sin\operatorname{am} w$ einen geschlossenen Weg beschreibt; folglich kann $\sin\operatorname{am} w$ nicht eine mehrdeutige Funktion von w sein.

Da $z = \sin\operatorname{am} w$ eine eindeutige Funktion von w ist, und $\cos\operatorname{am} w = \sqrt{1 - z^2}$ und $\Delta\operatorname{am} w = \sqrt{1 - k^2 z^2}$ eindeutige Funktionen von z, d. i. der Punkte der RIEMANNschen z-Fläche sind, so folgt, daß auch $\cos\operatorname{am} w$ und $\Delta\operatorname{am} w$ eindeutige Funktionen von w sind.

10. Die elliptischen Funktionen $\sin\operatorname{am} w$, $\cos\operatorname{am} w$, $\Delta\operatorname{am} w$ sind eindeutig und endlich innerhalb des mit dem Halbmesser K' beschriebenen Kreises; folglich lassen sie sich in Potenzreihen entwickeln, die für $\operatorname{mod} w < K'$ gelten.

Da $\sin\operatorname{am} w$ mit w das Zeichen wechselt, $\cos\operatorname{am} w$ und $\Delta\operatorname{am} w$ aber nicht, so folgt, daß die Reihe für $\sin\operatorname{am} w$ nur ungerade, die beiden andern Reihen nur gerade Potenzen von w enthalten; wir haben daher Reihen von der Form

$$\begin{aligned} \sin\operatorname{am} w &= a_1 w + a_3 w^3 + a_5 w^5 + \dots \\ \cos\operatorname{am} w &= 1 + b_2 w^2 + b_4 w^4 + \dots \\ \Delta\operatorname{am} w &= 1 + c_2 w^2 + c_4 w^4 + \dots \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der a, b, c bedienen wir uns der Methode der unbestimmten Koeffizienten. Nach Nr. 1, 3) ist

$$\frac{d \sin\operatorname{am} w}{d w} = \cos\operatorname{am} w\, \Delta\operatorname{am} w \quad .$$

Differenzieren wir nochmals, und benutzen die Formeln für den Differentialquotienten von $\cos\operatorname{am} w$ und $\Delta\operatorname{am} w$, so erhalten wir

$$\frac{d^2 \sin\operatorname{am} w}{d w^2} = -(1 + k^2)\sin\operatorname{am} w + 2k^2 \sin^3\operatorname{am} w \quad .$$

Setzen wir auf beiden Seiten dieser Gleichung die Potenzreihe für $\sin\operatorname{am} w$ ein und vergleichen die gleich hohen Potenzen von w, so erhalten wir für die Koeffizienten $a_1, a_3, a_5, \dots$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2 \cdot a_3 &= -(1 + k^2)\, a_1 \quad , \\ 5 \cdot 4 \cdot a_5 &= -(1 + k^2)\, a_3 + 2k^2 a_1^3 \quad , \\ 7 \cdot 6 \cdot a_7 &= -(1 + k^2)\, a_5 + 6k^2 a_1^2 a_3 \quad , \\ 9 \cdot 8 \cdot a_9 &= -(1 + k^2)\, a_7 + 6k^2 (a_1^2 a_5 + a_1 a_3^2) \quad , \\ 11 \cdot 10 \cdot a_{11} &= -(1 + k^2)\, a_9 + 2k^2 (3 a_1^2 a_7 + a_3^3 + 6 a_1 a_3 a_5) \quad , \\ 13 \cdot 12 \cdot a_{13} &= -(1 + k^2)\, a_{11} + 2k^2 (3 a_1^2 a_9 + 3 a_1 a_5^2 + 6 a_1 a_3 a_7 + 3 a_3^2 a_5) \quad . \end{aligned}$$

. . . .

Aus

$$\left(\frac{d \sin\operatorname{am} w}{d w}\right)_{w=0} = 1$$

ergibt sich

$$a_1 = 1 \quad ;$$

hieraus und aus den entwickelten Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} \sin\operatorname{am} w = w &- \frac{1 + k^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot w^3 + \frac{1 + 14k^2 + k^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot w^5 \\ &- \frac{1 + 135k^2 + 135k^4 + k^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot w^7 + \frac{1 + 1228k^2 + 5478k^4 + 1228k^6 + k^8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} \cdot w^9 \\ &- \frac{1 + 11069k^2 + 165826k^4 + 165826k^6 + 11069k^8 + k^{10}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11} \cdot w^{11} + \dots \\ &\operatorname{mod} w < K' \quad . \end{aligned}$$

11. Wir bilden in gleicher Weise

$$\frac{d^2 \cos\operatorname{am} w}{d w^2} = -(1 - 2k^2)\cos\operatorname{am} w - 2k^2 \cos^3\operatorname{am} w \quad ,$$

und setzen auf beiden Seiten die Potenzreihe für $\cos\operatorname{am} w$ ein; dadurch gelangen

wir zu den Gleichungen

$$2 \cdot 1 \cdot b_2 = -1 \quad ,$$
$$4 \cdot 3 \cdot b_4 = -(1 + 4k^2) b_2 \quad ,$$
$$6 \cdot 5 \cdot b_6 = -(1 + 4k^2) b_4 - 6k^2 b_2^2 \quad ,$$
$$8 \cdot 7 \cdot b_8 = -(1 + 4k^2) b_6 - 2k^2 (b_2^3 + 6 b_2 b_4) \quad ,$$
$$10 \cdot 9 \cdot b_{10} = -(1 + 4k^2) b_8 - 6k^2 (b_2^2 b_4 + 2 b_2 b_6 + b_4^2) \quad ,$$
$$12 \cdot 11 \cdot b_{12} = -(1 + 4k^2) b_{10} - 6k^2 (b_2 b_4^2 + b_2^2 b_6 + 2 b_2 b_8 + 2 b_4 b_6) \quad ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Hieraus findet sich

$$\cos \operatorname{am} w = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot w^2 + \frac{1 + 4k^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot w^4$$
$$- \frac{1 + 44k^2 + 16k^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot w^6 + \frac{1 + 408k^2 + 912k^4 + 64k^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \cdot w^8$$
$$- \frac{1 + 3688k^2 + 30768k^4 + 15808k^6 + 256k^8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} \cdot w^{10} + \ldots$$
$$\operatorname{mod} w < K' \quad .$$

12. Für die Funktion $\Delta \operatorname{am} w$ ergibt sich

$$\frac{d^2 \Delta \operatorname{am} w}{d w^2} = (2 - k^2) \Delta \operatorname{am} w - 2 \Delta^3 \operatorname{am} w \quad ,$$

woraus die Gleichungen folgen

$$2 \cdot 1 \cdot c_2 = k^2 \quad ,$$
$$4 \cdot 3 \cdot c_4 = -(4 + k^2) c_2 \quad ,$$
$$6 \cdot 5 \cdot c_6 = -(4 + k^2) c_4 - 6 c_2^2 \quad ,$$
$$8 \cdot 7 \cdot c_8 = -(4 + k^2) c_6 - 2 (c_2^3 + 6 c_2 c_4) \quad ,$$
$$10 \cdot 9 \cdot c_{10} = -(4 + k^2) c_8 - 6 (c_2^2 c_4 + 2 c_2 c_6 + c_4^2) \quad ,$$
$$12 \cdot 11 \cdot c_{12} = -(4 + k^2) c_{10} - 6 (c_2^2 c_6 + c_2 c_4^2 + 2 c_2 c_8 + 2 c_4 c_6) \quad ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Diese ergeben

$$\Delta \operatorname{am} w = 1 - \frac{k^2}{1 \cdot 2} \cdot w^2 + \frac{k^2 (4 + k^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot w^4$$
$$- \frac{k^2 (16 + 44k^2 + k^4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot w^6 + \frac{k^2 (64 + 912k^2 + 408k^4 + k^6)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \cdot w^8 - \ldots$$
$$- \frac{k^2 (256 + 15808k^2 + 29768k^4 + 3686k^6 + k^8)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} \cdot w^{10} + \ldots$$
$$\operatorname{mod} w < K' \quad .$$

Die Reihen für die Produkte je zweier der Funktionen $\sin \operatorname{am} w$, $\cos \operatorname{am} w$, $\Delta \operatorname{am} w$ erhalten wir, indem wir die soeben entwickelten Reihen nach w differenzieren; es entsteht

$$\cos \operatorname{am} w \cdot \Delta \operatorname{am} w$$
$$= 1 - \frac{1 + k^2}{1 \cdot 2} w^2 + \frac{1 + 14k^2 + k^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} w^4 - \ldots$$

$$\sin \operatorname{am} w \cdot \Delta \operatorname{am} w$$

$$= w - \frac{1 + 4k^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} w^3 + \frac{1 + 44k^2 + 16k^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} w^5 - \ldots$$

$$\sin \operatorname{am} w \cdot \cos \operatorname{am} w$$

$$= w - \frac{4 + k^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot w^3 + \frac{16 + 44k^2 + k^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot w^5 - \ldots$$

$$\operatorname{mod} w < K' \quad .$$

13. Wir werden nun die elliptischen Funktionen in FOURIERsche Reihen entwickeln; vorher wollen wir die FOURIERschen Reihen auf komplexe Veränderliche ausdehnen*).

Die Funktion $f(z)$ sei periodisch und habe die reale oder komplexe Periode ω; sie sei ferner endlich und eindeutig innerhalb eines unendlichen Streifens $A_0 A_1 B_0 B_1$ (Fig. 74), dessen Ränder die Richtung der vom Nullpunkte nach dem Punkte ω gezogenen Geraden haben. Nach der Voraussetzung zerfällt dieser Streifen in kongruente Rechtecke, deren in der Richtung des Streifens gemessene Länge $A_0 A_1$ einer Änderung des z um den Periodizitätsmodul ω zugehört, so daß für entsprechende Punkte dieser Rechtecke $f(z)$ denselben Wert hat.

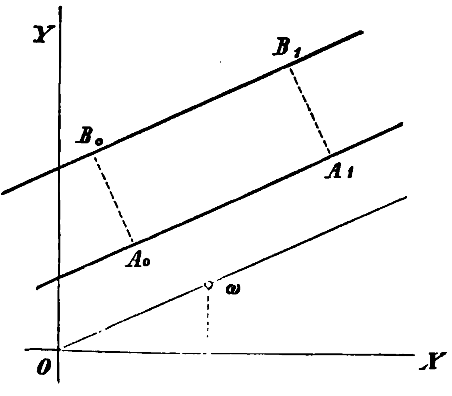


Fig. 74.

Wir führen eine neue Veränderliche t durch die Gleichung ein

$$1) \qquad e^{\frac{2\pi z}{\omega} i} = t$$

und setzen $t = r e^{i\vartheta}$; dann ist

$$2) \qquad z = -\frac{i\omega}{2\pi} l r + \frac{\omega}{2\pi} \vartheta \quad .$$

Bewegt sich z auf einer Parallelen zu $A_0 A_1$, so durchläuft es die Werte $z + m\omega$, wobei m real ist. Gehören r_1 und ϑ_1 zu $z + m\omega$, so ist

$$3) \qquad z + m\omega = -\frac{i\omega}{2\pi} l r_1 + \frac{\omega}{2\pi} \vartheta_1 \quad .$$

Durch Subtraktion von 2) und Division durch ω ergibt sich

$$m = -\frac{i}{2\pi} l \frac{r_1}{r} + \frac{1}{2\pi} (\vartheta_1 - \vartheta) \quad .$$

Da m real ist, so folgt hieraus $r_1 = r$; ferner folgt für $m = 1$ der Wert $\vartheta_1 = \vartheta + 2\pi$; beschreibt also z eine Parallele zur Streifenrichtung, so bewegt sich t auf einem Kreise, schreitet z um ω fort, so durchläuft t einen vollen Kreis.

Hieraus folgt, daß den Loten zur Streifenrichtung in der z-Ebene Strahlen durch den Nullpunkt in der t-Ebene entsprechen.

Gehören nun zu $A_0 A_1$ und $B_0 B_1$ die Werte $r = r_0$ und $r = r_1$, so entspricht dem Rechtecke $A_0 A_1 B_1 B_0$ der zwischen den mit den Radien r_0 und r_1 beschrie-

*) BRIOT et BOUQUET, Théorie des fonctions élliptiques, 2. Aufl. Paris 1875. S. 161. KÖNIGSBERGER, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Funktionen, Leipzig 1874, 1. Teil, S. 230.

benen Kreisen enthaltene Ring. Da nach der Voraussetzung $f(z)$ innerhalb dieses Rechtecks eindeutig und endlich ist, so ist die Funktion

$$f\left(-i \cdot \frac{\omega}{2\pi} l t\right) \quad ,$$

die aus $f(z)$ durch Ersetzung von z durch t hervorgeht, eindeutig und endlich für den zwischen $r = r_0$ und $r = r_1$ enthaltenen Kreisring. Daher kann diese Funktion (§ 2, Nr. 13) in eine Reihe von der Form entwickelt werden

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n t^n \quad .$$

Wenn man t wieder durch z ersetzt, so hat man daher

$$4) \qquad f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{\frac{2n\pi z}{\omega} i}$$

gültig zunächst für das Rechteck $A_0 A_1 B_1 B_0$; da aber für zwei Werte z und $z + \omega$ sowohl $f(z)$ als $e^{\frac{2n\pi z}{\omega} i}$ denselben Wert haben, so folgt, daß die Reihenentwicklung für den ganzen zwischen den Geraden $A_0 A_1$ und $B_0 B_1$ enthaltenen Streifen gültig ist.

Für die Koeffizienten hat man

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int f \cdot t^{-n-1} dt \quad ,$$

erstreckt über einen Kreis, dessen Halbmesser zwischen r_0 und r_1 liegt; führt man z ein, so entsteht

$$5) \qquad a_n = \frac{1}{\omega}\int f(z) e^{-\frac{2n\pi z}{\omega} i} dz$$

erstreckt über $A_0 A_1$, oder eine innerhalb des Streifens liegende parallele und gleiche Strecke.

Ersetzt man in 4) und 5) die Exponentialgrößen durch goniometrische Funktionen, so erhält man die FOURIERsche Reihe in der Form

$$f(z) = a_0 + i\sum_{1}^{\infty}(a_n - a_{-n}) \cdot \sin\frac{2n\pi z}{\omega}$$
$$+ \sum_{1}^{\infty}(a_n + a_{-n}) \cdot \cos\frac{2n\pi z}{\omega} \quad ,$$

die mit der im 1. Buche § 11, Nr. 15, 3) mitgeteilten übereinstimmt.

14. Ist $f(z) = \sin \operatorname{am} z$ *), so schlagen wir zur Ermittlung des Integrals

$$a_n = \frac{1}{4K}\int_0^{4K} f(z) e^{-\frac{n\pi z}{2K} i} dz$$

folgenden Weg ein.

Hat das Rechteck $OABC$ (Fig. 75) der Reihe nach die Eckpunkte $z = 0$, $4K$, $4K + 2K'i$, $2K'i$, und umgehen wir die beiden Punkte D und E, für die $z = iK'$ und $4K + iK'$, also $\sin \operatorname{am} z$ unendlich ist, durch verschwindend kleine Halbkreise, und schließen den Punkt $2K + 2K'i$, in welchem $\sin \operatorname{am} z$ ebenfalls

*) Den bisher aus leicht erkennbaren Gründen festgehaltenen Gebrauch, die Veränderliche in den elliptischen Funktionen mit w zu bezeichnen, geben wir nun auf.

unendlich ist, durch einen verschwindend kleinen Kreis $H_0 H_1 H_2$ aus, so ist für die Funktion $f(z) e^{-\frac{n\pi z}{2K} i} dz$

$$\int OA + \int AD_1 + \int D_1 D_0 D_2 + \int D_2 B + \int BC + \int CE_2 + \int E_2 E_0 E_1$$
$$+ \int E_1 O + \int H_0 H_1 H_2 = 0 \quad .$$

In entsprechenden Punkten von OC und AB haben $\sin \operatorname{am} z$ und $e^{-\frac{n\pi z}{2K} i}$ denselben Wert, dz aber entgegengesetzt gleiche Werte, mithin verschwindet die Summe der auf diese Strecken bezüglichen Integrale. In entsprechenden Punkten der Seiten OA und BC hat $\sin \operatorname{am} z$ gleiche Werte, zur Exponentialgröße tritt aber der Faktor $e^{n\frac{\pi K'}{K}}$.

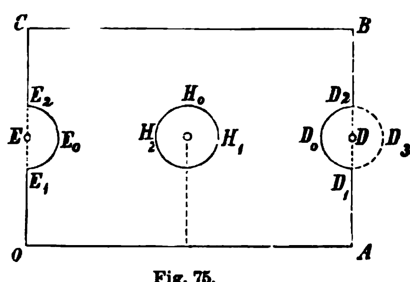


Fig. 75.

Wir setzen

$$e^{-\frac{\pi K'}{K}} = q \quad ,$$

und haben daher

$$\int OA + \int BC = (1 - q^{-n}) \int OA \quad .$$

Statt des Integrals $\int E_2 E_0 E_1$ können wir $\int D_2 D_3 D_1$ setzen, da in entsprechenden Punkten beider Halbkreise die zu integrierende Funktion gleiche Werte hat. Für die Kreisintegrale über $D_1 D_0 D_3$ und $H_0 H_1 H_2$ setzen wir der Reihe nach, indem wir den Halbmesser mit r bezeichnen,

$$z = 2K + K'i + re^{i\varphi}, \quad \text{bezw.} = 4K + K'i + re^{i\varphi} \quad ,$$

bezeichnen die verschwindende Größe $re^{i\varphi}$ mit ϱ und beachten, daß

$$\sin \operatorname{am}(2K + K'i + \varrho) = -\frac{1}{k \sin \operatorname{am} \varrho} \quad ,$$

$$\sin \operatorname{am}(4K + K'i + \varrho) = \frac{1}{k \sin \operatorname{am} \varrho} \quad .$$

Somit erhalten wir

$$\int D_1 D_0 D_3 + \int H_0 H_1 H_2 = i \cdot q^{-\frac{n}{2}} \cdot \frac{e^{-n\pi i} - 1}{k} \int_0^{2\pi} \frac{\varrho}{\sin \operatorname{am} \varrho} e^{-\frac{n\pi\varrho}{2K} i} d\varphi \quad .$$

Wir gehen nun zur Grenze für ein verschwindendes ϱ über; da

$$\lim \frac{\varrho}{\sin \operatorname{am} \varrho} = 1 \,, \quad \lim e^{-\frac{n\pi\varrho}{2K} \cdot i} = 1 \quad ,$$

so folgt

$$\int D_1 D_0 D_3 + \int H_0 H_1 H_2 = 2\pi \cdot q^{-\frac{n}{2}} \cdot \frac{e^{-n\pi i} - 1}{k} \cdot i \quad .$$

Hieraus erhalten wir

$$a_n = \frac{1}{4K} \cdot \int OA = i \frac{\pi}{2K} \cdot \frac{e^{-n\pi i} - 1}{k} \cdot \frac{\sqrt{q^n}}{1 - q^n} = i \frac{\pi}{2K} \cdot \frac{\cos n\pi - 1}{k} \cdot \frac{\sqrt{q^n}}{1 - q^n} \quad .$$

Daher ist

$$a_n + a_{-n} = 0 \quad ,$$

$$a_{2n} - a_{-2n} = 0 \,, \quad a_{2n+1} - a_{-2n-1} = -i \cdot \frac{2\pi}{kK} \cdot \frac{\sqrt{q^{2n+1}}}{1 - q_{2n+1}} \quad .$$

Dies ergibt nun die gesuchte Entwicklung

$$\sin \operatorname{am} z$$

$$= \frac{2\pi}{kK}\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q}\cdot\sin\frac{\pi z}{2K} + \frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3}\cdot\sin\frac{3\pi z}{2K} + \frac{\sqrt{q^5}}{1-q^5}\sin\frac{5\pi z}{2K} + \dots\right) .$$

15. Zur Ermittlung des geradlinigen Integrales

$$\int_0^{4K} \cos \operatorname{am} z \cdot e^{-\frac{n\pi z}{2K}i}\, dz$$

bilden wir ein Parallelogramm $OABC$ (Fig. 76), für dessen Ecken $z = 0$, $4K$, $6K + 2K'i$, $2K + 2K'i$ und schließen die beiden Punkte $2K + K'i$ und $4K + K'i$ im Innern dieses Parallelogramms, in denen $\cos \operatorname{am} z$ unendlich wird, durch gleiche verschwindende Kreise aus. Das Integral, erstreckt über den Umfang des Parallelogramms, ist gleich der Summe der beiden Kreisintegrale. In entsprechenden Punkten der Seiten AB und OC haben $\cos \operatorname{am} z$ und die Exponentialgröße gleiche, dz entgegengesetzt gleiche Werte; also verschwindet die Summe der über AB und CO erstreckten Integrale.

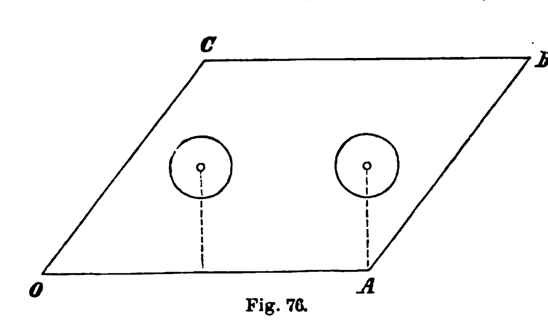


Fig. 76.

In entsprechenden Punkten von OA und BC hat $\cos \operatorname{am} z$ gleiche Werte und zur Exponentialgröße tritt der Faktor

$$e^{-\frac{n\pi}{2K}(2K+2K'i)i} = (-q)^{-n} .$$

Die beiden Integrale geben daher vereint

$$[1 - (-q)^{-n}] \cdot \int OA .$$

In den Kreisintegralen setzen wir

$$z = 2K + K'i + \varrho, \quad \text{bezw.} \quad = 4K + K'i + \varrho ,$$

$$\varrho = r e^{i\varphi} ,$$

und beachten, daß

$$\cos \operatorname{am}(2K + K'i + \varrho)\cdot e^{-\frac{n\pi i}{2K}(2K+K'i+\varrho)} = i\cdot e^{-n\pi i}\cdot q^{-\frac{n}{2}}\cdot\frac{\Delta \operatorname{am}\varrho}{k\sin\operatorname{am}\varrho}\cdot e^{-\frac{n\pi\varrho}{2K}i} ,$$

$$\cos \operatorname{am}(4K + K'i + \varrho)\cdot e^{-\frac{n\pi i}{2K}(4K+K'i+\varrho)} = -i\cdot q^{-\frac{n}{2}}\cdot\frac{\Delta \operatorname{am}\varrho}{k\sin\operatorname{am}\varrho}\cdot e^{-\frac{n\pi\varrho}{2K}i} .$$

Die Summe der beiden Kreisintegrale ist daher

$$\frac{1}{k}(1 - e^{-n\pi i})q^{-\frac{n}{2}}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{\varrho\,\Delta\operatorname{am}\varrho}{\sin\operatorname{am}\varrho}\cdot e^{-\frac{n\pi\varrho}{2K}i}\,d\varphi ;$$

ihr Grenzwert für ein verschwindendes ϱ ist

$$\frac{2\pi}{k}\left(1 - e^{-n\pi i}\right)q^{-\frac{n}{2}} .$$

Daher ergibt sich

$$a_n = \frac{\pi}{2kK}(1 - e^{-n\pi i})\frac{q^{-\frac{n}{2}}}{1-(-q)^{-n}} \quad .$$

Ist n gerade, so ist $a_n = 0$; für ungerade n hat man

$$a_{2n+1} = \frac{\pi}{kK}\cdot\frac{q^{\frac{2n+1}{2}}}{q^{2n+1}+1} \quad ;$$

mithin ist

$$a_{2n+1} - a_{-2n-1} = 0\,, \qquad a_{2n+1} + a_{-2n-1} = \frac{2\pi}{kK}\cdot\frac{q^{\frac{2n+1}{2}}}{q^{2n+1}+1} \quad .$$

Dies ergibt schließlich die Entwicklung

$$\cos\operatorname{am} z = \frac{2\pi}{kK}\left[\frac{\sqrt{q}}{1+q}\cos\frac{\pi z}{2K} + \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\cos\frac{3\pi z}{2K} + \frac{\sqrt{q^5}}{1+q^5}\cos\frac{5\pi z}{2K} + \ldots\right] \quad .$$

16. Um $\Delta\operatorname{am} z$ in eine FOURIERsche Reihe zu entwickeln, haben wir das geradlinige Integral auszuwerten

$$\int_0^{2K}\Delta\operatorname{am} z\, e^{-\frac{n\pi z}{K}i}\,dz \quad .$$

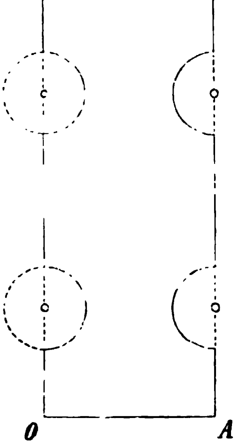


Fig. 77.

Wir integrieren auf dem Umfange $OABC$ (Fig. 77), in dessen Ecken $z = 0$, $2K$, $2K + 4K'i$, $4K'i$, und schließen die Punkte $K'i$, $3K'i$, $2K + K'i$, $2K + 3K'i$, wo $\Delta\operatorname{am} w$ unendlich groß wird, durch kleine Halbkreise aus. Die Integrale über AB und CO haben wieder die Summe Null. In entsprechenden Punkten von OA und CB hat $\Delta\operatorname{am} z$ gleiche Werte, die Exponentialgröße nimmt den Faktor an

$$e^{\frac{4n\pi K'}{K}} = q^{-4n} \quad ,$$

die beiden Integrale geben daher zusammen

$$(1 - q^{-4n})\cdot\int OA \quad .$$

Anstatt der vier Halbkreisintegrale kann man zwei Kreisintegrale um iK' und $3iK'$ nehmen. Wir setzen

$$z = iK' + \varrho\,, \qquad \text{bezw.} = 3iK' + \varrho\,, \qquad \varrho = re^{i\varphi} \quad ,$$

und bemerken, daß

$$\Delta\operatorname{am}(iK' + \varrho)\cdot e^{-\frac{n\pi i}{K}(iK'+\varrho)} = -i\frac{\cos\operatorname{am}\varrho}{\sin\operatorname{am}\varrho}\cdot q^{-n}\cdot e^{-\frac{n\pi\varrho}{K}i} \quad ,$$

$$\Delta\operatorname{am}(3iK' + \varrho)\cdot e^{-\frac{n\pi i}{K}(3iK'+\varrho)} = i\frac{\cos\operatorname{am}\varrho}{\sin\operatorname{am}\varrho}\cdot q^{-3n}\cdot e^{-\frac{n\pi\varrho}{K}i} \quad .$$

Für die beiden Kreisintegrale ergibt sich, wenn man ϱ unendlich klein nimmt,

$$2\pi(q^{-n} - q^{-3n}) \quad .$$

Daher ist

$$a_n = \frac{\pi}{K}\cdot\frac{q^{-n} - q^{-3n}}{1 - q^{-4n}} = \frac{\pi}{K}\cdot\frac{q^n}{1+q^{2n}} \quad ;$$

da $a_{-n} = a_n$, so ist

$$a_n - a_{-n} = 0 \quad ,$$

$$a_n + a_{-n} = \frac{2\pi}{K}\cdot\frac{q^n}{1+q^{2n}}\,, \qquad a_0 = \frac{\pi}{2K} \quad .$$

Dies liefert schließlich

$$\Delta \operatorname{am} z = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi z}{K} + \frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{2\pi z}{K} + \frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi z}{K} + \dots\right) .$$

Diese FOURIERschen Reihen für $\sin \operatorname{am} z$, $\cos \operatorname{am} z$ und $\Delta \operatorname{am} z$ gelten für alle Werte von z innerhalb des Streifens, der sich parallel der realen Achse erstreckt und dessen Ränder durch die Punkte $\pm i K'$ gehen. Jenseit dieses Streifens wiederholen sich die Werte der elliptischen Funktionen, gemäß ihrer komplexen Periode, und zwar bei $\cos \operatorname{am} z$ und $\Delta \operatorname{am} z$ mit Vorzeichenwechsel; die FOURIERschen Reihen sind aber nur einfach periodisch und setzen sich jenseit des Streifens mit andern Werten fort, als die Funktionen, mit denen sie für Punkte im Innern des Streifens übereinstimmen.

17. Aus den in Nr. 14, 15 und 16 entwickelten Reihen lassen sich durch Differentiation, Integration und geeignete Ersetzungen eine große Anzahl brauchbarer Reihen ableiten. Wir beschränken uns hier auf wenige Beispiele.

Ersetzt man in den drei Reihen z durch $K - z$, so entsteht

$$1)\quad \frac{\cos \operatorname{am} z}{\Delta \operatorname{am} z} = \frac{2\pi}{kK}\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q}\cos\frac{\pi z}{2K} - \frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3}\cos\frac{3\pi z}{2K} + \frac{\sqrt{q^5}}{1-q^5}\cos\frac{5\pi z}{2K} - \dots\right) ,$$

$$2)\quad \frac{\sin \operatorname{am} z}{\Delta \operatorname{am} z} = \frac{2\pi}{kk'K}\left(\frac{\sqrt{q}}{1+q}\sin\frac{\pi z}{2K} - \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\sin\frac{3\pi z}{2K} + \frac{\sqrt{q^5}}{1+q^5}\sin\frac{5\pi z}{2K} - \dots\right) ,$$

$$3)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta \operatorname{am} z} \\ = \dfrac{\pi}{2k'K} - \dfrac{2\pi}{k'K}\left(\dfrac{q}{1+q^2}\cos\dfrac{\pi z}{K} - \dfrac{q^2}{1+q^4}\cos\dfrac{2\pi z}{K} + \dfrac{q^3}{1+q^6}\cos\dfrac{3\pi z}{K} - \dots\right) . \end{cases}$$

Aus den Änderungsformeln § 6, Nr. 5

$$4)\quad \begin{cases} F\left(\dfrac{1-k'}{1+k'}, \varphi_1\right) = (1+k')F(k,\varphi) , \\ \sin\varphi_1 = \dfrac{(1+k')\cos\varphi\sin\varphi}{\Delta(\varphi)} , \qquad \cos\varphi_1 = \dfrac{1-(1+k')\sin^2\varphi}{\Delta(\varphi)} , \\ \Delta(\varphi_1) = \dfrac{1-(1-k')\sin^2\varphi}{\Delta(\varphi)} , \end{cases}$$

erhält man sofort, indem man $F(k, \varphi) = w$ setzt,

$$\sin \operatorname{am}\left[(1+k')w, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \frac{(1+k')\cos \operatorname{am} w \sin \operatorname{am} w}{\Delta \operatorname{am} w} ,$$

$$\cos \operatorname{am}\left[(1+k')w, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \frac{1-(1+k')\sin^2 \operatorname{am} w}{\Delta \operatorname{am} w} .$$

Da nun nach 4) die Werte $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ und $\varphi_1 = \pi$ einander entsprechen, so ist

$$F\left(\frac{1-k'}{1+k'}, \pi\right) = 2F\left(\frac{1-k'}{1+k'}, \frac{\pi}{2}\right) = (1+k')K ,$$

also

$$F\left(\frac{1-k'}{1+k'}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1+k'}{2}K .$$

Der Ergänzungsmodul zu $\frac{1-k'}{1+k'}$ ist $\frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$. Aus § 6, Nr. 5, 11) erhält man leicht

$$F(k', \pi) = 2F\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{1+k'} F\left(\frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}, \frac{\pi}{2}\right) ,$$

also

$$F\left(\frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}, \frac{\pi}{2}\right) = (1+k')K' .$$

Ersetzt man also

$$k \text{ durch } \frac{1-k'}{1+k'} \text{ und } w \text{ durch } (1+k')w ,$$

so hat man für K, K', q, $\sin \operatorname{am} w$ und $\cos \operatorname{am} w$ der Reihe zu setzen $\frac{1}{2}(1+k')K$, $(1+k')K'$, q^2, $(1+k')\sin \operatorname{am} w \cos \operatorname{am} w : \Delta \operatorname{am} w$, $[1-(1+k)\sin^2 \operatorname{am} w] : \Delta \operatorname{am} w$.

Hierdurch erhält man aus der Reihe für $\sin \operatorname{am} z$ *):

$$\frac{\sin \operatorname{am} z \cos \operatorname{am} z}{\Delta \operatorname{am} z}$$

$$= \frac{4\pi}{k^2 K}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi z}{K} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi z}{K} + \frac{q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi z}{K} + \dots\right) .$$

§ 8. Die Thetafunktionen.

1. Die FOURIERsche Reihe

$$1) \qquad S(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{-\frac{2n\pi z}{\omega} i}$$

ist eine einfach periodische Funktion von z mit der Periode ω. Ersetzt man z durch $z+\mu$, so erhält man

$$S(z+\mu) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{-\frac{2n\pi\mu}{\omega} i} \cdot e^{-\frac{2n\pi z}{\omega} i} ,$$

oder, wenn $e^{\frac{2\pi\mu}{\omega} i} = q$ gesetzt wird,

$$S(z+\mu) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n q^{-n} \cdot e^{-\frac{2n\pi z}{\omega} i} .$$

Ist μ nicht ω, so ist q von 1 verschieden, und daher $S(z+\mu)$ nicht gleich $S(z)$, also gibt es neben ω nicht noch eine zweite Periode. Wenn es nun auch nicht möglich ist, durch FOURIERsche Reihen eine doppeltperiodische Funktion darzustellen, so kann man doch versuchen, die Koeffizienten a_n so zu bestimmen, daß $S(z+\mu)$ bis auf einen von den a_n unabhängigen Faktor mit $S(z)$ übereinstimmt. Wäre es dann weiter möglich, eine ähnliche Reihe anzugeben, die beim Übergange von z auf $z+\mu$ denselben Faktor einnimmt, so würde dann der Quotient beider Reihen doppeltperiodisch sein.

Unterwirft man in 1) die Koeffizienten der Bedingung

$$a_n q^{-n} = a_{n-1} \cdot \gamma ,$$

*) Weitere Entwicklungen dieser Art und einen Übergang von FOURIERschen Reihen auf unendliche Produkte siehe SCHLOEMILCH, Kompendium Bd. II, Abschn. Elliptische Funktionen.

wobei γ von n unabhängig sein soll, so erhält man

$$S(z+\mu) = \gamma e^{-\frac{2\pi z}{\omega} i} S(z) \quad .$$

Nimmt man $a_0 = 1$, so ist

$$a_1 = \gamma q\,, \quad a_2 = \gamma^2 q^3\,, \quad a_3 = \gamma^3 q^6\,, \quad \ldots$$

$$a_n = \gamma^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad .$$

Hier kann man noch über γ frei verfügen; nimmt man

$$\gamma = \pm q^{-\frac{1}{2}}$$

so wird

$$a_n = (\pm 1)^n q^{\frac{n^2}{2}} \quad ,$$

und man erhält zwei Formen für S, nämlich

2) $$\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{\frac{\pi i}{\omega}(n^2\mu - 2nz)} \quad \text{und} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}(n^2\mu - 2nz)} \quad .$$

Um ähnlich gebaute Reihen zu erhalten, die beim Übergange von z auf $z+\mu$ um einfache Faktoren wachsen, betrachten wir

3) $$S_1(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n e^{-\frac{(2n+1)\pi z}{\omega} i} \quad .$$

Setzt man hier $z+\mu$ für z, so entsteht

$$S_1(z+\mu) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n q^{-\frac{2n+1}{2}} \cdot e^{-\frac{(2n+1)\pi z}{\omega} i} \quad .$$

Bestimmt man die b durch die Bedingung

4) $$b_n q^{-\frac{2n+1}{2}} = \gamma_1 \cdot b_{n-1} \quad ,$$

so wird

$$S_1(z+\mu) = \gamma_1 \cdot e^{-\frac{2\pi z}{\omega} i} \cdot S_1(z) \quad .$$

Aus 4) folgt

$$b_1 = b_0 \gamma_1 q^{\frac{3}{2}}\,, \quad b_2 = b_1 \gamma_1 q^{\frac{5}{2}}\,, \quad b_3 = b_2 \gamma_1 q^{\frac{7}{2}}\,, \quad \ldots$$

$$b_n = b_0 \gamma_1^n \cdot q^{\frac{n^2+2n}{2}} \quad .$$

Wir nehmen

$$\gamma_1 = \gamma = \pm q^{-\frac{1}{2}}\,, \quad b_0 = q^{\frac{1}{8}} \quad ,$$

und erhalten

$$b_n = (\pm 1)^n q^{\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^2} \quad .$$

Für die Reihe S_1 erhalten wir somit die beiden Formen

5) $$\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}[(n+\frac{1}{2})^2\mu - (2n+1)z]} \quad \text{und} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{\frac{\pi i}{\omega}[(n+\frac{1}{2})^2\mu - (2n+1)z]} \quad .$$

Wir sind hierdurch auf die Untersuchung der vier Reihen 2) und 5) geführt worden. Wir ersetzen in denselben $\pi z : \omega$ durch z und $i\mu\pi : \omega$ durch $-\varrho$; ferner fügen wir zur letzten Reihe den Faktor i.

Die vier Reihen, die wir so erhalten, führen nach JACOBI den Namen **Thetafunktionen** und werden durch die Funktionszeichen

$$\vartheta(z,\varrho)\,,\quad \vartheta_1(z,\varrho)\,,\quad \vartheta_2(z,\varrho)\,,\quad \vartheta_3(z,\varrho)$$

bezeichnet, so daß

$$6)\qquad \begin{cases} \vartheta\,(z) = \Sigma(-1)^n e^{-n^2\varrho - i\cdot 2nz} \,, \\ \vartheta_1(z) = i\,\Sigma(-1)^n e^{-(n+\frac12)^2\varrho - i(2n+1)z} \,, \\ \vartheta_2(z) = \Sigma e^{-(n+\frac12)^2\varrho - i(2n+1)z} \,, \\ \vartheta_3(z) = \Sigma e^{-n^2\varrho - i\cdot 2nz} \,. \end{cases}$$

Wird unter $e^{-\varrho}$ ein realer positiver echter Bruch verstanden, so haben diese Reihen für jedes endliche z endliche Werte und werden nur mit z zugleich unendlich groß.

Wir werden nun die wichtigsten Eigenschaften der Thetafunktionen entwickeln; am Schluß dieser Untersuchungen wird der Zusammenhang mit den elliptischen Funktionen hervortreten.

2. Rechnet man je zwei Glieder der Thetafunktionen zusammen, die zu entgegengesetzt gleichen n gehören, so erhält man die Reihen in folgender Gestalt

$$1)\qquad \begin{cases} \vartheta(z) = 1 - 2e^{-\varrho}\cos 2z + 2e^{-4\varrho}\cos 4z - 2e^{-9\varrho}\cos 6z + \dots \,, \\ \vartheta_1(z) = 2\sqrt[4]{e^{-\varrho}}\sin z - 2\sqrt[4]{e^{-9\varrho}}\sin 3z + 2\sqrt[4]{e^{-25\varrho}}\sin 5z - \dots \,, \\ \vartheta_2(z) = 2\sqrt[4]{e^{-\varrho}}\cos z + 2\sqrt[4]{e^{-9\varrho}}\cos 3z + 2\sqrt[4]{e^{-25\varrho}}\cos 5z + \dots \,, \\ \vartheta_3(z) = 1 + 2e^{-\varrho}\cos 2z + 2e^{-4\varrho}\cos 4z + 2e^{-9\varrho}\cos 6z + \dots \end{cases}$$

Hieraus erkennt man die Beziehungen

$$2)\qquad \begin{cases} \vartheta(z) = \vartheta_3(\tfrac12\pi - z)\,, & \vartheta_2(z) = \vartheta_1(\tfrac12\pi - z)\,, \\ \vartheta_1(z) = \vartheta_2(\tfrac12\pi - z)\,, & \vartheta_3(z) = \vartheta\,(\tfrac12\pi - z)\,. \end{cases}$$

Bezeichnet m eine ganze Zahl, so ist

$$3)\qquad \begin{cases} \vartheta(z+m\pi) = \vartheta(z)\,, & \vartheta_2(z+m\pi) = (-1)^m\vartheta_2(z)\,, \\ \vartheta_1(z+m\pi) = (-1)^m\vartheta_1(z)\,, & \vartheta_3(z+m\pi) = \vartheta_3(z)\,. \end{cases}$$

Ersetzen wir in Nr. 1, 6) die Veränderliche durch $z + \frac12 i\varrho$, so folgt

$$4)\qquad \begin{cases} \vartheta(z+\tfrac12 i\varrho) = i e^{\frac14\varrho - iz}\vartheta_1(z)\,, \\ \vartheta_1(z+\tfrac12 i\varrho) = i e^{\frac14\varrho - iz}\vartheta(z)\,, \\ \vartheta_2(z+\tfrac12 i\varrho) = e^{\frac14\varrho - iz}\vartheta_3(z)\,, \\ \vartheta_3(z+\tfrac12 i\varrho) = e^{\frac14\varrho - iz}\vartheta_2(z)\,. \end{cases}$$

Ersetzen wir hier wieder z durch $z + \frac12 i\varrho$, so entsteht

$$5)\qquad \begin{cases} \vartheta(z+i\varrho) = -e^{\varrho - 2iz}\vartheta(z)\,, \\ \vartheta_1(z+i\varrho) = -e^{\varrho - 2iz}\vartheta_1(z)\,, \\ \vartheta_2(z+i\varrho) = e^{\varrho - 2iz}\vartheta_2(z)\,, \\ \vartheta_3(z+i\varrho) = e^{\varrho - 2iz}\vartheta_3(z)\,. \end{cases}$$

Wenn man dies mehrmals wiederholt, und dann noch $z - i\cdot m_1\varrho$ für z setzt, so erhält man für jede ganze Zahl m_1

$$6)\qquad \begin{cases} \vartheta(z+m_1\cdot i\varrho) = (-1)^{m_1} e^{m_1^2\varrho - 2im_1 z}\vartheta(z)\,, \\ \vartheta_1(z+m_1\cdot i\varrho) = (-1)^{m_1} e^{m_1^2\varrho - 2im_1 z}\vartheta_1(z)\,, \\ \vartheta_2(z+m_1\cdot i\varrho) = e^{m_1^2\varrho - 2im_1 z}\vartheta_2(z)\,, \\ \vartheta_3(z+m_1\cdot i\varrho) = e^{m_1^2\varrho - 2im_1 z}\vartheta_3(z)\,. \end{cases}$$

Aus 3) und 6) folgt noch

$$7)\quad \begin{cases} \vartheta(z+m\pi+m_1\cdot i\varrho)=(-1)^{m_1}e^{m_1^2\varrho-2im_1z}\,\vartheta(z) \quad , \\ \vartheta_1(z+m\pi+m_1\cdot i\varrho)=(-1)^{m+m_1}e^{m_1^2\varrho-2im_1z}\,\vartheta_1(z) \quad , \\ \vartheta_2(z+m\pi+m_1\cdot i\varrho)=(-1)^{m}e^{m_1^2\varrho-2im_1z}\,\vartheta_2(z) \quad , \\ \vartheta_3(z+m\pi+m_1\cdot i\varrho)=e^{m_1^2\varrho-2im_1z}\,\vartheta_3(z) \quad . \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen erkennt man sofort, daß der Quotient je zweier Thetafunktionen doppelt periodisch ist; die Perioden sind von der Form $m\cdot\pi+n\cdot i\varrho$, wobei m und n gleich 0, 1 oder 2 sind.

3. Die Multiplikation der beiden Funktionen

$$\vartheta_3(z)=\Sigma e^{-n^2\varrho-i\cdot 2nz}\,,\qquad \vartheta_3(\zeta)=\Sigma e^{-m^2\varrho-i\cdot 2m\zeta}$$

ergibt die Doppelsumme

$$\vartheta_3(z)\cdot\vartheta_3(\zeta)=\Sigma\Sigma e^{-(n^2+m^2)\varrho-i\cdot 2(nz+m\zeta)} \quad .$$

Für den Exponenten von e kann man schreiben

$$-2\varrho\left[\tfrac{1}{4}(n+m)^2+\tfrac{1}{4}(n-m)^2\right]-2i\left[\tfrac{1}{2}(n+m)(z+\zeta)+\tfrac{1}{2}(n-m)(z-\zeta)\right] \quad .$$

Die Zahlen $n+m$ und $n-m$ sind gleichzeitig gerade oder ungerade; bezeichnen a und b ganze Zahlen, so ist also

$$n+m=2a\,,\qquad \text{und zugleich}\quad n-m=2b \quad ,$$

oder

$$n+m=2a+1\,,\qquad \text{und zugleich}\quad n-m=2b+1 \quad .$$

Durchlaufen a und b alle positiven und negativen ganzen Zahlen, so erhalten $n+m$ und $n-m$ alle möglichen Werte.

Ersetzt man m und n durch a und b, so erhält man

$$\begin{aligned} \vartheta_3(z)\cdot\vartheta_3(\zeta) &= \Sigma\Sigma e^{-2\varrho(a^2+b^2)-2i[a(z+\zeta)+b(z-\zeta)]} \\ &\quad + \Sigma\Sigma e^{-2\varrho[(a+\frac{1}{2})^2+(b+\frac{1}{2})^2]-2i[(a+\frac{1}{2})(z+\zeta)+(b+\frac{1}{2})(z-\zeta)]} \quad , \\ &= \Sigma e^{-2a^2\varrho-2ia(z+\zeta)}\cdot\Sigma e^{-2b^2\varrho-2b(z-\zeta)} \\ &\quad + \Sigma e^{-2(a+\frac{1}{2})^2\varrho-2i(a+\frac{1}{2})(z+\zeta)}\cdot\Sigma e^{-2(b+\frac{1}{2})^2\varrho-2i(b+\frac{1}{2})(z-\zeta)} \quad . \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$1)\quad \vartheta_3(z)\cdot\vartheta_3(\zeta)=\vartheta_3(z+\zeta,2\varrho)\cdot\vartheta_3(z-\zeta,2\varrho)+\vartheta_2(z+\zeta,2\varrho)\cdot\vartheta_2(z-\zeta,2\varrho) \quad .$$

Ersetzt man hier z durch $\frac{1}{2}\pi-z$, ζ durch $\frac{1}{2}\pi-\zeta$, und beachtet Nr. 2, 2) und 3), so erhält man

$$2)\quad \vartheta(z)\cdot\vartheta(\zeta)=\vartheta_3(z+\zeta,2\varrho)\cdot\vartheta_3(z-\zeta,2\varrho)-\vartheta_2(z+\zeta,2\varrho)\cdot\vartheta_2(z-\zeta,2\varrho) \quad .$$

Aus Nr. 2, 4) ergibt sich leicht

$$\vartheta_3(z-\tfrac{1}{2}i\varrho)=e^{\frac{1}{4}\varrho+iz}\cdot\vartheta_2(z) \quad .$$

Ersetzt man hier ϱ durch 2ϱ, so entsteht

$$\vartheta_3(z-i\varrho,2\varrho)=e^{\frac{1}{2}\varrho+iz}\cdot\vartheta_2(z,2\varrho) \quad .$$

Ebenso erhält man

$$\vartheta_2(z-i\varrho,2\varrho)=e^{\frac{1}{2}\varrho+iz}\cdot\vartheta_3(z,2\varrho) \quad .$$

Wenn man nun in 1) z durch $z-\frac{1}{2}i\varrho$, ζ durch $\zeta-\frac{1}{2}i\varrho$ ersetzt, und Nr. 2, 6) beachtet, so folgt

$$3)\quad \vartheta_2(z)\cdot\vartheta_2(\zeta)=\vartheta_2(z+\zeta,2\varrho)\,\vartheta_3(z-\zeta,2\varrho)+\vartheta_3(z+\zeta,2\varrho)\,\vartheta_2(z-\zeta,2\varrho) \quad .$$

Werden hier z und ζ durch $\frac{1}{2}\pi-z$ und $\frac{1}{2}\pi-\zeta$ ersetzt, so ergibt sich noch

$$4)\quad \vartheta_1(z)\cdot\vartheta_1(\zeta)=-\vartheta_2(z+\zeta,2\varrho)\cdot\vartheta_3(z-\zeta,2\varrho)+\vartheta_3(z+\zeta,2\varrho)\cdot\vartheta_2(z-\zeta,2\varrho).$$

Aus diesen Gleichungen erhält man leicht die folgenden

$$5)\quad \begin{cases} \vartheta(z)^2 = \vartheta_3(0, 2\varrho)\cdot\vartheta_3(2z, 2\varrho) - \vartheta_2(0, 2\varrho)\cdot\vartheta_2(2z, 2\varrho) \quad , \\ \vartheta_1(z)^2 = \vartheta_2(0, 2\varrho)\cdot\vartheta_3(2z, 2\varrho) - \vartheta_3(0, 2\varrho)\cdot\vartheta_2(2z, 2\varrho) \quad , \\ \vartheta_2(z)^2 = \vartheta_3(0, 2\varrho)\cdot\vartheta_2(2z, 2\varrho) + \vartheta_2(0, 2\varrho)\cdot\vartheta_3(2z, 2\varrho) \quad , \\ \vartheta_3(z)^2 = \vartheta_3(0, 2\varrho)\cdot\vartheta_3(2z, 2\varrho) + \vartheta_2(0, 2\varrho)\cdot\vartheta_2(2z, 2\varrho) \quad . \end{cases}$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen

$$6)\quad \begin{cases} \vartheta(z)^2 + \vartheta_3(z)^2 = 2\vartheta_3(0, 2\varrho)\vartheta_3(2z, 2\varrho) \quad , \\ \vartheta(z)^2 - \vartheta_3(z)^2 = -2\vartheta_2(0, 2\varrho)\vartheta_2(2z, 2\varrho) \quad , \\ \vartheta_1(z)^2 + \vartheta_2(z)^2 = 2\vartheta_2(0, 2\varrho)\vartheta_3(2z, 2\varrho) \quad , \\ \vartheta_1(z)^2 - \vartheta_2(z)^2 = -2\vartheta_3(0, 2\varrho)\vartheta_2(2z, 2\varrho) \quad . \end{cases}$$

Wenn man aus den beiden letzten Gleichungen $\vartheta_3(2z, 2\varrho)$ und $\vartheta_2(2z, 2\varrho)$ entnimmt und in die erste und letzte Gleichung 5) einsetzt, so erhält man

$$7)\quad \frac{2\vartheta_2(0, 2\varrho)\vartheta_3(0, 2\varrho)}{\vartheta_3(0, 2\varrho)^2 + \vartheta_2(0, 2\varrho)^2}\cdot\vartheta(z)^2 = \vartheta_1(z)^2 + \frac{\vartheta_3(0, 2\varrho)^2 - \vartheta_2(0, 2\varrho)^2}{\vartheta_3(0, 2\varrho)^2 + \vartheta_2(0, 2\varrho)^2}\cdot\vartheta_2(z)^2 \quad ,$$

$$8)\quad \frac{2\vartheta_2(0, 2\varrho)\vartheta_3(0, 2\varrho)}{\vartheta_2(0, 2\varrho)^2 + \vartheta_3(0, 2\varrho)^2}\cdot\vartheta_3(z)^2 = \frac{\vartheta_3(0, 2\varrho)^2 - \vartheta_2(0, 2\varrho)^2}{\vartheta_3(0, 2\varrho)^2 + \vartheta_2(0, 2\varrho)^2}\cdot\vartheta_1(z)^2 + \vartheta_2(z)^2 \,.$$

Setzen wir $e^{-\varrho} = \sqrt{q}$, so ist

$$\vartheta_2(0, 2\varrho) = 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}}\ldots \quad ,$$
$$\vartheta_3(0, 2\varrho) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots \quad ,$$

beide Größen sind daher positiv. Aus der Ungleichung $(a - b)^2 > 0$ folgt $a^2 + b^2 > 2ab$, setzt man also

$$\frac{2\vartheta_2(0, 2\varrho)\vartheta_3(0, 2\varrho)}{\vartheta_3(0, 2\varrho)^2 + \vartheta_3(0, 2\varrho)^2} = k \quad ,$$

so ist k ein positiver echter Bruch; man erhält leicht

$$\frac{\vartheta_3(0, 2\varrho)^2 - \vartheta_2(0, 2\varrho)^2}{\vartheta_3(0, 2\varrho)^2 + \vartheta_2(0, 2\varrho)^2} = \sqrt{1 - k^2} = k' \quad ,$$

wobei die Wurzel positiv zu nehmen ist, wie man aus 7) für $z = 0$ erkennt. Hierdurch wird aus 7) und 8)

$$9)\qquad k\cdot\vartheta(z)^2 = \vartheta_1(z)^2 + k'\vartheta_2(z)^2 \quad ,$$

$$10)\qquad k\cdot\vartheta_3(z)^2 = k'\vartheta_1(z)^2 + \vartheta_2(z)^2 \quad .$$

Wir setzen hierin $z = 0$ und beachten, daß $\vartheta_1(0) = 0$; dadurch erhalten wir für k und k' die einfachern Ausdrücke

$$11)\qquad k = \left[\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}\right]^2, \quad k' = \left[\frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)}\right]^2 \quad .$$

4. In Nr. 3, 4) ersetzen wir z durch $z + \frac{1}{2}t$, ζ durch $\frac{1}{2}t$, ϱ durch $\frac{1}{2}\varrho$; dadurch entsteht

$$\vartheta_3(z + t)\cdot\vartheta_2(z) - \vartheta_2(z + t)\cdot\vartheta_3(z) = \vartheta_1(z + \tfrac{1}{2}t, \tfrac{1}{2}\varrho)\cdot\vartheta_1(\tfrac{1}{2}t, \tfrac{1}{2}\varrho) \quad .$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{t}\left[\frac{\vartheta_2(z + t)}{\vartheta_3(z + t)} - \frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_3(z)}\right] = -\frac{\vartheta_1(z + \frac{1}{2}t, \frac{1}{2}\varrho)}{\vartheta_3(z + t)\vartheta_3(z)}\cdot\frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}\varrho)}{t} \quad .$$

Aus dieser Gleichung gelangen wir zur Kenntnis des Differentialquotienten von $\vartheta_2(z) : \vartheta_3(z)$, indem wir zur Grenze für ein verschwindendes t übergehen.

Setzen wir
$$\lim_{t=0} \frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}\varrho)}{t} = a \quad ,$$
so ergibt sich

1)
$$\frac{d\,\dfrac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_3(z)}}{dz} = -a \cdot \frac{\vartheta_1(z, \frac{1}{2}\varrho)}{\vartheta_3(z)^2} \quad .$$

Um rechts die Funktion $\vartheta_1(z, \frac{1}{2}\varrho)$ zu beseitigen, beachten wir, daß aus Nr. 3, 3) folgt, wenn wir z durch $\frac{1}{2}\pi - z$, ζ durch 0 und ϱ durch $\frac{1}{2}\varrho$ ersetzen,
$$\vartheta_1(z, \tfrac{1}{2}\varrho)\,\vartheta_2(0, \tfrac{1}{2}\varrho) = 2\,\vartheta_1(z)\,\vartheta(z) \quad .$$

Setzen wir

2)
$$\frac{2a}{\vartheta_2(0, \frac{1}{2}\varrho)} = \beta \quad ,$$
so erhalten wir

3)
$$\frac{d\,\dfrac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_3(z)}}{dz} = -\beta \cdot \frac{\vartheta_1(z)\,\vartheta(z)}{\vartheta_3(z)^2} \quad .$$

Wir setzen hier $\frac{1}{2}\pi - z$ für z und erhalten so

4)
$$\frac{d\,\dfrac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)}}{dz} = \beta \cdot \frac{\vartheta_2(z)\,\vartheta_3(z)}{\vartheta(z)^2} \quad .$$

5. Die soeben gewonnenen Differentialformeln setzen uns in den Stand, die Quotienten zweier Thetafunktionen mit bestimmten Integralen in Beziehung zu bringen. Wir definieren drei neue Funktionen $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ durch die Gleichungen
$$f(z) \equiv \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)}, \quad g(z) \equiv \frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta(z)}, \quad h(z) \equiv \frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta(z)} \quad .$$

Zufolge Nr. 3, 10) bestehen zwischen diesen Funktionen die beiden Gleichungen

1)
$$f(z)^2 + k' \cdot g(z)^2 = k \quad ,$$

2)
$$k' f(z)^2 + g(z)^2 = k \cdot h(z)^2 \quad .$$

Ferner ist

3)
$$k = \frac{g(0)^2}{h(0)^2}, \quad k' = \frac{1}{f(0)^2} \quad .$$

Die Gleichungen 1) und 2) ergeben

4)
$$g(z)^2 = \frac{k}{k'}\left[1 - \frac{1}{k} \cdot f(z)^2\right] \quad ,$$

5)
$$h(z)^2 = \frac{1}{k'}\left[1 - k \cdot f(z)^2\right] \quad .$$

Aus der Gleichung Nr. 4, 4) erhält man nun

6)
$$\frac{df(z)}{dz} = \beta \cdot \frac{\sqrt{k}}{k'} \cdot \sqrt{\left[1 - \frac{1}{k} f(z)^2\right]\left[1 - k f(z)^2\right]} \quad ,$$

also ist
$$z = \frac{k'}{\beta\sqrt{k}} \cdot \int \frac{df(z)}{\sqrt{\left[1 - \frac{1}{k} f(z)^2\right]\left[1 - k f(z)^2\right]}} \quad .$$

Wir ersetzen hier, um mit frühern Bezeichnungen in bessere Übereinstimmung zu kommen, $\frac{1}{\sqrt{k}} f(z)$ durch ζ und z durch w; alsdann ist

$$w = \frac{k'}{\beta} \int \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} + \text{Konst.}$$

Da $\vartheta_1(z)$ verschwindet, wenn $z = 0$ ist, also $\zeta = 0$ und $w = 0$ zusammen gehören, so folgt

$$7) \qquad \frac{\beta}{k'} w = \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} \quad .$$

Die Konstante $\beta : k'$ läßt sich durch das geradlinige Integral

$$\int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} = K$$

ausdrücken; denn dem Werte $\zeta = 1$ entspricht $f(z) = \sqrt{k}$, also bestimmt sich das zugehörige z aus

$$8) \qquad \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)} = \sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} \quad .$$

Dieser Gleichung wird durch $z = \frac{1}{2}\pi$ genügt, wie man sofort erkennt, wenn man in Nr. 2, 2) z durch Null ersetzt.

Der Differentialquotient $d\zeta : dz$ ist für ein hinlänglich kleines z positiv; dasselbe gilt für $\vartheta_2(z)\vartheta_3(z) : \vartheta(z)^2$ für $z < \frac{1}{2}\pi$: folglich ist $\beta > 0$ (Nr. 4, 4)). Damit $\zeta = f(z) : \sqrt{k}$ von 0 bis 1 wächst, hat man daher für z von $z = 0$ an zunehmende Werte zu setzen, bis man an einen Wert von z kommt, der $\zeta = 1$ entspricht. Man hat daher von den unendlich vielen Wurzeln der Gleichung 8) (vgl. Nr. 2, 7)) die Wurzel $z = \frac{1}{2}\pi$ zu nehmen. Folglich ist

$$9) \qquad \frac{\beta}{k'} \cdot \frac{\pi}{2} = K \quad .$$

Aus 7) und 9) entsteht schließlich

$$10) \qquad \frac{2K}{\pi} w = \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} \quad .$$

Dem Werte $\zeta = 1 : k$ entspricht

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \text{oder} \quad \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)} = \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)} \quad .$$

Aus den letzten beiden Gleichungen Nr. 2, 4) folgt für $z = 0$

$$\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)} = \frac{\vartheta_2(\frac{1}{2}i\varrho)}{\vartheta_3(\frac{1}{2}i\varrho)} \quad ,$$

und aus Nr. 2, 2) für $z = \frac{1}{2}i\varrho$ folgt weiter

$$\frac{\vartheta_2(\frac{1}{2}i\varrho)}{\vartheta_3(\frac{1}{2}i\varrho)} = \frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}i\varrho)}{\vartheta(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}i\varrho)} \quad .$$

Daher ist z aus der Gleichung zu bestimmen

$$\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)} = \frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}i\varrho)}{\vartheta(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}i\varrho)} \quad .$$

Dieser Gleichung genügen die Werte

$$z = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}i\varrho + 2n\pi + m \cdot i\varrho \quad ;$$

folglich ist

$$11) \qquad \frac{2K}{\pi}(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}i\varrho + 2n\pi + m \cdot i\varrho) = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} \quad .$$

Nimmt man rechts das geradlinige Integral, so hat man bekanntlich

$$\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} = K + iK' \quad .$$

Man hat daher $n = 0$, und, wenn ϱ positiv vorausgesetzt wird, $m = 1$ zu nehmen. Hieraus folgt

$$\frac{2K}{\pi}(\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}i\varrho) = K + iK' \quad ,$$

also ist

$$\varrho = \pi \cdot \frac{K'}{K} \quad .$$

Aus den ersten beiden Gleichungen Nr. 2, 7) folgt, daß

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{k}} f(w) = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\vartheta_1(w)}{\vartheta(w)}$$

sich nicht ändert, wenn w um $2m\pi + m_1 \cdot i\varrho$ zunimmt, wobei m und m_1 beliebige ganze Zahlen sind; in Rücksicht auf den soeben gefundenen Wert von ϱ wächst dabei

$$\frac{2K}{\pi} \cdot w \quad \text{um} \quad m \cdot 4K + m_1 \cdot 2iK' \quad .$$

In gleicher Weise vieldeutig ist bei gegebenem ζ bekanntlich die rechte Seite der Gleichung 10); diese Gleichung ist daher umfassend gültig, sie enthält links und rechts Größen, die dieselben beiden Periodizitätsmoduln haben. Aus 10) folgt nun

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot f(w) = \sin \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} w \quad ,$$

also ist

$$\sin \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} w = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\vartheta_1(w)}{\vartheta(w)} \quad .$$

Ersetzt man hier w durch $\pi w : 2K$, so ergibt sich

$$12) \qquad \sin \operatorname{am} w = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi w}{2K}\right)}{\vartheta\left(\frac{\pi w}{2K}\right)} \quad .$$

Aus den Gleichungen 4) und 5) folgt

$$1 - \sin^2 \operatorname{am} \frac{2Kw}{\pi} = \frac{k'}{k} g(w)^2 \quad ,$$

$$1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{2Kw}{\pi} = k' h(w)^2 \quad ,$$

also, wenn man auch hier w durch $\pi w : 2K$ ersetzt,

$$13)\qquad \cos \operatorname{am} w = \sqrt{\frac{k'}{k}} \cdot \frac{\vartheta_2\left(\frac{\pi w}{2K}\right)}{\vartheta\left(\frac{\pi w}{2K}\right)} ,$$

$$14)\qquad \varDelta \operatorname{am} w = \sqrt{k'} \cdot \frac{\vartheta_3\left(\frac{\pi w}{2K}\right)}{\vartheta\left(\frac{\pi w}{2K}\right)} .$$

Setzt man die Reihen selbst ein und bezeichnet wieder

$$e^{-\varrho} = e^{-\frac{K'}{K}\pi} = q ,$$

so erhält man

$$15)\qquad \sin \operatorname{am} w = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{2\sqrt[4]{q} \cdot \sin\frac{\pi w}{2K} - 2\sqrt[4]{q^9} \sin\frac{3\pi w}{2K} + 2\sqrt[4]{q^{25}} \sin\frac{5\pi w}{2K} - \ldots}{1 - 2q\cos\frac{\pi w}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi w}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi w}{K} + \ldots} ,$$

$$16)\qquad \cos \operatorname{am} w = \sqrt{\frac{k'}{k}} \cdot \frac{2\sqrt[4]{q}\cos\frac{\pi w}{2K} + 2\sqrt[4]{q^9}\cos\frac{3\pi w}{2K} + 2\sqrt[4]{q^{25}} \cdot \cos\frac{5\pi w}{2K} + \ldots}{1 - 2q\cos\frac{\pi w}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi w}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi w}{K} + \ldots} ,$$

$$17)\qquad \varDelta \operatorname{am} w = \sqrt{k'} \cdot \frac{1 + 2q\cos\frac{\pi w}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi w}{K} + 2q^9\cos\frac{3\pi w}{K} + \ldots}{1 - 2q\cos\frac{\pi w}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi w}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi w}{K} + \ldots} .$$

6. Nach der Betrachtung von algebraischen Integralen, die eine Irrationalität zweiten Grades enthalten und einfach periodische Funktionen zu Umkehrungen haben, wendeten wir uns zu algebraischen Integralen mit Irrationalitäten dritten oder vierten Grades, erkannten zwei verschiedene Periodizitätsmoduln und wurden durch die Umkehrung zunächst der einfachsten Integrale dieser Art auf die doppelt periodischen Funktionen geführt.

Man kann auch den umgekehrten Weg einschlagen. Von der Existenz einfach periodischer Funktionen ausgehend, kann man fragen, ob es auch doppelt periodische Funktionen gibt. Man wird versuchen, solche Funktionen durch Reihen darzustellen, deren Glieder selbst einfach periodisch sind.

Hierdurch wird man auf die Betrachtungen geführt, die wir in Nr. 1 angestellt haben, gelangt so zur Aufstellung der Thetafunktionen, bildet die doppelt periodischen Funktionen $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ und findet dann, daß diese Thetaquotienten Umkehrungen bestimmter Integrale sind. Auf diesem Wege gelangt man sehr rasch und ohne schwierige Betrachtungen zur Kenntnis einer Fülle von Beziehungen über die doppelt periodischen Funktionen; die Hauptschwierigkeit, die in der Untersuchung der Integrale komplexer irrationaler Funktionen liegt, erscheint erst am Schlusse. Dieser Gedankengang war vorzuziehen, solange die Theorie der Integrale komplexer Funktionen noch nicht die gegenwärtige Stufe erreicht hatte.

7. Wir wollen nun zeigen, wie der Summensatz elliptischer Funktionen mit Hilfe der Thetafunktionen gefunden wird*).

Aus den Gleichungen Nr. 3, 1) bis 4) erhalten wir, indem wir z, ζ und ϱ durch $\frac{1}{2}(z+\zeta)$, $\frac{1}{2}(z-\zeta)$ und $\frac{1}{2}\varrho$ ersetzen,

$$1)\quad \vartheta[\tfrac{1}{2}(z+\zeta), \tfrac{1}{2}\varrho]\cdot\vartheta[\tfrac{1}{2}(z-\zeta), \tfrac{1}{2}\varrho] = \vartheta_3(z)\vartheta_3(\zeta) - \vartheta_2(z)\vartheta_2(\zeta)\ ,$$

$$2)\quad \vartheta_1[\tfrac{1}{2}(z+\zeta), \tfrac{1}{2}\varrho]\cdot\vartheta_1[\tfrac{1}{2}(z-\zeta), \tfrac{1}{2}\varrho] = \vartheta_3(z)\vartheta_2(\zeta) - \vartheta_2(z)\vartheta_3(\zeta)\ ,$$

$$3)\quad \vartheta_2[\tfrac{1}{2}(z+\zeta), \tfrac{1}{2}\varrho]\cdot\vartheta_2[\tfrac{1}{2}(z-\zeta), \tfrac{1}{2}\varrho] = \vartheta_3(z)\vartheta_2(\zeta) + \vartheta_2(z)\vartheta_3(\zeta)\ ,$$

$$4)\quad \vartheta_3[\tfrac{1}{2}(z+\zeta), \tfrac{1}{2}\varrho]\cdot\vartheta_3[\tfrac{1}{2}(z-\zeta), \tfrac{1}{2}\varrho] = \vartheta_3(z)\vartheta_3(\zeta) + \vartheta_2(z)\vartheta_2(\zeta)\ .$$

Die Ersetzung $\frac{1}{2}\pi - z$ und $\frac{1}{2}\pi - \zeta$ für z und ζ liefert hieraus

$$5)\quad \vartheta_3[\tfrac{1}{2}(z+\zeta), \tfrac{1}{2}\varrho]\cdot\vartheta[\tfrac{1}{2}(z-\zeta), \tfrac{1}{2}\varrho] = \vartheta(z)\vartheta(\zeta) - \vartheta_1(z)\vartheta_1(\zeta)\ ,$$

$$6)\quad \vartheta_2[\tfrac{1}{2}(z+\zeta), \tfrac{1}{2}\varrho]\cdot\vartheta_1[\tfrac{1}{2}(z-\zeta), \tfrac{1}{2}\varrho] = \vartheta_1(z)\vartheta(\zeta) - \vartheta(z)\vartheta_1(\zeta)\ ,$$

$$7)\quad \vartheta_1[\tfrac{1}{2}(z+\zeta), \tfrac{1}{2}\varrho]\cdot\vartheta_2[\tfrac{1}{2}(z-\zeta), \tfrac{1}{2}\varrho] = \vartheta_1(z)\vartheta(\zeta) + \vartheta(z)\vartheta_1(\zeta)\ ,$$

$$8)\quad \vartheta[\tfrac{1}{2}(z+\zeta), \tfrac{1}{2}\varrho]\cdot\vartheta_3[\tfrac{1}{2}(z-\zeta), \tfrac{1}{2}\varrho] = \vartheta(z)\vartheta(\zeta) + \vartheta_1(z)\vartheta_1(\zeta)\ .$$

Ferner erhält man leicht durch Addition und Subtraktion aus den Gleichungen 5) und 8), 4) und 1), indem man nachher z, ζ und ϱ durch $z+\zeta$, $z-\zeta$ und 2ϱ ersetzt,

$$9)\quad 2\vartheta(z+\zeta, 2\varrho)\cdot\vartheta(z-\zeta, 2\varrho) = \vartheta(z)\vartheta_3(\zeta) + \vartheta_3(z)\vartheta(\zeta)\ ,$$

$$10)\quad 2\vartheta_1(z+\zeta, 2\varrho)\cdot\vartheta_1(z-\zeta, 2\varrho) = \vartheta(z)\vartheta_3(\zeta) - \vartheta_3(z)\vartheta(\zeta)\ ,$$

$$11)\quad 2\vartheta_2(z+\zeta, 2\varrho)\cdot\vartheta_2(z-\zeta, 2\varrho) = \vartheta_3(z)\vartheta_3(\zeta) - \vartheta(z)\vartheta(\zeta)\ ,$$

$$12)\quad 2\vartheta_3(z+\zeta, 2\varrho)\cdot\vartheta_3(z-\zeta, 2\varrho) = \vartheta_3(z)\vartheta_3(\zeta) + \vartheta(z)\vartheta(\zeta)\ .$$

Durch Sonderwerte leiten wir hieraus einige brauchbare Formeln ab. Setzen wir in 9) $\zeta = z$, so entsteht

$$13)\quad \vartheta(z)\vartheta_3(z) = \vartheta(0, 2\varrho)\vartheta(2z, 2\varrho)\ .$$

Aus 6) erhalten wir, wenn $\zeta = 0$, $2z$ für z, 2ϱ für ϱ gesetzt wird,

$$14)\quad \vartheta_1(z)\vartheta_2(z) = \vartheta(0, 2\varrho)\vartheta_1(2z, 2\varrho)\ .$$

Setzen wir in 7) und 3) $\zeta = z$, so folgt

$$15)\quad \vartheta(z)\vartheta_1(z) = \tfrac{1}{2}\vartheta_2(0, \tfrac{1}{2}\varrho)\vartheta_1(z, \tfrac{1}{2}\varrho)\ ,$$

$$16)\quad \vartheta_2(z)\vartheta_3(z) = \tfrac{1}{2}\vartheta_2(0, \tfrac{1}{2}\varrho)\vartheta_2(z, \tfrac{1}{2}\varrho)\ ,$$

von denen wir 15) bereits in Nr. 4 abgeleitet und benutzt haben. Aus den Gleichungen 5) und 8) folgt durch Multiplikation

$$\vartheta[\tfrac{1}{2}(z+\zeta), \tfrac{1}{2}\varrho]\cdot\vartheta[\tfrac{1}{2}(z-\zeta), \tfrac{1}{2}\varrho]\cdot\vartheta_3[\tfrac{1}{2}(z+\zeta), \tfrac{1}{2}\varrho]\cdot\vartheta_3[\tfrac{1}{2}(z-\zeta), \tfrac{1}{2}\varrho]$$
$$= \vartheta(z)^2\vartheta(\zeta)^2 - \vartheta_1(z)^2\vartheta_1(\zeta)^2\ .$$

Ersetzt man in 13) z durch $\frac{1}{2}(z+\zeta)$ und dann durch $\frac{1}{2}(z-\zeta)$, sowie ϱ durch $\frac{1}{2}\varrho$ und führt die Resultate in die soeben gewonnene Gleichung ein, so erhält man

$$17)\quad \vartheta(0)^2\cdot\frac{\vartheta(z+\zeta)\cdot\vartheta(z-\zeta)}{\vartheta(z)^2\vartheta(\zeta)^2} = 1 - f(z)^2\cdot f(\zeta)^2\ .$$

In 6) und 7) setzen wir $z+\zeta$ und $z-\zeta$ für z und ζ, und erhalten

$$18)\quad \vartheta_1(z, \tfrac{1}{2}\varrho)\vartheta_2(\zeta, \tfrac{1}{2}\varrho) = \vartheta_1(z+\zeta)\vartheta(z-\zeta) + \vartheta(z+\zeta)\vartheta_1(z-\zeta)\ ,$$

$$19)\quad \vartheta_2(z, \tfrac{1}{2}\varrho)\vartheta_1(\zeta, \tfrac{1}{2}\varrho) = \vartheta_1(z+\zeta)\vartheta(z-\zeta) - \vartheta(z+\zeta)\vartheta_1(z-\zeta)\ .$$

---

*) Die Herleitung des Summensatzes elliptischer Funktionen mit Hilfe der Thetafunktionen und weiteres über die Theorie der Thetafunktionen findet man in SCHELLBACH, Die Lehre von den elliptischen Integralen und Thetafunktionen, Berlin 1864.

Aus 15) und 16) ziehen wir

$$\tfrac{1}{4}\vartheta_1(0,\tfrac{1}{2}\varrho)^2\cdot\vartheta_1(z,\tfrac{1}{2}\varrho)\,\vartheta_2(\zeta,\tfrac{1}{2}\varrho)=\vartheta(z)\,\vartheta_1(z)\,\vartheta_2(\zeta)\,\vartheta_3(\zeta)\quad.$$

Da nun aus 16) folgt, wenn man z durch 0 ersetzt

$$\tfrac{1}{2}\vartheta_2(0,\tfrac{1}{2}\varrho)^2=\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\quad,$$

so geht 18) über in

20) $$2\,\vartheta(z)\,\vartheta_1(z)\,\vartheta_2(\zeta)\,\vartheta_3(\zeta)=\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,[\vartheta_1(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)+\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta_1(z-\zeta)]\,.$$

In gleicher Weise ergibt sich aus 19)

21) $$2\,\vartheta_2(z)\,\vartheta_3(z)\,\vartheta(\zeta)\,\vartheta_1(\zeta)=\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,[\vartheta_1(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)-\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta_1(z-\zeta)]\,.$$

Wir erhalten aus 20) zunächst

$$\vartheta(0)^2\,g(0)\,h(0)\,\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)\,[f(z+\zeta)+f(z-\zeta)]$$
$$=2\,\vartheta(z)^2\cdot\vartheta(\zeta)^2\cdot f(z)\,g(\zeta)\,h(\zeta)\quad.$$

Bezeichnen wir die rechte Seite von 17) durch $2\,T$, so folgt

22) $$g(0)\,h(0)\cdot T\cdot[f(z+\zeta)+f(z-\zeta)]=f(z)\,g(\zeta)\,h(\zeta)\quad.$$

Ebenso ergibt sich aus 21)

23) $$g(0)\,h(0)\,T\,[f(z+\zeta)-f(z-\zeta)]=f(\zeta)\,g(z)\,h(z)\quad.$$

Hieraus folgt schließlich durch Addition und Subtraktion, und indem wir für T wieder seinen Wert setzen

24) $$f(z\pm\zeta)=\frac{1}{g(0)\,h(0)}\cdot\frac{f(z)\,g(\zeta)\,h(\zeta)\pm f(\zeta)\,g(z)\,h(z)}{1-f(z)^2\,g(z)^2}\quad.$$

Beachten wir, daß

$$g(0)=\sqrt{\frac{k}{k'}}\,,\qquad h(0)=\frac{1}{\sqrt{k'}}\quad,$$

und setzen

$$f(z)=\sqrt{k}\cdot\sin\operatorname{am}\frac{2\,Kz}{\pi}\,,\qquad g(z)=\sqrt{\frac{k}{k'}}\cdot\cos\operatorname{am}\frac{2\,Kz}{\pi}\quad,$$

$$h(z)=\frac{1}{\sqrt{k'}}\,\Delta\operatorname{am}\frac{2\,Kz}{\pi}\quad,$$

so erkennen wir, daß 24) den **Summensatz für den Amplitudensinus** enthält.

8. Die Summensätze für $\cos\operatorname{am} w$ und $\Delta\operatorname{am} w$ ergeben sich in ähnlicher Weise. Ersetzen wir in Nr, 7, 9) und 10) z und ζ durch $z+\zeta$ und $z-\zeta$, so ergibt sich

$$2\,\vartheta(2\,z,\,2\,\varrho)\cdot\vartheta\,(2\,\zeta,\,2\,\varrho)=\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta_3(z-\zeta)+\vartheta_3(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)\quad,$$
$$2\,\vartheta_1(2\,z,\,2\,\varrho)\cdot\vartheta_1(2\,\zeta,\,2\,\varrho)=\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta_3(z-\zeta)-\vartheta_3(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)\quad.$$

Aus Nr. 7, 13) folgt

$$\vartheta(0,\,2\,\varrho)^2\cdot\vartheta(2z,\,2\,\varrho)\,\vartheta(2\,\zeta,\,2\,\varrho)=\vartheta(z)\,\vartheta_3(z)\,\vartheta(\zeta)\,\vartheta_3(\zeta)\quad.$$

Ferner folgt für $z=0$

$$\vartheta(0,\,2\,\varrho)^2=\vartheta(0)\,\vartheta_3(0)\quad.$$

Dies ergibt

1) $$2\,\vartheta(z)\,\vartheta_3(z)\,\vartheta(\zeta)\,\vartheta_3(\zeta)=\vartheta(0)\,\vartheta_3(0)\,[\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta_3(z-\zeta)+\vartheta_3(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)]\,.$$

Aus Nr. 7, 14) ergibt sich

$$\vartheta(0,\,2\,\varrho)^2\,\vartheta_1(2\,z,\,2\,\varrho)\,\vartheta_1(2\,\zeta,\,2\,\varrho)=\vartheta_1(z)\,\vartheta_2(z)\,\vartheta_1(\zeta)\,\vartheta_2(\zeta)\quad,$$

und hieraus folgt weiter

2) $$2\,\vartheta_1(z)\,\vartheta_2(z)\,\vartheta_1(\zeta)\,\vartheta_2(\zeta)=\vartheta(0)\,\vartheta_3(0)\,[\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta_3(z-\zeta)-\vartheta_3(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)]\,.$$

Aus 1) und 2) erhalten wir

$$2\,\vartheta(z)^2\,\vartheta(\zeta)^2 \cdot h(z)\,h(\zeta)$$
$$= \vartheta(0)^2 h(0) \cdot \vartheta(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)\,[h(z-\zeta) + h(z+\zeta)] \quad ,$$
$$2\,\vartheta(z)^2\,\vartheta(\zeta)^2 f(z)\,g(z)\,f(\zeta)\,h(\zeta)$$
$$= \vartheta(0)^2 h(0) \cdot \vartheta(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)\,[h(z-\zeta) - h(z+\zeta)] \quad .$$

In Rücksicht auf Nr. 7, 17) folgt hieraus

$$h(0)\,T[h(z-\zeta) + h(z+\zeta)] = h(z)\,h(\zeta) \quad ,$$
$$h(0)\,T[h(z-\zeta) - h(z+\zeta)] = f(z)\,g(z)\,f(\zeta)\,g(\zeta) \quad .$$

Hieraus ergibt sich schließlich

$$h(0)\,h(z \pm \zeta) = \frac{h(z)\,h(\zeta) \mp f(z)\,g(z)\,f(\zeta)\,h(\zeta)}{1 - f(z)^2 f(\zeta)^2} \quad ;$$

dies ist der Summensatz für die Funktion $\Delta\,\mathrm{am}\,w$.

Aus Nr. 7, 9) und 11) folgt durch Multiplikation

$$4\,\vartheta(z+\zeta,\,2\varrho)\,\vartheta_2(z+\zeta,\,2\varrho)\,\vartheta(z-\zeta,\,2\varrho)\,\vartheta_2(z-\zeta,\,2\varrho)$$
$$= \vartheta(z)\,\vartheta_3(z)\,[\vartheta_3(\zeta)^2 - \vartheta(\zeta)^2] + \vartheta(\zeta)\,\vartheta_3(\zeta)\,[\vartheta_3(z)^2 - \vartheta(z)^2] \quad .$$

Setzen wir in Nr. 7, 11) $z = \zeta$, so entsteht

$$2\,\vartheta_2(2z,\,2\varrho)\,\vartheta_2(0,\,2\varrho) = \vartheta_3(z)^2 - \vartheta_3(z)^2 \quad .$$

Benutzen wir dies und Nr. 7, 13), so erhalten wir, wenn wir schließlich 2ϱ, $2z$, 2ζ mit ϱ, $z+\zeta$, $z-\zeta$ vertauschen,

$$2\,\vartheta(z)\,\vartheta_2(z)\,\vartheta(\zeta)\,\vartheta_2(\zeta) = \vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,[\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta_2(z-\zeta) + \vartheta_2(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)] \quad .$$

Auf gleiche Weise gelangen wir von Nr. 7, 10) und 12) zu

$$2\,\vartheta_1(z)\,\vartheta_3(z)\,\vartheta_1(\zeta)\,\vartheta_3(\zeta) = \vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,[\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta_2(z-\zeta) - \vartheta_2(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)] \quad .$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir in Rücksicht auf Nr. 7, 17)

$$g(0)\,T[g(z-\zeta) + g(z+\zeta)] = g(z)\,g(\zeta) \quad ,$$
$$g(0)\,T[g(z-\zeta) - g(z+\zeta)] = f(z)\,h(z)\,f(\zeta)\,h(\zeta) \quad .$$

Hieraus folgt schließlich der Summensatz für die Funktion $\cos\mathrm{am}\,w$ in der Form

$$g(0)\,g(z \pm \zeta) = \frac{g(z)\,g(\zeta) \mp f(z)\,h(z)\,f(\zeta)\,h(\zeta)}{1 - f(z)^2 f(\zeta)^2} \quad .$$

§ 9. Entwicklung der elliptischen Funktionen in unendliche Produkte.

1. Eine Funktion $\varphi(z)$ sei eindeutig und stetig für alle Punkte im Innern einer Kurve c mit Ausschluß der Punkte $a_1, a_2, \ldots a_k$, in welcher φ unendlich sei.

Wir schließen die Punkte $a_1, \ldots a_k$ durch verschwindend kleine Kreise aus: alsdann bilden c und diese Kreise zusammen die vollständige Begrenzung einer Fläche, innerhalb deren φ eindeutig und endlich ist. Daher ist für jeden Punkt z im Innern dieser Fläche

$$1)\qquad 2\pi i \cdot \varphi(z) = \int_{(c)} \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt - \int_{(a_1)} \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt - \ldots - \int_{(a_k)} \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt \quad ,$$

wobei durch

$$\int_{(c)},\ \int_{(a_1)},\ \ldots \int_{(a_k)}$$

Integrale über c, bezw. über die Kreise um $a_1, a_2, \ldots a_k$ angedeutet sind, alle in positivem Sinne rücksichtlich der von ihnen umschlossenen Flächen.

Es sei $f(z)$ eine Funktion, die für alle Punkte innerhalb einer Kurve c eindeutig und endlich und von Null verschieden ist, mit Ausnahme der Punkte

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_k \quad ,$$

in denen sie Null, und der Punkte

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_l \quad ,$$

in denen sie unendlich groß sei. Alsdann wird $f'(z) : f(z) = d\,lf(z) : dz$ unendlich groß in den Punkten α und β; ersetzt man daher in 1) $\varphi(z)$ durch $f'(z) : f(z)$, so hat man

$$2)\qquad 2\pi i \frac{f'(z)}{f(z)} = \int\limits_{(c)} \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{dt}{t-z} - \sum_1^k{}_m \int\limits_{(\alpha_m)} \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{dt}{t-z} - \sum_1^l{}_n \int\limits_{(\beta_n)} \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{dt}{t-z} \quad .$$

Bekanntlich ist (§ 2, 13)

$$\int\limits_{(\alpha)} \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{dt}{t-z} = -\frac{1}{z-\alpha}\int\limits_{(\alpha)} \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt - \frac{1}{(z-\alpha)^2}\int\limits_{(\alpha)} \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot (t-\alpha)\,dt$$

$$-\frac{1}{(z-\alpha)^3}\int\limits_{(\alpha)} \frac{f'(t)}{f(t)} (t-\alpha)^2\,dt - \ldots$$

Wir wollen nun die Voraussetzung machen, daß $(z-\alpha_k) : f(z)$ für $z = \alpha_k$ endlich und von Null verschieden sei; da

$$\frac{f(z)}{z-\alpha} = \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} \quad ,$$

so ist

$$\lim_{(z=\alpha)} \frac{f(z)}{z-\alpha} = f'(\alpha) \quad .$$

Nun ist

$$\int\limits_{(\alpha)} \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = \int\limits_{(\alpha)} \frac{t-\alpha}{f(t)} \cdot \frac{f'(t)}{t-\alpha} \cdot dt \quad ;$$

gehen wir zur Grenze für einen verschwindend kleinen Kreis über, so wird für seinen Umfang $(t-\alpha) : f(t)$ konstant gleich $1 : f'(\alpha)$; ferner ist bekanntlich

$$\int\limits_{(\alpha)} \frac{f'(t)}{t-\alpha}\,dt = 2\pi i f'(\alpha) \quad ,$$

folglich ist

$$3)\qquad \int\limits_{(\alpha)} \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = 2\pi i \quad .$$

In dem Integrale

$$\int\limits_{(\alpha)} \frac{f'(t)}{f(t)} (t-\alpha)^p\,dt$$

setzen wir $t = \alpha + \varrho e^{i\varphi}$; hierdurch entsteht

$$\varrho^p \int\limits_{(\alpha)} e^{ip\varphi} \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt \quad .$$

Das hier vorkommende Integral enthält die Elemente des Integrals 3) mit einer endlichen Größe multipliziert, ist also mit 3) zugleich endlich; läßt man nun ϱ verschwinden, so folgt, daß

$$4) \qquad \int\limits_{(a)} \frac{f'(t)}{f(t)} (t-a)^p \, dt = 0 \quad ,$$

für jedes positive p.

Ferner ist

$$5) \qquad \begin{cases} \int\limits_{(\beta)} \frac{f'(t)}{f(t)} \frac{1}{t-z} dt = -\frac{1}{z-\beta} \int\limits_{(\beta)} \frac{f'(t)}{f(t)} dt - \frac{1}{(z-\beta)^2} \cdot \int\limits_{(\beta)} \frac{f'(t)}{f(t)} (t-\beta) \, dt \\ \qquad - \frac{1}{(z-\beta)^3} \int\limits_{(\beta)} \frac{f'(t)}{f(t)} (t-\beta)^2 \, dt - \ldots \end{cases}$$

Wir machen nun die zweite Voraussetzung, daß $f(z) \cdot (z-\beta_k)$ für $z=\beta_k$ bei jedem Werte von k eine endliche und von Null verschiedene Größe sei. Setzen wir

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} \quad ,$$

so ist also $(z-\beta_k) : g(z)$ für $z=\beta_k$ endlich und von Null verschieden; da nun

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{g'(z)}{g(z)} \quad ,$$

so ist

$$6) \qquad \int\limits_{(\beta)} \frac{f'(t)}{f(t)} dt = -\int\limits_{(\beta)} \frac{g'(t)}{g(t)} \cdot dt = -2\pi i \quad ,$$

und

$$7) \qquad \int\limits_{(\beta)} \frac{f'(t)}{f(t)} (t-\beta)^p \, dt = -\int\limits_{(\beta)} \frac{g'(t)}{g(t)} (t-\beta)^p \, dt = 0 \,, \qquad p > 0 \quad .$$

Aus 2) bis 7) folgt schließlich

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(c)} \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{dt}{t-z} + \frac{1}{z-a_1} + \frac{1}{z-a_2} + \ldots + \frac{1}{z-a_k}$$
$$- \frac{1}{z-\beta_1} - \frac{1}{z-\beta_2} - \ldots - \frac{1}{z-\beta_l} \quad .$$

Durch Integration folgt hieraus

$$l f(z) = \int U dz + l C \frac{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_k)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\ldots(z-\beta_l)} \quad ,$$

oder

$$8) \qquad f(z) = C \cdot e^{\int U dz} \cdot \frac{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_k)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\ldots(z-\beta_l)} \quad ,$$

wobei zur Abkürzung

$$U = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(c)} \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{dt}{t-z}$$

gesetzt worden ist.

Wenn nun die Anzahl der Punkte a und β unendlich groß ist und keine endliche Kurve alle diese Punkte einschließt, so kann man die Kurve c nach einem bestimmten, willkürlich gewählten Gesetze unendlich erweitern; von diesem

Gesetze wird dann im allgemeinen der Grenzwert abhängen, gegen den das Integral $\int U dz$ konvergiert; gleichzeitig hängt von diesem Gesetze auch die Anordnung ab, nach welcher neue Faktorengruppen in den Zähler und Nenner des Produktes 8) eintreten. Wir erkennen so die Möglichkeit, daß je nach der Wahl dieses Gesetzes verschiedene Entwicklungen derselben Funktion in Form eines unendlichen Produktes erhalten werden können, indem dabei die Art und Weise, nach welcher die Anzahl der Faktoren des Nenners zugleich mit denen des Zählers unendlich wächst, verschieden ist.

Die Konstante C kann aus Formel 8) entfernt werden mit Hilfe des Wertes, den die Funktion $f(z)$ für irgend einen bestimmten Wert der Veränderlichen $z = z_0$ annimmt. Man erhält

$$9)\quad f(z) = f(z_0)\cdot\frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_k)}{(z_0-\alpha_1)(z_0-\alpha_2)\dots(z_0-\alpha_k)}\cdot\frac{(z_0-\beta_1)(z_0-\beta_2)\dots(z_0-\beta_l)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\dots(z-\beta_l)}\cdot e^{\int_{z_0}^{z} U dz} .$$

2. Wir wenden diese Entwicklung zunächst auf die Funktion $f(z) = \sin z$ an. Der Sinus von z wird nur für ein unendlich großes imaginäres z unendlich, und verschwindet für

$$z = m\pi \quad ,$$

wobei m alle realen ganzen Zahlen zu durchlaufen hat.

Wir wählen zur Kurve c ein Rechteck, dessen Länge der realen Achse parallel ist, und das symmetrisch zu den Achsen liegt; die beiden zur realen Achse lotrechten Seiten legen wir durch Punkte, in denen $\sin z$ nicht verschwindet.

Die Seiten des Rechtecks nehmen wir unendlich fern an.

Für das Integral U haben wir

$$2\pi i\cdot U = \int_{(c)} \frac{\cos t}{\sin t}\cdot\frac{dt}{t-z} .$$

Für alle Punkte auf dem Umfange des Rechtecks ist t unendlich groß; daher kann in dem Integrale

$$t - z = t\left(1 - \frac{z}{t}\right)$$

durch t ersetzt werden. In je zwei Punkten des Umfangs, die auf einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden liegen, haben t, $\sin t$, dt entgegengesetzt gleiche Werte, $\cos t$ denselben Wert, mithin

$$\frac{\cos t}{\sin t}\cdot\frac{dt}{t}$$

entgegengesetzt gleiche Werte; folglich zerstören sich je zwei zu Gegenpunkten gehörige Bestandteile des Integrales U und es ist somit

$$U = 0 \quad .$$

Wir erhalten daher, indem wir die zu entgegengesetzten m gehörigen Faktoren vereinigen

$$\frac{\sin z}{\sin z_0} = \frac{z}{z_0}\cdot\frac{(z^2-\pi^2)(z^2-4\pi^2)(z^2-9\pi^2)\dots}{(z_0^2-\pi^2)(z_0^2-4\pi^2)(z_0^2-9\pi^2)\dots} .$$

Setzen wir $z_0 = 0$ und machen von dem Grenzwerte Gebrauch

$$\left(\frac{\sin z}{z}\right)_{z=0} = 1 \quad ,$$

so erhalten wir (vgl. Differentialrechnung § 17, Nr. 1)

$$1)\qquad \sin z = z\cdot\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\dots .$$

gültig für jedes endliche z. Diese Gleichung können wir durch folgende ersetzen:

$$2)\qquad \frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{\mu^2}\right) \quad ,$$

wobei das Zeichen $\prod\limits_1^\infty$ bedeutet, daß alle Faktoren der Form

$$1 - \frac{z^2}{\mu^2}$$

für $\mu = 1$ bis $\mu = \infty$ zu multiplizieren sind.

Wird unter

$$\prod_{-m}^{m} f(m)$$

das Produkt aller Faktoren $f(m) f(-m)$ für alle Werte $m = 1$ bis $m = \infty$ verstanden, so ist

$$\prod_{-m}^{m}\left(1 - \frac{z}{m+a}\right) = \prod_{-m}^{m} \frac{m+a-z}{m+a} = \prod_{-m}^{m} \frac{1 + \frac{a-z}{m}}{1 + \frac{a}{m}} \;.$$

Also folgt

$$3)\qquad \prod_{-m}^{m}\left(1 - \frac{z}{m+a}\right) = \frac{\sin \pi (a-z)}{\sin a\pi} \;.$$

3. Die Funktion sin am z wird Null für

$$z = 2mK + 2nK'i \quad ,$$

und wird unendlich groß für

$$z = 2mK + (2n+1)K'i \quad ,$$

daher ist die Funktion

$$\sin \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} z \begin{cases} = 0 \,, & \text{wenn} \quad z = m\pi + n\tau \quad , \\ = \infty \,, & \text{wenn} \quad z = m\pi + (n + \frac{1}{2})\tau \quad , \end{cases}$$

wobei

$$\tau = i \cdot \frac{\pi K'}{K} \quad .$$

Die Voraussetzungen für Nr. 1 sind hier erfüllt; denn es ist

$$\lim_{z=0} \frac{z}{\sin \operatorname{am} \frac{2Kz}{\pi}} = \lim_{z=0} \frac{z - m\pi - n\tau}{\sin \operatorname{am} z} = \pm \lim \frac{z - m\pi - n\tau}{\sin \operatorname{am}(z - m\pi - n\tau)} = \pm \frac{\pi}{2K} \;.$$

Ferner ist

$$\lim_{z=iK'} (z - iK') \sin \operatorname{am} z = \lim_{\zeta=0} \zeta \sin \operatorname{am}(\zeta + iK') = \lim_{\zeta=0} \frac{\zeta}{k \sin \operatorname{am} \zeta} = \frac{1}{k} \;.$$

Da nun

$$z - \frac{\tau}{2} = \frac{\pi}{2K}\left(\frac{2K}{\pi} z - K'i\right) \quad ,$$

so folgt zunächst, daß

$$\lim_{z=\frac{\tau}{2}} \left(z - \frac{\tau}{2}\right) \sin \operatorname{am} \frac{2Kz}{\pi} = \frac{\pi}{2kK} \;.$$

Da ferner

$$\sin\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi} = \pm \sin\frac{2K}{\pi}[z - m\pi - (n + \tfrac{1}{2})\tau] \quad ,$$

so folgt

$$\lim_{z=\beta}(z - \beta) \cdot \sin\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi} = \pm \frac{\pi}{2kK} \quad ,$$

wobei $m\pi + (n + \frac{1}{2})\tau$ durch β bezeichnet worden ist.

Als Kurve c wählen wir ein Rechteck mit unendlich fernen Seiten, das zu den Achsen symmetrisch liegt, und dessen Umfang keinen Punkt enthält, in welchem $\sin\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}z$ verschwindet, oder unendlich groß ist. Alsdann ist

$$\sin\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}z = Cz \cdot \frac{\prod\limits_{-m}^{m}\prod\limits_{-n}^{n}(z - m\pi - n\tau)}{\prod\limits_{-m}^{m}\prod\limits_{-n-1}^{n}(z - m\pi - [n + \frac{1}{2}]\tau)} \cdot E \quad ,$$

wobei E die als Faktor auftretende Exponentialgröße bezeichnet. Hierbei ist noch zu bemerken, daß im Zähler m und n nicht gleichzeitig Null sein dürfen; der hierzugehörige Faktor z ist vorausgeschickt worden. Ferner soll mit

$$\prod_{-n-1}^{n}$$

das Produkt bezeichnet werden, das entsteht, wenn man jedem Faktor mit dem positiven Werte n den Faktor zuordnet, in welchem n durch $-n-1$ ersetzt ist.

Setzen wir, um C zu entfernen, $z = 0$, so erhalten wir

$$1) \qquad \sin\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}z = \frac{2K}{\pi}z \cdot \frac{\prod\prod\left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right)}{\prod\prod\left(1 - \frac{z}{m\pi + (n + \frac{1}{2})\tau}\right)} \cdot E \quad .$$

Das in E vorkommende Integral

$$U = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\cos\operatorname{am}\frac{2Kt}{\pi}}{\sin\operatorname{am}\frac{2Kt}{\pi}} \cdot \frac{dt}{t - z} \quad ;$$

erledigt sich ebenso, wie das entsprechende Integral bei der Entwicklung von $\sin z$.

Für jedes endliche z kann $1 : (t - z)$ in allen Punkten des unendlich fernen Rechtecks c durch $1 : t$ ersetzt werden. In Gegenpunkten des Rechtecks hat $\cos\operatorname{am}\frac{2Kt}{\pi}$ denselben Wert, $\sin\operatorname{am}\frac{2Kt}{\pi}$, t und dt haben entgegengesetzt gleiche Werte; es zerstören sich mithin die zu je zwei Gegenpunkten gehörigen Teile des Integrals U: daher ist $U = 0$ und $E = 1$.

Hieraus folgt

$$2) \qquad \sin\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}z = \frac{2K}{\pi}z \cdot \frac{\prod\limits_{-m}^{m}\prod\limits_{-n}^{n}\left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right)}{\prod\limits_{-m}^{m}\prod\limits_{-n-1}^{n}\left(1 - \frac{z}{m\pi + (n + \frac{1}{2})\tau}\right)} \quad ,$$

16*

wobei m und n alle ganzen Zahlen von 0 bis ∞ anzunehmen haben, mit der Beschränkung, daß im Zähler m und n nicht zugleich Null sein dürfen. Vorläufig ist dabei noch die aus der Herleitung fließende Bedingung zu beachten, daß man im Zähler und Nenner immer bis zu denselben Werten von m und n zu gehen hat.

4. Wir werden nun nachweisen, daß die unendlichen Produkte im Zähler und im Nenner einzeln gültig sind; damit wird die soeben hervorgehobene Beschränkung gegenstandslos, denn der Grenzwert des Quotienten der unendlichen Produkte ist dann unabhängig davon, wie man im Zähler und Nenner m und n unendlich wachsen läßt, und ist einfach gleich dem Quotienten aus dem Grenzwerte des Zählers und dem Grenzwerte des Nenners. Wir setzen

$$\frac{2K}{\pi}z\cdot\prod_{-m}^{m}\prod_{-n}^{n}\left(1-\frac{z}{m\pi+n\tau}\right)=\Theta_1(z) \quad ,$$

$$\prod_{-m}^{m}\prod_{-n-1}^{n}\left(1-\frac{z}{m\pi+(n+\frac{1}{2})\tau}\right)=\Theta(z)$$

und untersuchen diese beiden Funktionen. Bilden wir in $\Theta_1(z)$ das Produkt aller Faktoren, für die n einen gegebenen von Null verschiedenen Wert hat, so erhalten wir nach Nr. 2, 3)

$$\prod_{-m}^{m}\left(1-\frac{z}{m\pi+n\tau}\right)=\frac{\sin(n\tau-z)}{\sin n\tau} \quad ;$$

die Faktoren, für die $n=0$ ist, geben

$$\prod_{-m}^{m}\left(1-\frac{z}{m\pi}\right)=\frac{\sin z}{z} \quad ;$$

daher ist

$$\Theta_1(z)=\frac{2K}{\pi}\cdot\sin z\cdot\prod_{-n}^{n}\frac{\sin(n\tau-z)}{\sin n\tau} \quad .$$

Nach der gleichmäßig für reale und komplexe Bogen gültigen Gleichung

$$\sin\alpha\sin\beta=\tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

ist

$$1)\qquad \sin(n\tau-z)\cdot\sin(-n\tau-z)=\tfrac{1}{2}(\cos 2n\tau-\cos 2z) \quad .$$

Benutzt man

$$2)\qquad \begin{cases}\cos 2n\tau=\frac{1}{2}(e^{2in\tau}+e^{-2in\tau}) \quad , \\ \sin n\tau\cdot\sin(-n\tau)=\frac{1}{4}(1-e^{2in\tau})^2e^{-2in\tau} \quad ,\end{cases}$$

und setzt $e^{i\tau}=e^{-\frac{\pi K'}{K}}=q$, so erhält man

$$3)\qquad \Theta_1(z)=\frac{2K}{\pi}\sin z\cdot\prod_{1}^{\infty}\frac{1-2q^{2n}\cos 2z+q^{4n}}{(1-q^{2n})^2} \quad ,$$

$$=\frac{2K}{\pi}\sin z\cdot\frac{(1-2q^2\cos 2z+q^4)(1-2q^4\cos 2z+q^8)(1-2q^6\cos 2z+q^{12})\dots}{(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\dots} \quad .$$

Da q ein echter Bruch ist, so konvergiert der Nenner

$$(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\dots$$

Das unendliche Produkt im Zähler ist von der Form

$$(1 + z_1)(1 + z_2)(1 + z_3)\ldots \quad ;$$

dasselbe ist bekanntlich gültig, wenn die Reihe

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots$$

gilt, und diese gilt mit der Reihe

$$\operatorname{mod} z_1 + \operatorname{mod} z_2 + \operatorname{mod} z_3 + \ldots$$

Es kommt daher in unserem Falle auf die Reihe der Moduln an

$$\operatorname{mod}(q^{4n} - 2q^{2n}\cos 2z) = q^{2n}\operatorname{mod}(q^{2n} - 2\cos 2z) \quad .$$

Der Quotient zweier benachbarten Glieder der Reihe dieser Moduln ist

$$q^2 \cdot \operatorname{mod}\frac{q^{2n+2} - 2\cos 2z}{q^{2n} - 2\cos 2z} \quad .$$

Wächst n unbegrenzt, so nähert sich diese Zahl dem Grenzwerte q^2; da nun $q^2 < 1$, so folgt, daß die Reihe der Moduln und mithin auch das unendliche Produkt im Zähler gilt.

Hiermit ist die Gültigkeit von $\Theta_1(z)$ für jedes endliche z bewiesen.

In dem unendlichen Produkte $\Theta(z)$ nehmen wir ebenfalls alle Faktoren zusammen, die zu einem gegebenen n gehören; ihr Produkt ist

$$\prod_{-m}^{m}\left[1 - \frac{z}{m\pi + (n+\frac{1}{2})\tau}\right] = \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})\tau - z]}{\sin(n+\frac{1}{2})\tau} \quad .$$

Daher ist

$$\Theta(z) = \prod_{-n-1}^{n}\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})\tau - z]}{\sin(n+\frac{1}{2})\tau} \quad .$$

Das Produkt zweier zusammengehörigen Faktoren ist

$$\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})\tau - z]\sin[(-n-\frac{1}{2})\tau - z]}{\sin(n+\frac{1}{2})\tau\sin(-n-\frac{1}{2})\tau} \quad .$$

Die goniometrischen Formeln 1) und 2) liefern hierfür

$$\frac{1 - 2q^{2n+1}\cos 2z + q^{4n+2}}{(1-q^{2n+1})^2} \quad .$$

Folglich ist

$$4)\qquad \Theta(z) = \frac{(1-2q\cos 2z + q^2)(1-2q^3\cos 2z + q^6)(1-2q^5\cos 2z + q^{10})\ldots}{(1-q)^2(1-q^3)^2(1-q^5)^2\ldots} \quad .$$

Die Gültigkeit des Nenners erhellt ohne weiteres; die des Zählers hängt von der Gültigkeit der Modulreihe ab, deren allgemeines Glied ist

$$q^{2n+1}\operatorname{mod}(q^{2n+1} - 2\cos 2z) \quad .$$

Der Quotient zweier benachbarter Glieder

$$q^2\operatorname{mod}\frac{q^{2n+3} - 2\cos 2z}{q^{2n+1} - 2\cos 2z}$$

hat den Grenzwert q^2, folglich ist $\Theta_1(z)$ gültig.

Daher gilt für jedes endliche z die Entwicklung

$$5)\left\{\begin{aligned}&\sin\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}z\\&=\frac{2K}{\pi}\sin z\cdot\frac{(1-2q^2\cos 2z+q^4)(1-2q^4\cos 2z+q^8)(1-2q^6\cos 2z+q^{12})\ldots}{(1-2q\cos 2z+q^2)(1-2q^3\cos 2z+q^6)(1-2q^5\cos 2z+q^{10})\ldots}\\&\cdot\frac{(1-q)^2(1-q^3)^2(1-q^5)^2\ldots}{(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\ldots}\;.\end{aligned}\right.$$

5. Zwischen den beiden Funktionen $\Theta(z)$ und $\Theta_1(z)$ findet ein einfacher Zusammenhang statt, den wir zunächst aufdecken wollen. Es ist

$$\Theta\left(z+\frac{\tau}{2}\right)=\prod_{-m}^{m}\prod_{-n-1}^{n}\left[1-\frac{z+\frac{1}{2}\tau}{m\pi+(n+\frac{1}{2})\tau}\right]\;.$$

Wir wollen die Kombination $m=0$, $n=0$ ausschließen; den zugehörigen Faktor $-2z:\tau$ müssen wir dann voranstellen und haben

$$1)\qquad \Theta\left(z+\frac{\tau}{2}\right)=-\frac{2z}{\tau}\prod_{-m}^{m}\prod_{-n-1}^{n}\left[1-\frac{z+\frac{1}{2}\tau}{m\pi+(n+\frac{1}{2})\tau}\right]\;.$$

Da nun

$$1-\frac{z+\frac{1}{2}\tau}{m\pi+(n+\frac{1}{2})\tau}=\frac{m\pi+n\tau-z}{m\pi+(n+\frac{1}{2})\tau}=\left(1-\frac{z}{m\pi+n\tau}\right):\left(1+\frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi+n\tau}\right)\;,$$

so ist

$$2)\quad \Theta\left(z+\frac{\tau}{2}\right)=-\frac{2z}{\tau}\prod_{-m}^{m}\prod_{-n-1}^{n}\left(1-\frac{z}{m\pi+n\tau}\right):\prod_{-m}^{m}\prod_{-n-1}^{n}\left(1+\frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi+n\tau}\right)\;.$$

In dem für ein gegebenes von Null verschiedenes m gebildeten Produkte

$$\prod_{-n-1}^{n}\left(1-\frac{z}{m\pi+n\tau}\right)$$

hat n die Werte anzunehmen

$$\left|\;\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\;;\;\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\;;\;\begin{matrix}2\\-3\end{matrix}\;;\;\begin{matrix}3\\-4\end{matrix}\;;\;\begin{matrix}\ldots\\\ldots\end{matrix}\right.$$

während für das Produkt

$$\prod_{-n}^{n}\left(1-\frac{z}{m\pi+n\tau}\right)$$

die Werte für n sind

$$\left|\;0\;;\;\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\;;\;\begin{matrix}2\\-2\end{matrix}\;;\;\begin{matrix}3\\-3\end{matrix}\;;\;\begin{matrix}\ldots\\\ldots\end{matrix}\right.$$

Hieraus folgt

$$3)\left\{\begin{aligned}&\prod_{-n-1}^{n}\left(1-\frac{z}{m\pi+n\tau}\right)=\prod_{-n}^{n}\left(1-\frac{z}{m\pi+n\tau}\right)\cdot\lim_{n=\infty}\left(1-\frac{z}{m\pi-n\tau}\right)\;,\\&\prod_{-n-1}^{n}\left(1+\frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi+n\tau}\right)=\prod_{-n}^{n}\left(1+\frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi+n\tau}\right)\cdot\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi-n\tau}\right)\;.\end{aligned}\right.$$

Ist $m = 0$, so ändern sich die Wertsysteme für n nur insofern, als die Werte 0 in beiden wegfallen; die Gleichungen 3) gelten also auch für diesen Fall. Aus 3) folgt weiter

$$4) \begin{cases} \prod_{-m}^{m}\prod_{-n-1}^{n}\left(1-\frac{z}{m\pi+n\tau}\right)=\prod_{-m}^{m}\prod_{-n}^{n}\left(1-\frac{z}{m\pi+n\tau}\right)\cdot\lim_{n=\infty}\prod_{-m}^{m}\left(1-\frac{z}{m\pi-n\tau}\right), \\ \prod_{-m}^{m}\prod_{-n-1}^{n}\left(1+\frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi+n\tau}\right)=\prod_{-m}^{m}\prod_{-n}^{n}\left(1+\frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi+n\tau}\right)\cdot\lim_{n=\infty}\prod_{-m}^{m}\left(1+\frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi-n\tau}\right). \end{cases}$$

Nach Nr. 2, 3) ist

$$\prod_{-m}^{m}\left(1-\frac{z}{m\pi-n\tau}\right)=\frac{\sin(z+n\tau)}{\sin n\tau}=\frac{e^{i(z+n\tau)}-e^{-i(z+n\tau)}}{e^{in\tau}-e^{-in\tau}},$$

$$=\frac{e^{iz}\cdot e^{2in\tau}-e^{-iz}}{e^{2in\tau}-1}.$$

Da $i\tau$ eine negative Zahl, nämlich $-\pi K' : K$, ist, so folgt

$$\lim_{n=\infty}\prod_{-m}^{m}\left(1-\frac{z}{m\pi-n\tau}\right)=e^{-iz};$$

ebenso ist

$$\lim_{n=\infty}\prod_{-m}^{m}\left(1+\frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi-n\tau}\right)=e^{\frac{1}{2}i\tau}.$$

Hieraus ergibt sich schließlich

$$5)\qquad \Theta\left(z+\frac{\tau}{2}\right)=\frac{\Theta_1(z)}{\Theta_1(-\frac{1}{2}\tau)}\cdot e^{-i(z+\frac{1}{2}\tau)}.$$

Ersetzt man hier z durch $(z-\frac{1}{2}\tau)$, so erhält man

$$6)\qquad \Theta(z)=\frac{e^{-iz}}{\Theta_1(-\frac{1}{2}\tau)}\cdot\Theta_1(z-\tfrac{1}{2}\tau).$$

Die Funktion $\Theta_1(z)$ geht also bis auf einen bestimmten Faktor in $\Theta(z)$ über, wenn man z durch $(z-\frac{1}{2}\tau)$ ersetzt.

Ersetzt man z durch $-z$ und beachtet, daß

$$\Theta(-z)=\Theta(z),\quad \Theta_1(-z)=-\Theta_1(z),$$

so entsteht aus 5) und 6)

$$7)\qquad \Theta(z-\tfrac{1}{2}\tau)=\frac{e^{i(z-\frac{1}{2}\tau)}}{\Theta_1(\frac{1}{2}\tau)}\cdot\Theta_1(z),$$

$$8)\qquad \Theta(z)=\frac{e^{iz}}{\Theta_1(\frac{1}{2}\tau)}\cdot\Theta_1(z+\tfrac{1}{2}\tau).$$

Ersetzt man in 6) z durch $z+\tau$ und benutzt 8), so entsteht

$$9)\qquad \Theta(z+\tau)=-e^{-i(2z+\tau)}\Theta(z).$$

6. Die Funktion $\Theta(z)$ ist periodisch und hat die Periode π, sie ist ferner endlich für jedes endliche z: hieraus folgt, daß sich $\Theta(z)$ in eine Fouriersche Reihe entwickeln läßt, die für jedes endliche z gilt, und die Form hat

$$\Theta(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}A_n\cdot e^{n\cdot 2iz}.$$

Ebenso, wie die Entwicklung einer Funktion nach steigenden und fallenden Potenzen der Veränderlichen nur in einer Weise möglich ist, kann auch die damit engstens zusammenhängende Entwicklung in einer FOURIERschen Reihe nur in einer Weise existieren. Wenn daher zwei Entwicklungen derselben Funktion vorliegen

$$f(z) = \Sigma A_n e^{n \cdot 2iz} = \Sigma B_n e^{n \cdot 2iz} \quad ,$$

so folgt

$$A_n = B_n$$

für jeden Wert von n.

Mit Hilfe dieser Bemerkung und der Funktionalgleichung Nr. 5, 9) sind wir imstande, die Koeffizienten A_n zu bestimmen, bis auf einen konstanten allen gemeinsamen Faktor. Ersetzen wir in der Gleichung

$$\Theta(z) = \Sigma A_n e^{n \cdot 2iz}$$

die Veränderliche z durch $z + \tau$, so entsteht

$$\Theta(z + \tau) = \Sigma A_n e^{n \cdot 2i\tau} \cdot e^{n \cdot 2iz} \quad .$$

Ferner folgt aus Nr. 5, 9)

$$\Theta(z + \tau) = \Sigma(-A_n) \cdot e^{-i\tau} \cdot e^{(n-1) \cdot 2iz} \quad .$$

Vergleichen wir in beiden Entwicklungen die Koeffizienten von $e^{n \cdot 2iz}$, so folgt

$$A_n e^{n \cdot 2i\tau} = -A_{n+1} e^{-i\tau} \quad ,$$

oder

$$A_n e^{-n^2 \cdot i\tau} = -A_{n+1} \cdot e^{-(n+1)^2 \cdot i\tau} \quad ;$$

dies ergibt

$$A_n e^{-n^2 \cdot i\tau} = (-1)^n A \quad ,$$

wobei A eine noch zu bestimmende Konstante bezeichnet.

Wir haben somit den Satz: Jede eindeutige Funktion, die die reale Periode π hat, der Funktionalgleichung genügt

$$f(z + \tau) = -e^{i(2z+\tau)} f(z) \quad ,$$

und für jedes endliche z endlich ist, gibt die FOURIERsche Entwicklung

$$A \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{n^2 \cdot i\tau + 2n \cdot iz} \quad ,$$

wo alles bis auf A völlig bestimmt ist; jede solche Funktion ist daher von $\Theta(z)$ nur durch einen konstanten Faktor verschieden.

7. Setzen wir $-i\tau = \varrho$, also $\tau = i\varrho$, und vertauschen n mit $-n$, so erhalten wir sofort die Beziehung

$$1) \qquad \Theta(z) = A \cdot \vartheta(z) \quad ,$$

diese Gleichung lehrt, die grundlegende Thetafunktion $\vartheta(z)$ in ein unendliches Produkt zu verwandeln; die Verwandlung ist bis auf einen Zahlenfaktor A geleistet, der noch bestimmt werden muß. Der besondere Fall $z = 0$, lehrt

$$\Theta(0) = A \cdot \vartheta(0) \quad .$$

Da nun $\Theta(0) = 1$, so folgt

$$2) \qquad \Theta(z) = \frac{1}{\vartheta(0)} \cdot \vartheta(z) \quad .$$

Nach Nr. 5, 5) ist

$$\Theta(z + \tfrac{1}{2} i\varrho) = \frac{e^{-i(z+\frac{1}{4}i\varrho)}}{\Theta_1(-\frac{1}{2} i\varrho)} \Theta_1(z) \quad ;$$

da nun bekanntlich

$$\vartheta(z + \tfrac{1}{2} i \varrho) = i \cdot e^{\frac{1}{4}\varrho - iz} \vartheta_1(z) \quad ,$$

so folgt

3) $$\Theta_1(z) = i\, e^{-\frac{1}{4}\varrho} \cdot \frac{\Theta_1(-\frac{1}{2} i \varrho)}{\vartheta(0)} \vartheta_1(z) \quad .$$

Setzen wir in dem Quotienten

$$\frac{\Theta_1(z)}{\vartheta_1(z)} = \frac{2Kz}{\pi} \cdot \frac{\prod\prod\left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right)}{\vartheta_1(z)}$$

$$= \frac{2K}{\pi} \cdot \prod\prod\left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right) : \frac{\vartheta_1(z)}{z}$$

$z = 0$, so erhalten wir

4) $$\lim \frac{\Theta_1(z)}{\vartheta_1(z)} = \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{1}{\vartheta_1'(0)} \quad .$$

Da nun nach 3) das Verhältnis $\Theta_1(z) : \vartheta_1(z)$ konstant ist, so folgt schließlich

5) $$\Theta_1(z) = \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{1}{\vartheta_1'(0)} \cdot \vartheta_1(z) \quad .$$

Hierdurch ist die Funktion $\vartheta_1(z)$ durch das unendliche Produkt $\Theta_1(z)$ ausgedrückt.

Wir wollen noch zeigen, wie $\vartheta(0)$ durch ein unendliches Produkt ausgedrückt werden kann. Nach 2) ist

$$\frac{(1 - 2q\cos 2z + q^2)(1 - 2q^3\cos 2z + q^6)(1 - 2q^5\cos 2z + q^{10}) \ldots}{(1 - q)^2(1 - q^3)^2(1 - q^5)^2 \ldots} = \frac{1}{\vartheta(0)} \vartheta(z) \, .$$

Wir setzen

6) $$\frac{1}{\vartheta(0)} \cdot (1 - q)^2(1 - q^3)^2(1 - q^5)^2 \ldots = R(q) \quad ,$$

und haben somit

$$(1 - 2q\cos 2z + q^2)(1 - 2q^3\cos 2z + q^6) \ldots$$
$$= R(q)(1 - 2q\cos 2z + 2q^4\cos 4z - 2q^9\cos 6z + \ldots) \quad .$$

Ersetzen wir hier z durch $\frac{1}{2}\pi$, so entsteht

7) $$R(q) = \frac{1}{\vartheta_3(0)}(1 + q)^2(1 + q^3)^2(1 + q^5)^2 \ldots$$

Aus 6) und 7) folgt durch Multiplikation

8) $$R(q)^2 = \frac{1}{\vartheta(0)\,\vartheta_3(0)} \cdot (1 - q^2)^2(1 - q^6)^2(1 - q^{10})^2 \ldots$$

Setzen wir in 6) q^2 statt q, also 2ϱ statt ϱ, so erhalten wir

9) $$R(q^2) = \frac{1}{\vartheta(0,\, 2\varrho)}(1 - q^2)^2(1 - q^6)^2(1 - q^{10})^2 \ldots$$

Nun ist nach § 8, Nr. 7, 13) für $z = 0$

$$\vartheta(0,\, 2\varrho)^2 = \vartheta(0)\,\vartheta_3(0) \quad ,$$

mithin

10) $$R(q^2)^2 = \frac{1}{\vartheta(0)\,\vartheta_3(0)}(1 - q^2)^4(1 - q^6)^4(1 - q^{10})^4 \ldots$$

Durch Division folgt aus 8) und 10)

$$\left[\frac{R(q)}{R(q^2)}\right]^2 = \frac{1}{(1-q^2)^2(1-q^6)^2(1-q^{10})^2\ldots} \quad ,$$

$$\frac{R(q)}{R(q^2)} = \frac{1}{(1-q^2)(1-q^6)(1-q^{10})\ldots} \quad .$$

Hierfür schreiben wir

$$11) \qquad \frac{R(q)}{R(q^2)} = \frac{(1-q^4)(1-q^8)(1-q^{12})(1-q^{16})\ldots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)(1-q^{10})\ldots} \quad .$$

Ersetzen wir hier der Reihe nach q durch q^2, q^4, q^8, q^{16}, ... multiplizieren alle Resultate und bemerken, daß nach 6)

$$\lim_{n=\infty} R(q^n) = 1 \quad ,$$

und daß

$$\lim_{n=\infty}(1-q^{1\cdot 2n})(1-q^{2\cdot 2n})(1-q^{3\cdot 2n})(1-q^{4\cdot 2n})\ldots = 1 \quad ,$$

so erhalten wir aus 11)

$$12) \qquad R(q) = \frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\ldots} \quad .$$

Hieraus ergibt sich nach 6)

$$13) \qquad \vartheta(0) = (1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots$$

Benutzt man die Identität

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots = \frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots}$$

$$= \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots} \quad ,$$

so kann man statt 13) auch schreiben

$$14) \qquad \vartheta(0) = \frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots} \quad .$$

8. Vergleichen wir die beiden Entwicklungen

$$1) \qquad \sin\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}z = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)} \quad ,$$

und

$$\sin\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}z = \frac{\Theta_1(z)}{\Theta(z)} \quad ,$$

d. i. nach Nr. 7, 2) und 5)

$$= \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\vartheta(0)}{\vartheta_1'(0)}\cdot\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)} \quad ,$$

so folgt die Gleichung

$$2) \qquad \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\vartheta(0)}{\vartheta_1'(0)} \quad ,$$

die auch aus 1) für $z=0$ hervorgeht.

Aus Nr. 7, 3) und 5) folgt

$$3) \qquad \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{1}{\vartheta_1'(0)} = i\cdot q^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{\Theta_1(-\frac{1}{2}i\varrho)}{\vartheta(0)} \quad .$$

Der besondere Wert $\Theta_1(-\frac{1}{2}i\varrho)$ ergibt sich aus $\Theta_1(z)$ wie folgt. Es ist

$$\cos(-i\varrho) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi K'}{K}} + e^{-\frac{\pi K'}{K}}\right) = \frac{1}{2}(q^{-1} + q) \quad ,$$

$$\sin(-\tfrac{1}{2}i\varrho) = \frac{1}{2i}\left(q^{-\frac{1}{2}} - q^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2i}q^{-\frac{1}{2}}(1-q) \quad ,$$

folglich ist

$$\begin{aligned} 1 - 2q^{2n}\cos 2z + q^{4n} &= 1 - q^{2n-1} - q^{2n+1} + q^{4n} \\ &= (1-q^{2n-1})(1-q^{2n+1}) \quad . \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich (Nr. 4, 1))

$$\begin{aligned} i\cdot q^{\frac{1}{4}}\cdot\Theta_1\left(-\frac{i\varrho}{2}\right) &= \frac{K}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{q}}\cdot(1-q)\cdot\frac{(1-q)(1-q^3)\cdot(1-q^3)(1-q^5)\dots}{(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\dots} \\ &= \frac{K}{\pi\sqrt[4]{q}}\cdot\frac{(1-q)^2(1-q^3)^2(1-q^5)^2\dots}{(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\dots} \quad . \end{aligned}$$

Daher ist nach 3)

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\vartheta(0)}{\vartheta'(0)} = \frac{K}{\pi\sqrt[4]{q}}\cdot\frac{(1-q)^2(1-q^3)^2(1-q^5)^2\dots}{(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\dots} \quad ,$$

und nach 2)

$$4)\qquad \frac{K\sqrt{k}}{\pi} = \sqrt[4]{q}\cdot\frac{(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\dots}{(1-q)^2(1-q^3)^2(1-q^5)^2\dots} \quad .$$

Dies führen wir in Nr. 4, 2) ein und erhalten

$$5)\qquad \sin\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}z = \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\cdot\sin z\cdot\frac{(1-2q^2\cos 2z+q^4)(1-2q^4\cos 2z+q^8)\dots}{(1-2q\cos 2z+q^2)(1-2q^3\cos 2z+q^6)\dots} \quad .$$

9. Um auch für die Funktionen

$$\cos\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}z \quad\text{und}\quad \Delta\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}z$$

unendliche Produkte zu erhalten, ersetzen wir zunächst in Nr. 7, 5) die Veränderliche z durch $\frac{1}{2}\pi - z$. Hierdurch erhalten wir, wenn wir Nr. 8, 2) berücksichtigen

$$1)\qquad \Theta_1\left(\frac{\pi}{2}-z\right) = \frac{1}{\vartheta(0)\sqrt{k}}\cdot\vartheta_1\left(\frac{\pi}{2}-z\right) = \frac{1}{\vartheta(0)\sqrt{k}}\vartheta_2(z) \quad ;$$

in Verbindung mit Nr. 7, 2)

$$\Theta(z) = \frac{1}{\vartheta(0)}\vartheta(z) \quad ,$$

und

$$\cos\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}z = \sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta(z)}$$

liefert 1)

$$\cos\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}z = \sqrt{k'}\cdot\frac{\Theta_1(\frac{1}{2}\pi - z)}{\Theta(z)}$$

$$= \frac{2K\sqrt{k'}}{\pi}\cdot\cos z\cdot\frac{(1+2q^2\cos 2z+q^4)(1+2q^4\cos 2z+q^8)\dots}{(1-2q\cos 2z+q^2)(1-2q^3\cos 2z+q^6)\dots}\cdot\frac{(1-q)^2(1-q^3)^2(1-q^5)^2\dots}{(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\dots} \quad .$$

Benutzt man Nr. 8, 4), so erhält man einfacher

$$2)\qquad \cos\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}z = 2\sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\sqrt[4]{q}\cdot\cos z\cdot\frac{(1+2q^2\cos 2z+q^4)(1+2q^4\cos 2z+q^8)\dots}{(1-2q\cos 2z+q^2)(1-2q^3\cos 2z+q^6)\dots} \quad .$$

Wir ersetzen ferner in Nr. 7, 2) z durch $\frac{1}{2}\pi - z$ und erhalten

$$\Theta\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \frac{1}{\vartheta(0)}\vartheta\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \frac{1}{\vartheta(0)}\cdot\vartheta_3(z) \quad .$$

In Verbindung mit Nr. 7, 2) und

$$\Delta\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}z = \sqrt{k'}\cdot\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta(z)}$$

liefert dies

$$3)\quad \begin{cases} \Delta\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}z = \sqrt{k'}\cdot\frac{\Theta(\frac{1}{2}\pi - z)}{\Theta(z)} \\ = \sqrt{k'}\cdot\frac{(1+2q\cos 2z+q^2)(1+2q^3\cos 2z+q^6)(1+2q^5\cos 2z+q^{10})\dots}{(1-2q\cos 2z+q^2)(1-2q^3\cos 2z+q^6)(1-2q^5\cos 2z+q^{10})\dots} \quad . \end{cases}$$

Die Gleichungen 2) und 3) ergeben für $z = 0$

$$4)\qquad \sqrt{\frac{k}{k'}} = 2\sqrt[4]{q}\cdot\frac{(1+q^2)^2(1+q^4)^2(1+q^6)^2\dots}{(1-q)^2(1-q^3)^2(1-q^5)^2\dots} \quad ,$$

$$5)\qquad \sqrt{k'} = \frac{(1-q)^2(1-q^3)^2(1-q^5)^2\dots}{(1+q)^2(1+q^3)^2(1+q^5)^2\dots} \quad .$$

Aus 4) und 5) folgt

$$6)\qquad \sqrt{k} = 2\sqrt[4]{q}\cdot\frac{(1+q^2)^2(1+q^4)^2(1+q^6)^2\dots}{(1+q)^2(1+q^3)^2(1+q^5)^2\dots} \quad ,$$

$$7)\qquad \frac{2K\sqrt{k'}}{\pi} = \frac{(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\dots}{(1+q^2)^2(1+q^4)^2(1+q^6)^2\dots} \quad ,$$

$$8)\qquad \frac{2K}{\pi} = \frac{(1+q)^2(1-q^2)^2(1+q^3)^2(1-q^4)^2\dots}{(1-q)^2(1+q^2)^2(1-q^3)^2(1+q^4)^2\dots}\ {}^{*)} \quad .$$

Aus 7) und 5) folgt durch Multiplikation

$$\frac{2Kk'}{\pi} = \frac{(1-q)^2(1-q^2)^2(1-q^3)^2(1-q^4)^2\dots}{(1+q)^2(1+q^2)^2(1+q^3)^2(1+q^4)^2\dots} \quad .$$

Vergleicht man dies mit Nr. 7, 14), so erhält man

$$9)\qquad \vartheta(0) = \sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}} \quad .$$

Die Nullwerte von ϑ_2 und ϑ_3 können durch die Konstanten des elliptischen Integrals ausgedrückt werden, indem man 9) mit den beiden Gleichungen verbindet

$$\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}\,,\quad \sqrt{k'} = \frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)} \quad .$$

Aus der letztern folgt zunächst

$$10)\qquad \vartheta_3(0) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}} \quad ,$$

und hieraus weiter

$$11)\qquad \vartheta_2(0) = \sqrt{\frac{2Kk}{\pi}} \quad .$$

*) Weitere verwandte Formeln siehe Jacobi, Fundamenta nova, Seite 84 u. f.

10. Die Thetafunktionen geben brauchbare Mittel zur numerischen Berechnung elliptischer Funktionen.

Zu einem gegebenen Modul k hat man zunächst die Zahl q zu berechnen. Dazu geht man am zweckmäßigsten von der Formel aus

$$\sqrt{k'} = \frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \dots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \dots} .$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} = \frac{q + q^9 + q^{25} + q^{49} + \dots}{1 + 2q^4 + 2q^{16} + 2q^{36} + \dots} .$$

Bezeichnet man die bekannte linke Seite mit λ und führt die Division rechts aus, so entsteht

$$1) \qquad \lambda = q - 2q^5 + 5q^9 - 10q^{13} + 18q^{17} - 32q^{21} + \dots$$

Setzen wir $q = a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \dots$ in diese Gleichung ein, so bestimmen sich $a_1, a_2, a_3, \dots$ durch Vergleichung gleich hoher Potenzen von λ. Zunächst erkennen wir leicht, daß mehrere der a verschwinden. Da q^5 mit λ^5 beginnt, so folgt

$$a_2 = a_3 = a_4 = 0 \quad ,$$

also ist q von der Form

$$q = a_1\lambda + a_5\lambda^5 + a_6\lambda^6 + \dots$$

Dann erhält aber q^5 nur die Potenzen $\lambda^5, \lambda^9, \dots$, und q^9 beginnt mit λ^9, folglich ist

$$a_6 = a_7 = a_8 = 0 \quad .$$

Nun enthält q die Potenzen $\lambda, \lambda^5, \lambda^9, \dots$,

q^5 die Potenzen $\lambda^5, \lambda^9, \lambda^{13} \dots$,

q^9 die Potenzen $\lambda^9, \lambda^{13} \dots$,

folglich ist

$$a_{10} = a_{11} = a_{12} = 0 \quad .$$

Hieraus geht hervor, daß in q^5, q^9 und q^{13} hinter λ^{13} sofort λ^{17} folgt, also ist

$$a_{14} = a_{15} = a_{16} = 0 \quad .$$

Dies bedingt wieder, daß in q^5, q^9, q^{13}, q^{17} nach λ^{17} sofort λ^{21} kommt es ist daher

$$a_{18} = a_{19} = a_{20} = 0 \quad ;$$

mithin ist q von der Form

$$2) \qquad q = a\lambda + b\lambda^5 + c\lambda^9 + d\lambda^{13} + e\lambda^{17} + f\lambda^{21} + \dots$$

Anstatt dies in 1) einzuführen, ist es zweckmäßiger, für λ aus 1) den Wert in 2) einzusetzen. Man bildet zu diesem Zwecke

$$\begin{aligned}
\lambda^5 &= q^5 - 10q^9 + 65q^{13} - 330q^{17} + 1420q^{21} - \dots ,\\
\lambda^9 &= + q^9 - 18q^{13} + 189q^{17} - 810q^{21} + \dots ,\\
\lambda^{13} &= + q^{13} - 26q^{17} + 65q^{21} - \dots ,\\
\lambda^{17} &= \phantom{q^5 - 10q^9 + 65q^{13}} + q^{17} - 34q^{21} + \dots ,\\
\lambda^{21} &= \phantom{q^5 - 10q^9 + 65q^{13} - 330q^{17}} + q^{21} - \dots ,
\end{aligned}$$

und erhält die Gleichungen

$$a = 1, \quad -2 + b = 0, \quad 5 - 10b + c = 0 \quad ,$$

$$-10 + 65b - 18c + d = 0, \quad 18 - 330b + 189c - 26d + e = 0 \quad ,$$

$$-32 + 1420b - 800c + 65d - 34e + f = 0 \quad .$$

Diese Gleichungen ergeben

$$b = 2\,,\quad c = 15\,,\quad d = 150\,,\quad e = 1707\,,\quad f = 57470\quad ,$$

also ist

$$3)\qquad q = \lambda + 2\lambda^5 + 15\lambda^9 + 150\lambda^{13} + 1707\lambda^{17} + 57630\lambda^{21} + \dots$$

Aus q findet man K (wenn man nicht vorzieht, K aus k nach den früher mitgeteilten Methoden direkt zu berechnen) aus der außerordentlich rasch konvergierenden Entwicklung Nr. 9, 9)

$$4)\qquad \sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}} = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - 2q^{25} + \dots$$

Da q selbst für große k stark von 1 abweicht, so genügen in den meisten Fällen die ersten drei Glieder. Schließlich findet man $\sin\operatorname{am} w$, $\cos\operatorname{am} w$, $\Delta\operatorname{am} w$ aus den ebenfalls sehr rasch konvergierenden Thetaquotienten § 8, Nr. 5, 15, 16 und 17.

Man kann diese Gleichungen auch dazu verwenden, w zu finden, wenn $\sin\operatorname{am} w$, $\cos\operatorname{am} w$ oder $\Delta\operatorname{am} w$ gegeben sind, also dazu, ein elliptisches Integral erster Art aus dem Modul und der Amplitude zu berechnen. Wir bedienen uns dazu am zweckmäßigsten der Gleichung

$$5)\qquad \Delta\operatorname{am} w = \sqrt{k'}\cdot\frac{1 + 2q\cos\frac{\pi w}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi w}{K} + \dots}{1 - 2q\cos\frac{\pi w}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi w}{K} - \dots}\quad .$$

Setzen wir $\pi w : K = v$, so folgt

$$\frac{1}{2q}\cdot\frac{\Delta\operatorname{am} w - \sqrt{k'}}{\Delta\operatorname{am} w + \sqrt{k'}} = \frac{\cos 2v + q^8\cos 6v + q^{24}\cos 10v + \dots}{1 + 2q^4\cos 4v + 2q^{16}\cos 8v + \dots}\quad .$$

Die linke Seite ist bekannt, wir bezeichnen sie mit δ und erhalten

$$\begin{aligned}\cos 2v = {} & \delta(1 + 2q^4\cos 4v + 2q^{16}\cos 8v + \dots)\\ & - (q^8\cos 6v + q^{24}\cos 10v + \dots)\quad .\end{aligned}$$

In den meisten Fällen ist q so klein, daß $2q^4$ vernachlässigt werden kann: alsdann hat man einfach

$$6)\qquad \cos 2v = \delta\quad .$$

Ist dieser Wert nicht hinlänglich genau, so benutzt man ihn als erste Annäherung und berechnet einen genauern Wert v' nach

$$7)\qquad \left\{\begin{aligned}\cos 2v' = {} & \delta(1 + 2q^4\cos 4v + 2q^{16}\cos 8v + \dots)\\ & - (q^8\cos 6v + q^{24}\cos 10v + \dots)\quad .\end{aligned}\right.$$

Durch wiederholte Anwendung von 7) erhält man eine Reihe von immer bessern Annäherungen, die man so weit fortsetzt, bis zwei folgende genau genug übereinstimmen.

§ 10. Die elliptischen Integrale zweiter und dritter Art.

1. Die Integrale zweiter und dritter Art § 6, Nr. 8, 9)

$$\int_0^z \sqrt{\frac{1 - k^2z^2}{1 - z^2}}\,dz \quad\text{und}\quad \int_0^z \frac{dz}{(1 + \lambda z^2)\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}}$$

werden nach JACOBI*) als **elliptische Funktionen** betrachtet, indem man eine neue Veränderliche w durch die Gleichung einführt

$$z = \sin \operatorname{am} w\,, \quad \text{also} \quad w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad .$$

Hierdurch ergibt sich

$$\int \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\, dz = \int \Delta^2 \operatorname{am} w\, dw \quad .$$

JACOBI bezeichnet das letztere Integral, zwischen den Grenzen 0 und w genommen, als Integral zweiter Art; wir schreiben dafür $\mathfrak{E}(w)$ und haben daher

$$\mathfrak{E}(w) = \int_0^w \Delta^2 \operatorname{am} w\, dw \quad .$$

Ersetzt man $\Delta \operatorname{am} w$ durch $\sin \operatorname{am} w$, so folgt

$$\mathfrak{E}(w) = w - \int_0^w k^2 \sin^2 \operatorname{am} w\, dw \quad .$$

In dem Integrale dritter Art setzen wir

$$\lambda = -k^2 \sin^2 \operatorname{am} a$$

und erhalten

$$\int \frac{d\varphi}{(1+\lambda \sin^2\varphi)\,\Delta\varphi} = \int \frac{dw}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} w} \quad .$$

Wird das letztere Integral zwischen den Grenzen 0 und w genommen, so erhält man sofort

$$\int_0^w \frac{dw}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} w} = w + \int_0^w \frac{k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} w\, dw}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} w} \quad .$$

Wir werden nun zeigen, wie die beiden Integrale, um die es sich noch handelt, nämlich

$$\int_0^w k^2 \sin^2 \operatorname{am} w\, dw \qquad \text{und} \qquad \int_0^w \frac{k^2 \sin^2 \operatorname{am} w\, dw}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} w}$$

auf Thetafunktionen zurückgeführt werden können.

2. Vorher haben wir noch zu untersuchen, ob diese beiden Integrale vom Integrationswege abhängen.

Die Funktion $\sin \operatorname{am} w$ wird unendlich in den Punkten

$$w = 2mK + (2n+1)K' \cdot i \quad ,$$

wobei m und n ganze Zahlen sind; da nun (§ 7, Nr. 4)

$$\sin^2 \operatorname{am}[2mK + (2n+1)K'i + \mathfrak{w}] = \frac{1}{k^2 \sin^2 \operatorname{am} \mathfrak{w}}$$

und $1 : \sin^2 \operatorname{am} \mathfrak{w}$ im Punkte Null unendlich wird wie $\mathfrak{w}^2$, so folgt:

Das Integral $\int \sin^2 \operatorname{am} w\, dw$ über eine kleine Kurve erstreckt, die einen Ausnahmepunkt einfach umkreist, verschwindet; das Integral ist daher eine eindeutige Funktion der Punkte der z-Ebene.

*) JACOBI, Fundamenta nova, § 47.

Die Funktion

$$\frac{\sin^2 \operatorname{am} w}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} w}$$

wird nur in den Punkten unendlich groß, für welche

$$1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \, \sin^2 \operatorname{am} w = 0 \quad ,$$

also

$$\sin \operatorname{am} w = \pm \frac{1}{k \sin \operatorname{am} a} \quad .$$

Hieraus folgen für w die Auflösungen

$$w = \pm a + 2mK + (2n+1)K'i \quad .$$

Setzt man

$$w = \pm a + 2mK + (2n+1)K'i + \mathfrak{w} \quad ,$$

so ergibt sich

$$\frac{\sin^2 \operatorname{am} w}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} w} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \operatorname{am}(\mathfrak{w} \pm a) - \sin^2 \operatorname{am} a} \quad .$$

Ist $\mathfrak{w}$ so klein, daß höhere Potenzen von $\mathfrak{w}$ gegen die erste zu vernachlässigen sind, so ist nach dem Summensatze

$$\sin \operatorname{am}(\mathfrak{w} \pm a) = \pm \sin \operatorname{am} a + \cos \operatorname{am} a \, \Delta \operatorname{am} a \cdot \mathfrak{w} \quad .$$

Folglich ist, über eine verschwindend kleine den Punkt

$$\pm a + 2mK + (2n+1)K'i$$

einmal umkreisende Kurve ausgedehnt,

$$\int \frac{\sin^2 \operatorname{am} w}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} w} dw = \pm \frac{1}{2k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \, \Delta \operatorname{am} a} \int \frac{d\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}}$$

$$= \pm \frac{\pi i}{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \, \Delta \operatorname{am} a} \quad .$$

Hieraus ergibt sich: Das Integral

$$\int_0^w \frac{\sin^2 \operatorname{am} w}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} w} dw$$

ist unendlich vieldeutig und hat den Periodizitätsmodul

$$\frac{\pi i}{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \, \Delta \operatorname{am} a} \quad .$$

3. Nach § 8, Nr. 17, 17) ist

$$\vartheta(0)^2 \cdot \frac{\vartheta(z+\zeta)\,\vartheta(z-\zeta)}{\vartheta(\zeta)^2\,\vartheta(z)^2} = 1 - \left[\frac{\vartheta_1(\zeta)}{\vartheta(\zeta)} \cdot \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)}\right]^2 \quad .$$

Ersetzt man hier ζ und z durch $\frac{\pi}{2K} a$ und $\frac{\pi}{2K} w$, so erhält man

$$\vartheta(0)^2 \cdot \frac{\vartheta\left[\frac{\pi}{2K}(w+a)\right] \vartheta\left[\frac{\pi}{2K}(w-a)\right]}{\vartheta\left(\frac{\pi a}{2K}\right)^2 \vartheta\left(\frac{\pi w}{2K}\right)^2} = 1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} w \quad .$$

Wir nehmen beiderseits die Logarithmen und differenzieren dann nach a; dadurch entsteht

$$1)\quad \begin{cases} \dfrac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a\, \Delta \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} w}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} w} \\ = \dfrac{D_a \vartheta \dfrac{\pi a}{2K}}{\vartheta \dfrac{\pi a}{2K}} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{D_a \vartheta \dfrac{\pi (w+a)}{2K}}{\vartheta \dfrac{\pi (w+a)}{2K}} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{D_a \vartheta \dfrac{\pi (w-a)}{2K}}{\vartheta \dfrac{\pi (w-a)}{2K}} \, . \end{cases}$$

Da nun

$$\frac{d \vartheta \dfrac{\pi (w+a)}{2K}}{da} = \frac{d \vartheta \dfrac{\pi (w+a)}{2K}}{dw}, \qquad -\frac{d \vartheta \dfrac{\pi (w-a)}{2K}}{da} = \frac{d \vartheta \dfrac{\pi (w-a)}{2K}}{dw},$$

so erhalten wir aus 1), wenn wir mit dw multiplizieren und zwischen den Grenzen 0 und w integrieren,

$$2)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^w \frac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a\, \Delta \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} w\, dw}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} w} \\ = \dfrac{D_a \vartheta \dfrac{\pi a}{2K}}{\vartheta \dfrac{\pi a}{2K}} \cdot w + \dfrac{1}{2}\, l \dfrac{\vartheta \dfrac{\pi (w-a)}{2K}}{\vartheta \dfrac{\pi (w+a)}{2K}} \, . \end{cases}$$

Der Periodizitätsmodul des links stehenden Integrals ist πi; ihn besonders hinzuzufügen ist wegen des rechts stehenden Logarithmus nicht nötig. Das links stehende Integral bezeichnet Jacobi als Normalintegral dritter Art $\Pi(w, k, a)$, wofür auch $\Pi(w, a)$ geschrieben wird, wenn über den Modulus k kein Zweifel sein kann.

Wenn wir in 2) rechts und links durch a dividieren und dann zur Grenze für $a = 0$ übergehen, so erhalten wir

$$3)\quad \int_0^w k^2 \sin^2 \operatorname{am} w\, dw = -\frac{\pi^2}{4K^2} \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} w - \frac{D_w \vartheta \dfrac{\pi w}{2K}}{\vartheta \dfrac{\pi w}{2K}} \, ;$$

denn es ist, wenn $\pi a : 2K = \beta$ gesetzt wird,

$$D_a \vartheta \frac{\pi a}{2K} = \frac{\pi}{2K} \vartheta' \beta \, ,$$

$$\lim \frac{D_a \vartheta \dfrac{\pi a}{2K}}{a} = \frac{\pi}{2K} \lim \frac{D_a \vartheta \beta}{\beta} = \frac{\pi^2}{4K^2} \cdot \lim \frac{\vartheta' \beta}{\beta} = \frac{\pi^2}{4K^2} \vartheta''(0) \, .$$

Es ist daher

$$4)\quad \mathfrak{E}(w) = \int_0^w \Delta^2 \operatorname{am} w\, dw = \left[1 - \frac{\pi^2}{4K^2} \cdot \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)}\right] w + \frac{D_w \vartheta \dfrac{\pi w}{2K}}{\vartheta \dfrac{\pi w}{2K}} \, .$$

Das zweite Glied rechts bezeichnet man nach JACOBI mit $Z(w)$, so daß also

$$Z(w) \equiv \frac{D_w \vartheta \frac{\pi w}{2K}}{\vartheta \frac{\pi w}{2K}} \quad .$$

4. Wir entwickeln nun einige Eigenschaften der Funktion Z. Wenn man die angedeutete Differentiation ausführt, so erhält man zunächst

$$Z(w) = \frac{2q \sin\frac{\pi w}{K} - 4q^4 \sin\frac{2\pi w}{K} + 6q^9 \sin\frac{3\pi w}{K} - \ldots}{1 - 2q\cos\frac{\pi w}{K} + 2q^4 \cos\frac{2\pi w}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi w}{K} + \ldots} \quad .$$

Hieraus folgt

$$1) \quad \begin{cases} Z(-w) = -Z(w)\,, \quad Z(0) = 0 \quad , \\ Z(mK) = 0\,, \quad Z(w + 2K) = Z(w) \quad . \end{cases}$$

Da ferner bekanntlich

$$\vartheta \frac{\pi}{2K}(w + 2iK') = -e^{\pi\frac{K'}{K} - \frac{i\pi w}{K}} \vartheta \frac{\pi w}{2K} \quad ,$$

so folgt, indem man beiderseits die Logarithmen nimmt und differenziert,

$$2) \qquad Z(w + 2iK') = Z(w) - i\frac{\pi}{K} \quad .$$

Ersetzt man hier w durch $-w$, so erhält man

$$3) \qquad Z(w - 2iK') = Z(w) + i\frac{\pi}{K} \quad .$$

Ferner ist

$$Z(w + iK') = \frac{D_w \vartheta\left(\frac{\pi w}{2K} + \frac{1}{2} i \varrho\right)}{\vartheta\left(\frac{\pi w}{2K} + \frac{1}{2} i\varrho\right)} \quad .$$

Nach § 8, Nr. 2, 4) ist

$$l\vartheta(z + \tfrac{1}{2} i \varrho) = li + \tfrac{1}{4}\varrho - iz + l\vartheta_1(z) \quad ,$$

und daher

$$D_z l\vartheta(z + \tfrac{1}{2} i\varrho) = -i + D_z l\vartheta_1(z) \quad ,$$

$$D_w l\vartheta\left(\frac{\pi w}{2K} + \tfrac{1}{2} i\varrho\right) = -i\frac{\pi}{2K} + \frac{\pi}{2K} D_w l\vartheta_1(z) \quad .$$

Setzt man $w = K$, also $z = \frac{1}{2}\pi$, so verschwindet $D_w \vartheta_1(z)$, und man erhält

$$4) \qquad Z(K + iK') = -i\frac{\pi}{2K} \quad .$$

5. Geht z auf der zweiblätterigen RIEMANNschen Fläche für $\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ geradlinig von 0 bis 1, so durchläuft w die reale Achse von 0 bis K, geht z im untern Blatte geradlinig zurück bis 0, so geht w auf der realen Achse weiter bis $2K$. Für diesen Weg ist unzweideutig

$$\int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\, dz = \int_0^w \Delta^2 \mathrm{am}\, w\, dw = \mathfrak{E}(w) \quad .$$

Das links stehende LEGENDREsche Integral zweiter Art erlangt auf dem angegebenen Wege den Wert $2E$.

Da nun $Z(2K) = 0$ ist, so folgt

$$2E = \left[1 - \frac{\pi^2}{4K^2} \cdot \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)}\right] 2K \quad ;$$

folglich ist

$$1 - \frac{\pi^2}{4K^2} \cdot \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} = \frac{E}{K} \quad ,$$

und daher

$$1) \qquad \mathfrak{E}(w) = \frac{E}{K} w + Z(w) \quad .$$

Rückt z auf der realen Achse von 0 bis vor 1, umgeht den Punkt 1 in negativer Drehrichtung in einem verschwindend kleinen Halbkreise, geht dann (auf demselben Rande der realen Achse wie von 0 bis 1) geradlinig weiter bis vor $1:k$, umkreist diesen Punkt in negativer Drehrichtung und kehrt hierauf (jenseits der von 1 bis $1:k$ liegenden Verwachsung) geradlinig bis zu 1 zurück, so durchläuft w geradlinig die reale Achse von 0 bis K, und dann ein Lot zur realen bis zum Punkte $K - 2iK'$. Es ist daher für diese Wege

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2 z^2}{1-z^2}}\, dz + 2 \int_1^{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{1-k^2 z^2}{1-z^2}}\, dz = \frac{E}{K}(K - 2iK') + i\frac{\pi}{K} \quad ,$$

da

$$Z(K - 2iK') = Z(K) + i\frac{\pi}{K} = i\frac{\pi}{K} \quad .$$

Das zweite Integral links ist bekanntlich (§ 5, Nr. 19)

$$i(E' - K') \quad .$$

Daher folgt

$$E + 2i(E' - K') = \frac{E}{K}(K - 2iK') + i\frac{\pi}{K} \quad .$$

Hieraus folgt die von LEGENDRE auf anderem Wege gefundene Beziehung zwischen den vollständigen elliptischen Integralen K, K', E, E'

$$2) \qquad KE' + K'E - KK' = \frac{\pi}{2} \quad .$$

Die Gleichung $z = \sin \mathrm{am}\, w$ hat, wenn z einen Punkt der zweiblätterigen RIEMANNschen Fläche bezeichnet, für w die Wurzeln

$$w + 4mK + i \cdot 2nK' \quad ,$$

wenn unter w irgend eine Wurzel dieser Gleichung verstanden wird. Die rechte Seite in 1) nimmt hierfür die unendlich vielen Werte an

$$\frac{E}{K}(w + 4mK + i \cdot 2nK') + Z(w) - i\frac{n\pi}{K} \quad .$$

Setzt man hier nach der LEGENDREschen Gleichung

$$\frac{\pi}{K} = 2E' + 2E\frac{K'}{K} - 2K' \quad ,$$

so erhält man

$$\frac{E}{K} w + Z(w) + 4mE - n \cdot 2i(E' - K') \quad .$$

Daher ist die rechte Seite von 1) in derselben Weise unendlich vieldeutig, wie das Integral

$$\int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2 z^2}{1-z^2}}\, dz \quad .$$

Die Gleichung

$$3)\qquad \int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2 z^2}{1-z^2}}\, dz = \frac{E}{K} w + Z(w)\,, \qquad z = \sin \operatorname{am} w \quad ,$$

ist daher erschöpfend, beide Seiten stellen dieselbe Gruppe von doppelt unendlich vielen Werten dar mit den Periodizitätsmoduln $4E$ und $2i(E'-K')$.

6. Um für $\mathfrak{E}(w)$ und $Z(w)$ eine FOURIERsche Entwicklung zu erhalten, suchen wir eine solche zunächst für die Funktion $\sin^2 \operatorname{am} w$. Zu diesem Zwecke haben wir das geradlinige Integral zu ermitteln

$$\int_0^{2K} \sin^2 \operatorname{am} w \cdot e^{-\frac{n\pi w}{K} i} \cdot dw \quad ,$$

da $\sin^2 \operatorname{am} w$ die reale Periode $2K$ hat. Wir integrieren die Funktion

$$\sin^2 \operatorname{am} w \cdot e^{-\frac{n\pi w}{K} i}$$

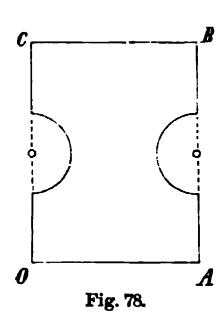


Fig. 78.

entlang des Umfangs eines Rechtecks, dessen Ecken $OABC$ der Reihe nach $w = 0$, $2K$, $2K + 2iK'$, $2iK'$ sind, und umgehen dabei die Ausnahmepunkte iK' und $2K + iK'$ durch verschwindende Halbkreise (Fig. 78). In gleich weit von der realen Achse entfernten Punkten von OC und AB hat die zu integrierende Funktion denselben Wert, die auf diese Strecken bezüglichen Teile des Integrals verschwinden daher. In gleich weit von der imaginären Achse entfernten Punkten von OA und CB hat $\sin \operatorname{am} w$ denselben Wert; für die Punkte CB tritt aber infolge der Exponentialgröße der Faktor hinzu

$$e^{\frac{2n\pi K'}{K}} = q^{-2n} \quad ;$$

es ist somit

$$\int(OA) + \int(BC) = (1 - q^{-2n}) \int(OA) \quad .$$

Statt der beiden Halbkreise um iK' und $2K + iK'$ kann ein Kreis um iK' gesetzt werden. Für dieses Kreisintegral J setzen wir

$$w = iK' + \zeta\,, \qquad \zeta = r e^{i\varphi} \quad ,$$

und haben

$$-J = \int_0^{2\pi} \frac{1}{k^2 \sin^2 \operatorname{am} \zeta} \cdot q^{-n} \cdot e^{-\frac{n\pi\zeta}{K} i} \cdot i\zeta \cdot d\varphi \quad .$$

Wird die Exponentialgröße durch eine Potenzreihe ersetzt, so ergibt sich

$$-J = \frac{1}{k^2 q^n} \left[i \int_0^{2\pi} \frac{\zeta}{\sin^2 \operatorname{am} \zeta}\, d\varphi + \frac{n\pi}{K} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta^2}{\sin^2 \operatorname{am} \zeta}\, d\varphi \right.$$

$$\left. - i \frac{n^2 \pi^2}{2K^2} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta^3}{\sin^2 \operatorname{am} \zeta}\, d\varphi - \ldots \right] \quad .$$

Das erste Integral rechts stimmt bis auf einen konstanten Faktor mit dem Kreisintegrale in Nr. 2 für die Funktion $\sin^2 \operatorname{am} w$ überein, von dem wir bewiesen haben, daß es verschwindet; das dritte und alle folgenden verschwinden, wenn wir zur Grenze für $\zeta = 0$ übergehen, da die zu integrierende Funktion verschwindet; das zweite liefert bei diesem Grenzübergange einen nicht verschwindenden endlichen Wert, und wir erhalten

$$\lim J = -\frac{2n\pi^2}{k^2 K q^n} \quad .$$

Daher ergibt sich schließlich

$$\int_0^{2K} \sin^2 \operatorname{am} w \, e^{-\frac{n\pi w}{K} i} \, dw = -\frac{2\pi^2}{k^2 K} \cdot \frac{n q^n}{1 - q^{2n}} \quad ,$$

$$a_n = \frac{\pi^2}{k^2 K^2} \cdot \frac{n q^n}{1 - q^{2n}} \quad .$$

Hieraus folgt

$$a_n - a_{-n} = 0 \,, \qquad a_n + a_{-n} = -\frac{\pi^2}{k^2 K^2} \cdot \frac{2 n q^n}{1 - q^{2n}} \quad .$$

Für $n = 0$ ergibt sich

$$a_0 = \frac{1}{2K} \int_0^{2K} \sin^2 \operatorname{am} w \, dw = \frac{1}{2k^2 K} \int_0^{2K} (1 - \Delta^2 \operatorname{am} w) \, dw = \frac{K - E}{k^2 K} \quad .$$

Wir haben somit

$$1) \quad \begin{cases} \sin^2 \operatorname{am} w \\ = \dfrac{K-E}{k^2 K} - 2 \dfrac{\pi^2}{k^2 K^2} \left(\dfrac{q}{1-q^2} \cos \dfrac{\pi w}{K} + \dfrac{2 q^2}{1-q^4} \cos \dfrac{2\pi w}{K} + \dfrac{3 q^3}{1-q^6} \cos \dfrac{3\pi w}{K} + \dots \right) . \end{cases}$$

Da nun

$$\mathfrak{E}(w) = \int_0^w \Delta^2 \operatorname{am} w \, dw = w - k^2 \int_0^w \sin^2 \operatorname{am} w \, dw \quad ,$$

so ergibt sich

$$2) \qquad \mathfrak{E}(w) = \frac{E}{K} w + \frac{2\pi}{K} \left(\frac{q}{1-q^2} \sin \frac{\pi w}{K} + \frac{q^2}{1-q^4} \sin \frac{2\pi w}{K} + \dots \right) \quad .$$

Hieraus folgt noch

$$3) \quad Z(w) = \frac{2\pi}{K} \left(\frac{q}{1-q^2} \sin \frac{\pi w}{K} + \frac{q^2}{1-q^4} \sin \frac{2\pi w}{K} + \frac{q^3}{1-q^6} \sin \frac{3\pi w}{K} + \dots \right) \quad .$$

7. Nach Nr. 3, 2) ist

$$1) \qquad \Pi(w, k, a) = Z(a) \cdot w + \tfrac{1}{2} l \frac{\vartheta \dfrac{\pi (w - a)}{2K}}{\vartheta \dfrac{\pi (w + a)}{2K}} \quad .$$

Vertauscht man Parameter und Amplitude, so entsteht

$$\Pi(a, k, w) = Z(w) \cdot a + \tfrac{1}{2} l \frac{\vartheta \dfrac{\pi (a - w)}{2K}}{\vartheta \dfrac{\pi (a + w)}{2K}} \quad .$$

Durch Subtraktion ergibt sich hieraus in Rücksicht darauf, daß

$$\vartheta(z-\zeta) = -\vartheta(\zeta - z)$$

ist, die Beziehung

$$2)\qquad \Pi(w, k, a) - \Pi(a, k, w) = w\,Z(a) - a\,Z(w) \quad .$$

Diese Gleichung lehrt, wie man ein Integral dritter Art durch ein andres ausdrücken kann, in welchem der Modul gegen die Amplitude vertauscht ist.

Ist $w = K$, so wird das Integral dritter Art als vollständig bezeichnet. Nach 2) ist

$$\Pi(K, k, a) = \Pi(a, k, K) + KZ(a) - a\,Z(K) \quad .$$

Da nun

$$\Pi(a, k, K) = 0\,, \qquad Z(K) = 0 \quad ,$$

so folgt die zur Berechnung eines vollständigen elliptischen Integrals dritter Art brauchbare Gleichung

$$3)\qquad \Pi(K, k, a) = KZ(a) \quad ,$$

die auch sofort aus 1) gewonnen werden kann.

8. Das LEGENDREsche Integral dritter Art ist mit dem JACOBIschen durch die Gleichung verbunden

$$1)\qquad \int_0^z \frac{dz}{(1+\lambda z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = w + \frac{\operatorname{tang}\operatorname{am} a}{\Delta \operatorname{am} a}\,\Pi(w, k, a) \quad ,$$

$$\sin\operatorname{am} w = z\,, \qquad \sin^2\operatorname{am} a = -\frac{\lambda}{k^2} \quad .$$

Ist λ negativ und $-\lambda > k^2$, so ist $-\lambda : k^2$ ein unechter Bruch, mithin a komplex; ist λ positiv, so ist $\sin\operatorname{am} a$ und daher auch a rein imaginär. In beiden Fällen ist, wie überhaupt bei realem λ, das LEGENDREsche Integral Π_0 real mit w, während in 1) rechts ein nicht realer Parameter a vorkommt.

Wir begnügen uns damit, zu zeigen, wie man die imaginäre Form bei dem besondern Integral vermeiden kann

$$\int_0^z \frac{dz}{(1-z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad .$$

Hier ist $\lambda = -1$, also

$$\sin\operatorname{am} a = \frac{1}{k}\,, \qquad a = K + iK' \quad ;$$

nun ist

$$\Pi(w, k, K+iK') = w\,Z(K+iK') + \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{\vartheta\frac{\pi}{2K}(w-K-iK')}{\vartheta\frac{\pi}{2K}(w+K+iK')} \quad ;$$

ferner ist nach Nr. 4, 4)

$$Z(K+iK') = -i\,\frac{\pi}{2K} \quad ;$$

nach § 8, Nr. 2 ist

$$\frac{\vartheta\frac{\pi}{2K}(w-K-iK')}{\vartheta\frac{\pi}{2K}(w+K+iK')} = \frac{\vartheta\frac{\pi}{2K}(K+iK'-w)}{\vartheta\frac{\pi}{2K}(K+iK'+w)} = e^{\frac{i\pi w}{K}}\cdot\frac{\vartheta\frac{\pi}{2K}(w-K)}{\vartheta\frac{\pi}{2K}(w+K)} = e^{\frac{i\pi w}{K}} \quad .$$

Mithin ist
$$\Pi(w, k, K + iK') = 0 \quad .$$

Da nun auch $\Delta \operatorname{am}(K + iK') = 0$, so nimmt das Glied
$$\frac{\operatorname{tang}\operatorname{am}(K + iK')}{\Delta \operatorname{am}(K + iK')} \Pi(w, k, K + iK')$$
die Form $0 : 0$ an. Um den Grenzwert des Ausdrucks zu bestimmen, haben wir den Quotienten von
$$\frac{\partial \Pi(w, k, a)}{\partial a} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Delta \operatorname{am} a}{\partial a}$$
für den Wert $a = K + iK'$ zu ermitteln.

Aus
$$\Pi(w, k, a) = \Pi(a, k, w) + w Z(a) - a Z(w)$$
folgt

1) $$\frac{\partial \Pi(w, k, a)}{\partial a} = \frac{k^2 \sin \operatorname{am} w \cos \operatorname{am} w \,\Delta \operatorname{am} w \sin^2 \operatorname{am} a}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} w \sin^2 \operatorname{am} a} + w Z'(a) - Z(w) \quad .$$

Da
$$Z(a) = \int_0^a \Delta^2 \operatorname{am} w \, dw - \frac{E}{K} a \quad ,$$
so ist
$$Z'(a) = \Delta^2 \operatorname{am} a - \frac{E}{K} \quad .$$

Macht man hiervon in 1) Gebrauch und setzt
$$\sin \operatorname{am} a = \frac{1}{k}, \quad \text{also} \quad \cos \operatorname{am} a = \frac{ik'}{k}, \quad \Delta \operatorname{am} a = 0 \quad ,$$
so entsteht
$$\left[\frac{\partial \Pi(w, k, a)}{\partial a}\right]_{(a = K + iK')} = \operatorname{tang}\operatorname{am} w \,\Delta \operatorname{am} w - \mathfrak{E}(w) \quad .$$

Ferner ist
$$\frac{\partial \Delta \operatorname{am} a}{\partial a} = -k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \quad .$$

Für $a = K + iK'$ ergibt dies $(-ik')$. Da nun
$$\operatorname{tang}\operatorname{am}(K + iK') = \frac{1}{ik'} \quad ,$$
so folgt schließlich

2) $$\int_0^z \frac{dz}{(1 - z^2)\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = w + \frac{1}{k'^2}[\operatorname{tang}\operatorname{am} w \,\Delta \operatorname{am} w - \mathfrak{E}(w)] \quad ,$$

ein Resultat, von dessen Richtigkeit man sich durch Differentiation leicht überzeugt.

9. Auf dieses Integral lassen sich die Funktionen $Z(w)$ und $\mathfrak{E}(w)$ im Falle eines rein imaginären Arguments zurückführen; denn es ist
$$Z(iv) = \mathfrak{E}(iv) - i \cdot \frac{E}{K} v \quad ,$$
$$\mathfrak{E}(iv) = \int_0^{iy} \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}} \, dz , \quad \text{wobei} \quad y = \operatorname{tang}\operatorname{am}(v, k') \quad .$$

Ersetzt man hier z durch iy, so entsteht

$$\mathfrak{E}(iv) = i\int_0^y \sqrt{\frac{1+k^2y^2}{1+y^2}}\,dy \quad .$$

Die Ersetzung $y = \operatorname{tang}\varphi$, also $\varphi = \operatorname{am}(v, k')$, gibt

$$\mathfrak{E}(iv) = i\int_0^\varphi \sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$= i\int_0^\varphi \frac{(1-k'^2\sin^2\varphi)\,d\varphi}{(1-\sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi, k')}$$

$$= ik'^2\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k')} + ik^2\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1-\sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi, k')} \quad .$$

Daher folgt schließlich in Rücksicht auf Nr. 8, 2)

$$\mathfrak{E}(iv) = ik'^2v + ik^2v + i\frac{k^2}{k'^2}[\operatorname{tang}\operatorname{am}(v, k')\,\Delta\operatorname{am}(v, k') - \mathfrak{E}(v, k')]$$

$$= iv + i\frac{k^2}{k'^2}[\operatorname{tang}\operatorname{am}(v, k')\,\Delta\operatorname{am}(v, k') - \mathfrak{E}(v, k')] \quad ,$$

$$Z(iv) = i\cdot\frac{K-E}{K}v + i\cdot\frac{k^2}{k'^2}[\operatorname{tang}\operatorname{am}(v, k')\,\Delta\operatorname{am}(v, k') - \mathfrak{E}(v, k')] \text{ *)} \quad .$$

§ 11. Geometrische Anwendungen der elliptischen Integrale.

1. Umfang der Lemniskate. Die Gleichung der Lemniskate in Polarkoordinaten ist

$$r = a\sqrt{\cos 2\omega} \quad ,$$

wenn mit ω der Winkel des Polabstands r mit der Achse der Lemniskate bezeichnet wird.

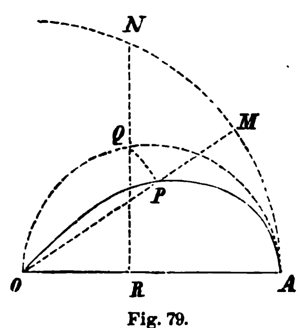


Fig. 79.

Die Konstruktion der Kurve erfolgt in einfachster Weise, indem man um O mit $OA = a$ einen Kreis beschreibt (Fig. 79), diesen mit einem Polstrahle in M schneidet, $MN = AM$ und $NQ \perp OA$ macht; alsdann ist $OR = a\cos 2\omega$, mithin

$$OQ = a\sqrt{\cos 2\omega} \quad ;$$

macht man daher $OP = OQ$, so ist P ein Punkt der Lemniskate.

Wir bezeichnen den Winkel AOQ als Amplitude φ des Lemniskatenpunktes P; für diesen Winkel ist

$$\sin\varphi = \frac{AQ}{OA} = \frac{\sqrt{a^2-r^2}}{a} = \sqrt{2}\cdot\sin\omega \quad .$$

*) Für weiteres sei verwiesen u. a. auf ENNEPER, Elliptische Funktionen, Theorie und Geschichte, Halle 1876.

Der von A bis P reichende Lemniskatenbogen hat die Länge

$$s = a\int_0^\omega \frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}} = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}} .$$

Also ist

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}} F\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) ,$$

und ein Quadrant S der Lemniskate

$$S = \frac{a}{\sqrt{2}} F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) .$$

Soll die Summe zweier Lemniskatenbogen s_1 und s_2 einem dritten Lemniskatenbogen s gleich sein, so müssen die Amplituden φ_1, φ_2, φ durch eine der äquivalenten Gleichungen verbunden sein, die den Summensatz enthalten.

2. Wir wollen bei dieser Gelegenheit zeigen, wie der Summensatz geometrisch erledigt werden kann.

Man zeichne zwei Kreise (Fig. 80), einen um A mit dem Halbmesser R, den andern im Innern des erstern mit dem Halbmesser r; die Mittenstrecke AB sei h. Im größern Kreise ziehe man zwei Sehnen CD und EF, die den kleinern berühren.

Sind 2α, 2β, 2γ die Winkel DAC, EAC, FAC und $AH \perp GB$, so hat man

$$BG = HG + BH ,$$

Fig. 80.

d. i.

$$r = R\cos(\gamma - \beta) + h\cos(\gamma + \beta) ,$$
$$= (R + h)\cos\beta\cos\gamma + (R - h)\sin\beta\sin\gamma .$$

Ferner folgt aus CBJ

$$1) \qquad r = (R + h)\cos\alpha ,$$

daher ist

$$2) \qquad \cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \frac{R - h}{R + h}\sin\beta\sin\gamma .$$

Man kann nun h immer so bestimmen, daß für einen gegebenen Modul $k < 1$

$$3) \qquad \frac{R - h}{R + h} = \sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha} ;$$

es folgt nämlich hieraus

$$4) \qquad h = R \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}}{1 + \sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}} .$$

Man sieht, daß dieser Wert von h kleiner als R ist, und daß nach 3) $R - h$ größer ist als $(R + h)\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$, also größer als r; es wird also immer mit willkürlich gewählten R und α und aus 4) und 1) bestimmten h und r die Figur mit der vorausgesetzten Anordnung der Kreise erhalten. Führt man nun 3) in 2) ein, so erhält man

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\,\Delta(\alpha) .$$

Dies ist aber bekanntlich die Bedingung, unter der

$$F(a, k) + F(\beta, k) = F(\gamma, k) \quad .$$

Sind nun k, a, β gegeben, γ gesucht, so wähle man R beliebig, zeichne dann h und r nach 4) und 2), mache $EAC = 2\beta$, und ziehe von E die Gerade EF so, daß sie den kleinen Kreis berührt; alsdann ist $\beta = \frac{1}{2} FAC$.

Die zweite von E an den kleinen Kreis gelegte Tangente EF_1 bestimmt einen Winkel $\gamma = \frac{1}{2} CAF_1$, der die Aufgabe löst

$$F(a, k) - F(\beta, k) = F(\gamma, k) \quad .$$

Zieht man von F aus eine Tangente F' an den kleinen Kreis, von F' aus eine Tangente $F'F''$ u. s. w. und bezeichnet die Winkel, die AF', AF'', AF''' u. s. w. mit AC bilden, mit $2\gamma_1$, $2\gamma_2$, $2\gamma_3$ u. s. w., so hat man

$$\begin{aligned} F(a) + F(\beta) &= F(\gamma) \quad , \\ F(a) + F(\gamma) &= F(\gamma_1) \quad , \\ F(a) + F(\gamma_1) &= F(\gamma_2) \quad , \\ F(a) + F(\gamma_2) &= F(\gamma_3) \quad , \\ \cdots & \cdots \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Addition

$$F(\gamma_n) = (n + 1) F(a) + F(\beta) \quad ,$$

oder, wenn $\beta = 0$, also $E \equiv C$ ist,

$$F(\gamma_n) = (n + 1) F(a) \quad .$$

Hierdurch ist die Aufgabe gelöst: Durch Konstruktionen von geraden Linien und Kreisbogen die Amplitude eines Lemniskatenbogens zu erhalten, der gleich der Summe oder der Differenz der zu gegebenen Amplituden gehörigen Lemniskatenbogen ist; oder der gleich einem ganzzahligen Vielfachen des zu einer gegebenen Amplitude gehörigen Lemniskatenbogens ist.

3. Die Aufgabe, einen (in A anfangenden) Lemniskatenbogen in eine Anzahl gleicher Teile zu teilen, ist der geometrische Ausdruck der arithmetischen Aufgabe, $\sin \operatorname{am} \frac{1}{n} w$ durch n, k und elliptische Funktionen von w auszudrücken. Man wird zunächst durch wiederholte Anwendung der Gleichungen für $\sin \operatorname{am}(w + w_1)$, $\cos \operatorname{am}(w + w_1)$, $\Delta \operatorname{am}(w + w_1)$ die Funktionen $\sin \operatorname{am} n w$, $\cos \operatorname{am} n w$, oder $\Delta \operatorname{am} n w$ durch w ausdrücken: man erhält so eine Gleichung, welche elliptische Funktionen von w mit einer von $n w$ algebraisch verknüpft. Ersetzt man nun hierin $n w$ durch w, also w durch $w : n$, so erhält man durch Auflösung dieser Gleichung eine Funktion von $w : n$ durch w ausgedrückt.

Diese ist bereits für $n = 2$ vom 8. Grade. Wir müssen hier darauf verzichten, die allgemeine Gleichung der Teilungsaufgabe aufzustellen, und ihre algebraische Lösbarkeit nachzuweisen*), und geben nur die Lösung für den einfachsten Fall.

Setzt man in

$$\cos \operatorname{am} 2w = \frac{\cos^2 \operatorname{am} w - \sin^2 \operatorname{am} w \, \Delta^2 \operatorname{am} w}{1 - k^2 \sin^4 \operatorname{am} w} \quad ,$$

w für $2w$ und z für $\sin \operatorname{am} \frac{1}{2} w$, so erhält man für z die Gleichung

$$1) \qquad (1 - k^2 z^4) \cos^2 \operatorname{am} w = 1 - 2z^2 + k^2 z^4 \quad ,$$

*) Vgl. KÖNIGSBERGER, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Funktionen, 2. Bd. Seite 210.

aus welcher folgt

$$2)\qquad z = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-k^2\sin^2\operatorname{am}w}}{1+\sqrt{1-\sin^2\operatorname{am}w}}} \quad .$$

Die vier Auflösungen sind

$$\sin\operatorname{am}\frac{w}{2}\,,\quad \sin\operatorname{am}\left(\frac{w}{2}+2K\right),\quad \sin\operatorname{am}\left(\frac{w}{2}+iK'\right),\quad \sin\operatorname{am}\left(\frac{w}{2}+2K+iK'\right) \;.$$

Ausdrücke, die außer rationalen Größen nur Quadratwurzeln enthalten, lassen sich bekanntlich mit Lineal und Zirkel konstruieren. Ohne auf die Einzelheiten einer solchen Konstruktion weiter einzugehen, können wir daher den Satz aussprechen: Ein Lemniskatenbogen kann durch Lineal und Zirkel in 2^n gleiche Teile geteilt werden.

4. Umfang der Ellipse. Werden die rechtwinkligen Koordinaten eines Ellipsenpunktes mit Hilfe eines Winkels φ durch die Gleichungen ausgedrückt

$$x = a\sin\varphi\,,\quad y = b\cos\varphi \quad ,$$

so ist ein vom Endpunkte der kleinen Achse an gerechneter Bogen der Ellipse

$$s = \int_0^\varphi \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \quad .$$

Bezeichnet man die numerische Excentrizität $\sqrt{a^2-b^2} : a$ mit k, so erhält man

$$s = a\,E(\varphi, k) \quad .$$

Alle auf Integrale zweiter Art bezüglichen Sätze finden also ihre geometrische Deutung als Sätze über Ellipsenbogen. Der Summensatz

$$E(\varphi) + E(\psi) - E(\sigma) = k^2 \sin\sigma\sin\varphi\sin\psi$$

lehrt: Zu zwei gegebenen Winkeln φ und ψ läßt sich immer ein dritter σ konstruieren, so daß die aus den zugehörigen Ellipsenbogen abgeleitete Länge

$$s(\varphi) + s(\psi) - s(\sigma)$$

geometrisch konstruiert werden kann.

5. Umfang der Hyperbel. Aus der Identität

$$\frac{\Delta^2(\varphi)}{\cos^2\varphi} - k'^2\operatorname{tang}^2\varphi = 1$$

geht hervor, daß man die Koordinaten der Punkte einer Hyperbel durch die Formeln darstellen kann

$$1)\qquad x = \frac{a\,\Delta(\varphi)}{\cos(\varphi)}\,,\quad y = b\,k'\operatorname{tang}\varphi \quad ,$$

wobei k noch ganz beliebig bleibt. Aus 1) folgt

$$dx = \frac{a\,k'^2\sin\varphi}{\cos^2\varphi\,\Delta(\varphi)}\,d\varphi\,,\quad dy = \frac{b\,k'}{\cos^2\varphi}\,d\varphi \quad ,$$

$$2)\qquad ds^2 = \frac{k'^2}{\Delta^2(\varphi)\cos^4\varphi}\left(b^2 + [a^2k'^2 - b^2k^2]\sin^2\varphi\right)d\varphi^2 \quad .$$

Dies wird möglichst einfach, wenn man k so wählt, daß

$$a^2k'^2 - b^2k^2 = 0 \quad ,$$

woraus folgt

$$3)\qquad k^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2}\,,\quad k'^2 = \frac{b^2}{a^2+b^2} \quad ;$$

denn alsdann wird aus 2)

$$s = k' b \int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi \, \Delta(\varphi)} \quad .$$

Nach § 10, Nr. 8, 2) ergibt dies

$$4) \qquad s = \frac{b}{k'}[k'^2 F(\varphi) - E(\varphi) + \operatorname{tang}\varphi \, \Delta(\varphi)] \quad .$$

Der Abstand r der Hyperbelnormalen vom Nullpunkte ergibt sich leicht zu

$$r = \frac{b}{k'} \operatorname{tang}\varphi \, \Delta(\varphi) \quad ,$$

also ist

$$r - s = \frac{b}{k'} E(\varphi) - b k' F(\varphi) \quad .$$

Wird $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, so geht r in die Asymptote über; für den Unterschied u zwischen Quadrant und Asymptote hat man daher die bemerkenswerte Formel

$$u = \frac{b}{k'} \cdot E - b k' \cdot K \quad .$$

6. Flächenmessung auf Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung. Aus der Gleichung

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 = 1$$

folgt

$$z = \sqrt{\frac{1 - A x^2 - B y^2}{C}} \quad ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{A x}{\sqrt{C(1 - A x^2 - B y^2)}} \, , \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{B y}{\sqrt{C(1 - A x^2 - B y^2)}} \quad .$$

Bezeichnet ω den Winkel des Flächenlotes mit der XY-Ebene, so ist die Oberfläche

$$1) \qquad S = \iint \frac{1}{\sin\omega} dx\, dy \, , \qquad \sin\omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \quad .$$

Setzt man für $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ die obigen Werte ein, so erhält man

$$2) \qquad \sin\omega = \sqrt{\frac{C(1 - A x^2 - B y^2)}{C - A(C - A) x^2 - B(C - B y^2)}} \quad .$$

Behält man die rechtwinkligen Koordinaten bei, so führt bereits die erste Integration auf elliptische Integrale, deren Modul die zweite Veränderliche enthält; dadurch ergeben sich Schwierigkeiten, die man zu vermeiden suchen muß, indem man geeignete neue Koordinaten einführt.

Als solche empfehlen sich der Winkel ω und der Winkel λ, den das Richtbild des Lotes auf der XY-Ebene mit der X-Achse bildet. Die neuen Veränderlichen sind mit den bisherigen durch die Gleichungen verbunden

$$3) \qquad \sin^2\omega = \frac{C(1 - A x^2 - B y^2)}{C - A(C - A) x^2 - B(C - B) y^2} \, , \quad \operatorname{tang}\lambda = \frac{B y}{A x} \quad .$$

Der letzten Gleichung wird identisch genügt, wenn man setzt

$$4) \qquad x = B R \cos\lambda \, , \quad y = A R \sin\lambda \quad ,$$

führt man diese Werte in die erste ein, so folgt

$$5) \qquad R^2 = \frac{C}{AB} \cdot \frac{\cos^2\omega}{BC \cos^2\omega \cos^2\lambda + AC \cos^2\omega \sin^2\lambda + AB \sin^2\omega} \quad .$$

Die Einführung der neuen Veränderlichen ergibt zunächst

$$S = \iint \frac{1}{\sin\omega}\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial \omega}\right) d\lambda\, d\omega \quad .$$

Für die in Klammern stehende Determinante findet man

$$\frac{\partial x}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial \omega}$$

$$= AB\left[\frac{\partial R}{\partial \omega}\cos\lambda\left(\frac{\partial R}{\partial \lambda}\sin\lambda + R\cos\lambda\right) - \frac{\partial R}{\partial \omega}\sin\lambda\left(\frac{\partial R}{\partial \lambda}\cos\lambda - R\sin\lambda\right)\right]$$

$$= AB\cdot R\frac{\partial R}{\partial \omega} = AB\cdot\frac{1}{2}\frac{\partial (R^2)}{\partial \omega} \quad .$$

$$= -\frac{ABC\sin\omega\cos\omega}{(BC\cos^2\omega\cos^2\lambda + CA\cos^2\omega\sin^2\lambda + AB\sin^2\omega)^2} \quad .$$

Daher ist schließlich

$$6)\qquad S = \pm ABC\iint\frac{\cos\omega\, d\omega\, d\lambda}{(BC\cos^2\omega\cos^2\lambda + CA\cos^2\omega\sin^2\lambda + AB\sin^2\omega)^2} \quad .$$

Zur Bestimmung des Vorzeichens in Verbindung mit der Anordnung der Grenzen dient hier folgende Bemerkung. Die Fläche S ist stets positiv; wird nun für ω immer ein spitzer Winkel, und die untern Grenzen kleiner als die obern genommen, so ist das obere oder untere Zeichen zu wählen, je nachdem ABC positiv oder negativ ist.

Die einfachsten Ergebnisse wird man bei der Wahl bestimmter Veränderlichen immer erhalten, wenn man die Grenzen konstant nimmt. In unserem Falle würde das die geometrische Bedeutung haben, daß wir das Stück der Fläche bestimmen, das von zwei Kurven begrenzt ist, längs deren jeder die Lote gleiche Neigung gegen die XY-Ebene haben, und von zwei andern, mit diesen in der Begrenzung abwechselnden Kurven, längs deren jeder die Lote einer bestimmten Vertikalebene parallel sind.

Der Ort der Punkte, deren Lote den Winkel ω mit der XY-Ebene bilden, hat als Grundriß die Kurve

$$\sin^2\omega = \frac{C(1 - Ax^2 - By^2)}{C - A(C-A)x^2 - B(C-B)y^2} \quad ,$$

oder, besser geordnet,

$$\frac{A(A\,\mathrm{tang}^2\omega + C)}{C}x^2 + \frac{B(B\,\mathrm{tang}^2\omega + B)}{C}y^2 = 1 \quad .$$

Es ist bemerkenswert, daß diese Kurve auch der Durchschnitt der Fläche

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

mit dem Kegel zweiten Grades ist

$$A^2x^2 + B^2y^2 - (C\cot\omega)^2z^2 = 0 \quad .$$

Läßt man ω von Null bis $\frac{1}{2}\pi$ wachsen, so zieht sich der Kegel, der anfangs mit der XY-Ebene zusammenfällt, enger und enger zusammen und fällt schließlich mit der Z-Achse zusammen; dabei bedeckt sich die Fläche zweiten Grades mit Zonen von verschwindender Breite; an den beiden Rändern jeder solchen Zone haben die Lote unendlich wenig verschiedene, längs desselben Randes konstante Neigung.

Der Inhalt einer solchen Zone wird gefunden, wenn man in 5) die auf λ bezügliche Integration zwischen den Grenzen 0 und 2π ausführt; um die Zone

zu erhalten, an deren Rändern die Lote die Neigungen ω_0 und ω_1 haben, hat man alsdann die auf ω bezügliche Integration von ω_0 bis ω_1 zu erstrecken; es ist also

$$S = \pm ABC \int_{\omega_0}^{\omega_1} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\omega \, d\omega \, d\lambda}{(BC\cos^2\omega\cos^2\lambda + CA\cos^2\omega\sin^2\lambda + AB\sin^2\omega)^2} .$$

Um die erste Integration auszuführen, ersetzen wir

$$\sin^2\omega \quad \text{durch} \quad \sin^2\omega(\cos^2\lambda + \sin^2\lambda)$$

und setzen zur Abkürzung

$$m = B(C\cos^2\omega + A\sin^2\omega), \quad n = A(C\cos^2\omega + B\sin^2\omega) \quad ;$$

dadurch geht das Integral über in

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \cos\omega \, d\omega \int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{(m\cos^2\lambda + n\sin^2\lambda)^2} .$$

Setzt man hier $\operatorname{tang}\lambda = t$, so erhält man

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{(m\cos^2\lambda + n\sin^2\lambda)^2} = 4\int_0^{\infty} \frac{(1+t^2)\,dt}{(m+nt^2)^2} = \pi \cdot \frac{m+n}{mn\sqrt{mn}} ,$$

mithin

$$S = \pm\pi ABC \cdot \int_{\omega_0}^{\omega_1} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{mn}} \cdot \cos\omega \, d\omega .$$

Dieses Integral wird leicht auf elliptische gebracht. Ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu beschränken, wollen wir voraussetzen, daß A und B gleiche Zeichen haben, daß bei den Hyperboloiden A dem absoluten Werte nach größer als B, und daß im Falle des Ellipsoids $A < B < C$ ist. Setzen wir

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{A}{C}}, \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{B}{C}} ,$$

so sind α und β jederzeit real und $\alpha > \beta$. Mit Einführung dieser Werte erhalten wir nun

$$m = BC(1 - \alpha^2\sin^2\omega), \quad n = AC(1 - \beta^2\sin^2\omega) ,$$

$$S = \pm\frac{\pi}{C\sqrt{AB}} \cdot \int_{\omega_0}^{\omega_1} \left(\frac{A}{1-\alpha^2\sin^2\omega} + \frac{B}{1-\beta^2\sin^2\omega}\right) \frac{\cos\omega \, d\omega}{\sqrt{(1-\alpha^2\sin^2\omega)(1-\beta^2\sin^2\omega)}} .$$

Hierin setzen wir

$$k = \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{C-B}{C-A}} ,$$

und führen eine neue Veränderliche durch die Gleichung ein

$$\sin\omega = \frac{1}{\alpha}\sin\varphi \quad ;$$

hierdurch entsteht

$$S = \pm\frac{\pi}{\alpha C\sqrt{AB}} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left(\frac{A}{1-\sin^2\varphi} + \frac{B}{1-k^2\sin^2\varphi}\right) \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} .$$

Wird die Zone von der XY-Ebene an gerechnet, so ist $\varphi_0 = 0$, und daher

$$S = \pm \frac{\pi}{a C \sqrt{AB}} \int_0^{\varphi} \left(\frac{A}{\cos^2 \varphi} + \frac{B}{\Delta^2 \varphi} \right) \frac{d\varphi}{\Delta \varphi}$$

$$= \pm \frac{\pi A}{a k'^2 C \sqrt{AB}} [\operatorname{tang} \varphi \, \Delta \varphi + k'^2 F(\varphi) - E(\varphi)]$$

$$\pm \frac{\pi B}{a k'^2 C \sqrt{AB}} \left[E(\varphi) - \frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\Delta \varphi} \right] ,$$

$$= \pm \frac{\pi}{\sqrt{ABC(C-A)}} \left[[A - (C-B)\cos^2\varphi] \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\Delta\varphi} + AF(\varphi) + (C-A) E(\varphi) \right] .$$

Diese Gleichung enthält das bemerkenswerte Resultat: J e d e Z o n e e i n e r M i t t e l p u n k t s f l ä c h e z w e i t e n G r a d e s, l ä n g s d e r e n R ä n d e r n d i e L o t e i h r e N e i g u n g g e g e n e i n e S y m m e t r i e e b e n e d e r F l ä c h e n i c h t ä n d e r n, l ä ß t s i c h d u r c h e l l i p t i s c h e I n t e g r a l e a u s d r ü c k e n*).

Die halbe Fläche des Ellipsoids erhält man aus der vorstehenden Gleichung, wenn man $\sin\omega = 1$, also

$$\sin\varphi = a = \sqrt{1 - \frac{A}{C}}$$

setzt; das Verhältnis der Oberfläche des Ellipsoids zu einem Hauptschnitte desselben wird daher, abgesehen von einem in Bezug auf die Achsen algebraischen Teile, durch unvollständige elliptische Integrale erster und zweiter Art berechnet.

Führt man den Wert für φ in die Gleichung für S ein, so erhält man für die ganze Oberfläche des Ellipsoids

$$S = \frac{2\pi}{C} + \frac{2\pi}{\sqrt{ABC(C-A)}} [AF(\varphi) + (C-A) E(\varphi)] .$$

*) Diesen Satz hat SCHLOEMILCH gegeben; weitere Folgerungen hierzu sowie weitere Anwendungen der elliptischen Integrale auf Flächenberechnungen siehe K o m p e n d i u m d e r h ö h e r e n A n a l y s i s, 2. Aufl., II. Bd., S. 346 u. f.

Drittes Buch.

Differentialgleichungen

bearbeitet von

Dr. Richard Heger,
a. o. Honorarprofessor an der Kgl. Sächs. Techn. Hochschule
und Gymnasialoberlehrer in Dresden.

Differentialgleichungen.

§ 1. Allgemeine Sätze über Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Veränderlichen.

1. Unter einer Differentialgleichung wird eine Gleichung verstanden, in der Differentialquotienten abhängiger Veränderlicher in Bezug auf unabhängige (neben den Veränderlichen selbst und konstanten Größen) vorkommen.

Ist jede abhängige Veränderliche eine Funktion nur einer Veränderlichen, so bezeichnet man die Differentialgleichung als gewöhnliche Differentialgleichung, zum Unterschiede von partialen Differentialgleichungen, welche die partialen Differentialquotienten von Funktionen von mehr als einer Veränderlichen enthalten.

2. Wenn eine Differentialgleichung zwischen zwei Veränderlichen den Differentialquotienten n-ter Ordnung der abhängigen Veränderlichen und keinen höherer Ordnung enthält, so wird sie als Differentialgleichung n-ter Ordnung bezeichnet.

Eine Gleichung zwischen zwei Veränderlichen, die weder den Differentialquotienten n-ter Ordnung der unabhängigen Veränderlichen noch höhere Differentialquotienten enthält, und die so beschaffen ist, daß alle Werte der Veränderlichen und des 1., 2., 3. ... bis n-ten Differentialquotienten, die dieser Gleichung, sowie der durch einmalige oder wiederholte Differentiation daraus hervorgehenden Gleichungen genügen, auch einer gegebenen Differentialgleichung n-ter Ordnung Genüge leisten, wird als ein Integral der Differentialgleichung n-ter Ordnung bezeichnet.

3. Wenn ein Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Veränderlichen x, y so beschaffen ist, daß dieselben Vereine von Werten $x, y, dy : dx$ der Differentialgleichung, sowie auch dem Integrale und dem aus dem Integrale folgenden Werte von $dy : dx$ genügen, so bezeichnen wir es als das allgemeine Integral der Differentialgleichung.

Durch die Gleichung $F(x, y, y') = 0$ werden drei Veränderliche x, y, y' miteinander verknüpft; betrachten wir x und y als rechtwinklige Punktkoordinaten, so können wir die Differentialgleichung geometrisch so deuten, daß durch sie jedem Punkte x, y der Ebene eine oder mehr als eine Richtung y' zugeordnet wird; diese Richtung kann durch eine Gerade T vertreten werden, die durch den Punkt x, y so gezogen wird, daß $\operatorname{tang}(x, T) = y'$; dann ist also durch die Differentialgleichung jedem Punkte der Ebene eine durch den Punkt gehende Gerade oder eine bestimmte Anzahl solcher Geraden zugeordnet.

Ein Integral $\Phi(x, y) = 0$ der Differentialgleichung bedeutet eine Kurve, die in jedem ihrer Punkte von einer zu diesem Punkte durch die Differentialgleichung zugeordneten Geraden berührt wird. Enthält die Gleichung eine willkürliche Konstante C, so gehört zu der Gleichung nicht eine einzelne Kurve, sondern eine Gruppe von unendlich vielen Kurven, die erhalten werden, indem man C alle Werte nacheinander beilegt. Die Konstante, die man als den Parameter der Kurve bezeichnet, kann dann immer so gewählt werden, daß die Kurve

$\Phi(x, y, C) = 0$ durch einen gegebenen Punkt P_0 geht; man hat dann nur nötig, C aus der Gleichung zu bestimmen

$$\Phi(x_0, y_0, C) = 0 \quad .$$

Diese Bemerkung kann man umkehren. Soll die Gleichung $F(x, y) = 0$ das allgemeine Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung sein, so muß ihr durch jeden Wert von x und y genügt werden können, sie muß also einen willkürlichen Parameter enthalten; ist dieser so gewählt, daß die Kurve $\Phi(x, y) = 0$ einen bestimmten Punkt P enthält, so muß alsdann durch die besondere Beschaffenheit der Funktion Φ die Tangente der Kurve $\Phi(x, y) = 0$ in P mit einer der durch die Differentialgleichung dem Punkte P zugeordneten Geraden zusammenfallen.

Unter einem partikulären Integrale versteht man ein Integral einer Differentialgleichung, das aus einem allgemeinen hervorgeht, indem man dem Parameter einen besondern Wert erteilt.

4. Wir wollen nun zunächst zeigen, wie aus einer Gleichung

$$1) \qquad \Phi(x, y, C) = 0 \quad ,$$

die eine willkürliche Konstante C enthält, eine C nicht enthaltende Differentialgleichung erster Ordnung abgeleitet werden kann, von welcher $\Phi(x, y, C)$ das allgemeine Integral ist.

Aus $\Phi(x, y, C) = 0$ erhalten wir durch Differentiation

$$2) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot y' = 0 \quad .$$

Entfernen wir nun C aus 1) und 2), so erhalten wir eine Differentialgleichung

$$3) \qquad F(x, y, y') = 0 \quad .$$

Ist nun der Verein der Gleichungen 1) und 3) mit dem Vereine 1) und 2) gleichbedeutend, und wird C so bestimmt, daß 1) durch einen gegebenen Punkt x, y erfüllt wird, so sind die aus 3) zugeordneten Werte y' übereinstimmend mit den aus 2) folgenden; also ist 1) das allgemeine Integral von 3).

Wir geben hierzu einige Beispiele.

A) Aus der Gleichung

$$4) \qquad (y - C)^2 = 2px$$

folgt durch Differentiation

$$(y - C)y' = p \quad .$$

Setzt man den hieraus folgenden Wert von $y - C$ in 4) ein, so erhält man die zu 4) gehörige Differentialgleichung

$$y' = \sqrt{\frac{p}{2x}} \quad .$$

B) Die Gleichung $x^2 - 2Cy - C^2 - a^2 = 0$ liefert

$$Cy' = x \quad ;$$

setzt man hieraus C in die gegebene Gleichung ein, so erhält man

$$(x^2 - a^2)y'^2 - 2xyy' - x^2 = 0 \quad ,$$

oder

$$y' = \frac{x}{x^2 - a^2}\left(y + \sqrt{y^2 + x^2 - a^2}\right) \quad .$$

C) Die Gleichung

$$5) \qquad (x - 2C)^2 + k^2 C y^2 = C^2$$

stellt eine Reihe von Kegelschnitten dar, deren Hauptachsen in die Abscissenachse fallen, bezw. zu ihr senkrecht sind, und die die Ordinatenachse im Nullpunkte berühren; für positive C ergeben sich Ellipsen, für negative Hyperbeln.

Aus 5) ergibt sich

$$6) \qquad x - 2C + k^2 C y y' = 0 \quad .$$

Führt man zunächst den hieraus folgenden Wert

$$x - 2C = -k^2 C y y'$$

in 5) ein, so folgt

$$k^4 C y^2 y'^2 + k^2 y^2 = C \quad .$$

Vergleicht man den hieraus folgenden Wert von C mit dem aus 6) sich ergebenden, so entsteht die zu 5) gehörige Differentialgleichung

$$y'^2 - \frac{y}{x} \cdot y' + \frac{2k^2 y^2 - x}{k^4 x y^2} = 0 \quad ,$$

oder

$$y' = \frac{1}{2k^2 x y}\left(k^2 y^2 + \sqrt{4x^2 - 8k^2 x y^2 + k^4 y^4}\right) \quad .$$

D) Die Gleichung

$$7) \qquad 2x - 3Cy + C^3 = 0$$

ergibt eine Reihe von Geraden, für die das Quadrat des Abschnittes auf der X-Achse zum Kubus des Abschnittes auf der Y-Achse das konstante Verhältnis $= -27:4$ hat. Aus 7) folgt

$$2 = 3Cy' \quad ,$$

und hieraus und aus 7) die Differentialgleichung

$$x y'^3 - y y'^2 + \frac{4}{27} = 0 \quad .$$

E) Aus dem allgemeinen Integrale

$$\varphi \equiv l\left(\sqrt{x^2 - xy} - y + 2x\right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arc\,tang} \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\sqrt{1 - \frac{y}{x}} + 1\right) = C$$

folgt durch Differentiation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\sqrt{x^2 - xy} + 2x}{x\left(2x - y + \sqrt{x^2 - xy}\right)} \quad ,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{2x - y + \sqrt{x^2 - xy}} \quad .$$

Daher ist die zugehörige Differentialgleichung

$$y' = 2 + \sqrt{1 - \frac{y}{x}} \quad .$$

5. Als integrierbar im älteren Sinne bezeichnet man die Differentialgleichungen, aus denen sich die abhängigen Veränderlichen als bekannte algebraische oder transcendente Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen ergeben, sowie diejenigen, die sich auf einfache Quadraturen zurückführen lassen. Da jede Funktion durch Quadratur aus ihrem Differential hervorgeht, so umfaßt die letzte Bestimmung die erste. Eine integrierbare lineare Differentialgleichung zwischen zwei Veränderlichen führt daher zu einem Ergebnisse von der Form

$$\int \varphi(y)\, dy = \int \psi(x)\, dx \quad ,$$

die Differentialgleichung muß also in die Form gebracht werden können

$$\varphi(y)\, dy = \psi(x)\, dx \quad ,$$

in der, wie man sagt, die Veränderlichen gesondert sind.

Wir werden zunächst unter Voraussetzung der Integrierbarkeit im älteren Sinne Eigenschaften von Integralen der Differentialgleichungen ableiten und die Integrale herstellen.

Der neueren Richtung, die den Differentialgleichungen durch Potenzreihen allgemeiner Art und Quotienten solcher Reihen zu genügen sucht, und damit die Aufgabe viel tiefer erfaßt, werden wir so weit folgen, als es der den Differentialgleichungen hier zugewiesene Raum zuläßt.

6. Wenn zwei allgemeine Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung nach den willkürlichen Konstanten aufgelöst die Gleichungen ergeben

$$1) \qquad F = C\,, \quad f = c \quad ,$$

so ist F eine Funktion von f, d. h. wenn man aus der Gleichung $f(x, y) = f$ die Veränderliche y (oder x) berechnet, indem man das rechts stehende f als neue Veränderliche betrachtet, und diesen Wert in F einführt, so enthält F dann nur die Veränderliche f, nicht auch x (oder y).

Durch Differentiation folgt aus 1)

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \quad .$$

In beiden Gleichungen kommt keine willkürliche Konstante mehr vor, aus beiden muß sich also für alle Werte von x und y derselbe Wert für y' ergeben; die notwendige und ausreichende Bedingung hierfür ist das Verschwinden der Determinante

$$2) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Drückt man y in der angegebenen Weise durch x und f aus und setzt dies in F ein, so erhalte man $\mathfrak{F}$. Diese Funktion kann nur f und x enthalten; man hat

$$3) \qquad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \quad .$$

Bei dem letzten Differentialquotienten ist y als Funktion von x und f gedacht und vorausgesetzt, daß sich f nicht ändert; daher bestimmt sich derselbe aus der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \quad .$$

Wird der hieraus folgende Wert in 3) eingesetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\right) : \frac{\partial f}{\partial y} \quad . \end{aligned}$$

Da nun f nicht frei von y sein kann, so folgt aus 4) und 2)

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} = 0 \quad ;$$

also enthält $\mathfrak{F}$ die Veränderliche x nicht, w. z. b. w.*).

*) Statt dieses Beweises hätte auf den Satz 2. Band, 4. Buch, § 4, Nr. 5 verwiesen werden können; wir haben es vorgezogen, einen selbständigen Beweis für den einfachsten Fall jenes allgemeinen Satzes zu geben und bemerken, daß der Gedankengang dieses Beweises sich auch auf den allgemeinen Satz anwenden läßt. Vgl. u. a. Baltzer, Determinanten, § 12.

Aus der Gleichung $\mathfrak{F}(f) = C$ folgt $f = c$, worin c eine willkürliche Konstante bezeichnet. Daher ist das allgemeine Integral $F = C$ von $f = c$ nicht wesentlich verschieden. Wir geben dieser Tatsache durch den Satz Ausdruck: Eine Differentialgleichung erster Ordnung hat **nur ein** allgemeines Integral.

7. Es sei $f(x, y, C) = 0$ das allgemeine Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung. Die Werte des Parameters C für die Integralkurven, die einen gegebenen Punkt x, y enthalten, ergeben sich aus

$$f(x, y, C) = 0 \quad ,$$

wenn man darin x und y als gegeben betrachtet. Soviele verschiedene Auflösungen diese Gleichung hat, ebensoviele verschiedene Integralkurven gehen durch P. Diese Kurven haben im allgemeinen in P keine gemeinsame Tangente. Die n Tangenten dieser Kurven in P sind dem Punkte P durch die gegebene Differentialgleichung zugeordnet. Hieraus folgt: Wenn der Differentialquotient y' eine n-deutige Funktion von x und y ist, so ist auch der Parameter des allgemeinen Integrals n-deutig durch x und y bestimmt.

Beispiele. A) Aus der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

folgt sofort das allgemeine Integral

$$lx + ly = c \quad .$$

Hier erscheint c als unendlich vieldeutige Funktion von x und y. Geht man aber beiderseits zu den Logarithmanden über und bezeichnet e^c mit C, so erhält man für das allgemeine Integral die neue Gestalt

$$xy = C \quad ,$$

und hierin ist C eindeutig durch x und y bestimmt.

B) Für die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = 0$$

haben wir das allgemeine Integral

$$\arcsin x + \arcsin y = c \quad .$$

Hier ist ebenfalls c unendlich vieldeutig; der Summensatz ergibt, wenn $\sin c$ durch γ ersetzt wird,

$$x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} = \gamma \quad .$$

Durch Quadrieren erhält man, wenn man γ^2 durch C ersetzt,

$$x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)} = C \quad ,$$

und hierin ist C zweideutig, ebenso wie y' zweideutig ist. Hieraus folgt noch die rationale Gleichung

$$C^2 - 2(x^2 + y^2 - 2x^2y^2)\,C + (x^2 - y^2)^2 = 0 \quad .$$

8. Wenn durch eine Differentialgleichung y' n-deutig bestimmt ist, so werden im allgemeinen für unzählig viele Punkte zwei von den n Werten zusammenfallen; die Kurve dieser Punkte wollen wir als Verzweigungskurve der Differentialgleichung bezeichnen. Ist y' als entwickelte Funktion von x und y gegeben

$$y' = \varphi(x, y) \quad ,$$

so kann man ohne weiteres die Gleichung der Verzweigungskurve ablesen.

Hat man z. B.

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} \quad ,$$

so ist die Verzweigungskurve

$$x^2 - y^2 = 0 \quad ,$$

besteht also aus den beiden Geraden, die die Winkel der Achsen halbieren.

Bezeichnen $g_1, g_2, \ldots g_n$ die verschiedenen Werte, die y' für einen gegebenen Punkt x, y hat, so sind sie die Wurzeln der Gleichung

$$1) \qquad F \equiv (y' - g_1)(y' - g_2) \ldots (y' - g_n) = 0 \quad ;$$

diese gebe ausgerechnet

$$2) \qquad F \equiv y'^n + A_1 y'^{n-1} + \ldots + A_{n-1} y' + A_n = 0 \quad .$$

Hierin fallen zwei Wurzeln zusammen, wenn der Verein von 2) und der folgenden Gleichung besteht

$$3) \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = n y'^{n-1} + (n-1) A_1 y'^{n-2} + \ldots + A_{n-1} = 0 \quad .$$

Die Bedingung für den Verein von 2) und 3) erhält man nach SYLVESTERs Methode, indem man 2) und 3) der Reihe nach mit $y'^{n-2}, y'^{n-1}, \ldots y', 1$, bezw. $y'^{n-1}, y'^{n-2}, \ldots y', 1$ multipliziert, und aus diesen $2n - 1$ Gleichungen die linear darin vorkommenden Größen $y'^{2n-2}, y'^{2n-1}, \ldots y', 1$ entfernt; man erhält

$$\begin{vmatrix} 1 & A_1 & A_2 \ldots A_{n-1} & A_n & & \\ & 1 & A_1 \ldots A_{n-2} & A_{n-1} & & A_n \\ & & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot \\ & & 1 & A_1 & & A_2 \ldots A_n \\ n & (n-1)A_1 & (n-2)A_2 \ldots A_{n-1} & & & \\ & n & (n-1)A_1 \ldots 2A_{n-2} & A_{n-1} & & \\ & & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot \\ & & & 1 & & (n-1)A_1 \ldots A_{n-1} \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Dies ist die gesuchte Gleichung der Verzweigungskurve.

9. Der Parameter des allgemeinen Integrales einer Differentialgleichung erster Ordnung sei für jeden Punkt der Ebene n-deutig bestimmt; seine Werte für den Punkt x, y seien $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$. Bildet man die Gleichung

$$(C - \gamma_1)(C - \gamma_2) \ldots (C - \gamma_n) = 0 \quad ,$$

so sind die Koeffizienten eindeutige Funktionen von x und y. Es gibt unzählig viele Punkte der Ebene, für welche zwei Wurzeln dieser Gleichung zusammenfallen; die Kurve dieser Punkte nennen wir die Verzweigungskurve des allgemeinen Integrals.

Die Gleichung für C ergebe

$$\Phi \equiv C^n + a_1 C^{n-1} + a_2 C^{n-2} + \ldots + a_n = 0 \quad ;$$

alsdann erhält man die Gleichung dieser Verzweigungskurve in Form einer verschwindenden Determinante, wenn man C nach SYLVESTERs Methode aus

$$\Phi = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\Phi}{dC} = 0$$

entfernt. Diese Kurve hüllt entweder die Kurven Φ ein und hat in jedem ihrer Punkte mit einer der Kurven Φ eine gemeinsame Tangente, oder sie enthält die Doppelpunkte der Kurven

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

(2. Band, 4. Buch, § 11, Nr. 6).

Hieraus folgt sofort: Ist die Verzweigungskurve des allgemeinen Integrales die Einhüllende der Kurven $\Phi = 0$, so genügt sie in allen ihren Punkten der Differentialgleichung.

Ist die Verzweigungskurve dagegen die Kurve der Doppelpunkte des Kurvenvereins $\Phi = 0$, so genügt sie im allgemeinen der Differentialgleichung nicht. Denn im allgemeinen ist für einen Doppelpunkt einer Kurve $\Phi = 0$ der aus der Differentialgleichung folgende Wert von y' nicht unbestimmt, wie der aus dem allgemeinen Integrale folgende, sondern bestimmt.

Wenn die Gleichung der Verzweigungskurve des allgemeinen Integrals der Differentialgleichung genügt, so ist im allgemeinen für die Punkte derselben C nicht konstant; sie ist alsdann kein partikuläres Integral, sondern wird als singuläres Integral der Differentialgleichung bezeichnet.

10. Unabhängig von geometrischen Betrachtungen untersuchen wir nun auf analytischem Wege das Auftreten eines singulären Integrals, d. i. einer Gleichung, die der Differentialgleichung genügt, ohne ein partikuläres Integral zu sein.

Es sei $f(x, y, C) = 0$ das allgemeine Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung; wir machen dabei die ausdrückliche Voraussetzung, daß die Funktion f die Größen x, y und C nur in eindeutigen Verbindungen enthält.

Die Frage nach einem singulären Integrale können wir nun so stellen: Kann C als Funktion von x und y so gewählt werden, daß die Gleichung

$$1) \qquad f(x, y, C) = 0$$

der Differentialgleichung genügt?

Durch Differentiation folgt aus 1)

$$2) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial C}\left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y'\right) = 0 \quad .$$

Da 1) der Differentialgleichung genügt, so ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0 \quad .$$

Daher folgt aus 2)

$$\frac{\partial f}{\partial C}\left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y'\right) = 0 \quad .$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn entweder

$$3) \qquad \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' = 0 \quad ,$$

oder

$$\frac{\partial f}{\partial C} = 0 \quad .$$

Der Bedingung 3) entsprechen solche Änderungen von x und y, bei denen C konstant bleibt; sie führt somit zum allgemeinen Integrale. Für ein Integral, das in dem allgemeinen nicht enthalten ist, ergibt sich daher die Bedingung

$$4) \qquad \frac{\partial f}{\partial C} = 0 \quad .$$

Es kann der Fall eintreten, daß den Gleichungen

$$f(x, y, C) = 0 \, , \qquad \frac{\partial f}{\partial C} = 0$$

durch einen konstanten Wert von C genügt werden kann; in diesem Falle führt die Entfernung von C aus beiden Gleichungen nicht auf ein singuläres, sondern auf ein partikuläres Integral.

Eine fernere Ausnahme tritt in den zahlreichen Fällen ein, wenn für alle Punkte der durch Entfernung von C aus

$$f(x,y,C) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial C} = 0$$

sich ergebenden Kurve (für welche wir den Namen Verzweigungskurve auch dann beibehalten wollen, wenn f keine algebraische Funktion von C ist) die Gleichungen bestehen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad .$$

Denn dann erfüllen die Tangenten der Verzweigungskurve zwar die Gleichung 2), es läßt sich aber hieraus nicht schließen, daß sie der Differentialgleichung genügen.

Man hat daher nach der Entfernung von C aus $f = 0$ und $\partial f : \partial C = 0$ jedesmal erst nachzusehen, ob die zugehörigen Kurven, bezw. welche von ihnen, der Differentialgleichung genügen.

11. Es sei y' eine n-deutige Funktion von x und y; alsdann ist auch (Nr. 7) die Konstante des allgemeinen Integrales n-deutig durch x und y bestimmt. Wenn für einen Punkt P zwei von den Werten C unendlich wenig verschieden sind, so fallen auch die Tangenten an diese Kurven in P unendlich nahe zusammen. Dies sind aber zwei dem Punkte P durch die Differentialgleichung zugeordnete Richtungen. Wir schließen daher: Die Verzweigungskurve des allgemeinen Integrales ist zugleich Verzweigungskurve der Differentialgleichung.

Hiervon tritt eine Ausnahme ein, wenn ein Teil der Verzweigungskurve des allgemeinen Integrales eine Parallele zur Y-Achse ist; denn für jeden Punkt dieser Geraden ist $y' = \pm\infty$, es fallen also für diese Punkte nicht notwendig zwei Werte von y' zusammen.

12. Ein direkter Nachweis für den Zusammenhang der beiden Verzweigungskurven wird zugleich Auskunft darüber geben, ob die Verzweigungskurve der Differentialgleichung aus Kurven zusammengesetzt sein kann, die nicht zugleich der Verzweigungskurve des allgemeinen Integrales angehören. Die Differentialgleichung wird aus dem allgemeinen Integrale

$$1) \qquad \Phi(x,y,C) = 0$$

erhalten, indem man C aus 1) und aus

$$2) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot y' = 0$$

entfernt; das Ergebnis dieser Änderung werde mit (Φ) bezeichnet. Um die Verzweigungskurve der Differentialgleichung zu erhalten, hat man hierauf y' aus den Gleichungen

$$3) \qquad (\Phi) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial(\Phi)}{\partial y'} = 0$$

zu entfernen. Nun ist

$$4) \qquad \frac{\partial(\Phi)}{\partial y'} = \frac{\partial \Phi}{\partial C} \cdot \frac{\partial C}{\partial y'} \quad .$$

Die Gleichung 4) zerfällt in die beiden Gleichungen

$$5) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0 \quad ,$$

$$6) \qquad \frac{\partial C}{\partial y'} = 0 \quad .$$

Die Gleichungen 1) und 5) ergeben die Verzweigungskurve des allgemeinen Integrals. Die Gleichung 6) sagt aus, daß die durch 2) definierte Funktion C von y' nicht abhängt; sie ist daher nicht statthaft.

Wir fassen die Ergebnisse dieser Untersuchungen in folgenden Satz zusammen: Ist $F(x, y, y') = 0$ eine Differentialgleichung erster Ordnung und $\Phi(x, y, C) = 0$ das allgemeine Integral derselben, und sind x, y, y', bezw. x, y, C in den Funktionen F und Φ nur in eindeutigen Verbindungen enthalten, so kann die Resultante, die durch Entfernung von C aus

$$\Phi = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$$

hervorgeht, höchstens um einen Faktor, der eine ganze Funktion von x allein ist, von der Resultante verschieden sein, die durch Entfernung von y' aus den Gleichungen

$$F = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

entsteht. Wenn die erstere Resultante der Differentialgleichung genügt, so ist sie deren singuläres Integral, soweit sie nicht durch Spezialisierung der Konstanten C aus dem allgemeinen Integrale hervorgeht.

13. Für die Ableitung des singulären Integrales haben wir daher folgende Wege:

a) Ist das allgemeine Integral auf C reduziert, so bilde man die Bedingung dafür, daß zwei Werte für C zusammenfallen.

b) Sind in dem Integrale $\Phi(x, y, C) = 0$ die Größen x, y, C nur in eindeutigen Verbindungen enthalten, so entferne man C aus

$$\Phi = 0\,, \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0 \quad .$$

c) Ist die Differentialgleichung auf y' reduziert, so bilde man die Bedingung dafür, daß zwei Werte von y' zusammenfallen.

d) Sind in der Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$ die Größen x, y, y' nur in eindeutigen Verbindungen enthalten, so entferne man y' aus

$$F = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad .$$

Die auf einem dieser vier Wege erhaltenen Gleichungen hat man daraufhin zu prüfen, ob sie der Differentialgleichung genügen; soweit diese Bedingung erfüllt ist, hat man ein Integral der Differentialgleichung gefunden; dasselbe ist singulär, soweit es nicht durch Spezialisierung der Konstanten aus dem allgemeinen Integrale abgeleitet werden kann. Nach Anwendung der Methoden c) und d) hat man noch nachzusehen, ob die Gleichung $x = \gamma$ für irgend einen konstanten Wert γ der Differentialgleichung als singuläres oder partikuläres Integral genügt*).

14. Wir betrachten als Beispiele die in Nr. 4 aufgestellten Differentialgleichungen.

A) Die Differentialgleichung Nr. 4, 4)

$$F \equiv y'^2 - \frac{p}{2x} = 0$$

*) Auch ohne Kenntnis des allgemeinen Integrales kann man entscheiden, ob man nach den Methoden c) oder d) zu einem singulären oder partikulären Integrale gelangt ist. Vgl. u. a. E. Prix, Über singuläre Lösungen der Differentialgleichungen erster Ordnung. Progr. der Realschule zu Annaberg i. S. 1876.

hat das allgemeine Integral

$$\Phi \equiv (y - C)^2 - 2px = 0 \quad .$$

Man erhält

$$\frac{dF}{dy'} = 2y' , \qquad \frac{d\Phi}{dC} = -2(y - C) \quad .$$

Die Verzweigungskurve der Differentialgleichung ist

$$V \equiv -\frac{p}{2x} = 0 \quad ;$$

die des allgemeinen Integrals ist

$$W \equiv -2px = 0 \quad .$$

Das singuläre Integral ist $x = 0$.

B) Zu der Differentialgleichung

$$y' \equiv \frac{x}{x^2 - a^2}\left(y + \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}\right)$$

gehört das allgemeine Integral

$$y + \sqrt{x^2 + y^2 - a^2} = C \quad .$$

Aus beiden Gleichungen folgt das Integral

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0 \quad ;$$

es ist singulär, da für seine Punkte $C = y$, also veränderlich ist.

C) Das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$F \equiv y'^2 - \frac{y}{x} y' + \frac{2k^2 y^2 - x}{k^4 x y^2} = 0$$

ist

$$\Phi \equiv 3C^2 - (4x - k^2 y^2)C + x^2 = 0 \quad .$$

Die Bedingungen für das Zusammenfallen zweier Wurzeln y' bezw. C sind

$$\frac{1}{4k^4 x y^2}(8k^2 x y^2 - 4x^2 - k^4 y^4) = 0 \quad ,$$

bezw.

$$8k^2 x y^2 - 4x^2 - k^4 y^4 = 0 \quad .$$

Die letztere Gleichung ist das singuläre Integral. Man überzeugt sich leicht, daß es der Differentialgleichung genügt.

D) Die Differentialgleichung

$$F \equiv x y'^3 - y y'^2 + \frac{4}{27} = 0$$

hat das allgemeine Integral

$$\Phi \equiv C^3 - 3Cy + 2x = 0 \quad .$$

Die Bedingung für das Zusammenfallen zweier Wurzeln y' bezw. C,

$$x^2 - y^3 = 0 \quad ,$$

ist das singuläre Integral.

E) Die Differentialgleichung

$$y' = 2 + \sqrt{1 - \frac{y}{x}}$$

hat das allgemeine Integral

$$\varphi \equiv l\left(\sqrt{x^2 - xy} - y + 2x\right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arc\,tang} \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\sqrt{1 - \frac{y}{x}} + 1\right) = C \quad .$$

Für die Verzweigungskurve

$$x - y = 0$$

ist

$$y' = 1 \quad ,$$

während für die Punkte derselben aus der Differentialgleichung folgt

$$y' = 2 \quad .$$

Daher ist in diesem Falle die Verzweigungskurve kein Integral der Differentialgleichung.

F) Hat die Differentialgleichung die Form

$$1) \qquad y' = F + \sqrt{\Psi} \quad ,$$

wobei F und Ψ rationale Funktionen von x und y sind, so ist ihre Verzweigungskurve

$$\Psi = 0 \quad .$$

Der aus dieser Gleichung folgende Wert von y' stimmt im allgemeinen nicht mit dem aus der Differentialgleichung unter der Bedingung $\Psi = 0$ folgenden Werte

$$y' = F$$

überein: die Verzweigungskurve ist daher für Differentialgleichungen dieser Form im allgemeinen kein Integral. Das vorige Beispiel bildet hiervon einen besondern Fall. Ausnahmen bilden u. a. alle Differentialgleichungen, deren allgemeines Integral die Form hat

$$2) \qquad f + \sqrt{\varphi} = C \quad ,$$

wobei f und φ rationale Funktionen sind.

Zu 2) gehört die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{2\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \sqrt{\varphi} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}}{2\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sqrt{\varphi} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}} \quad ,$$

die auf die Form 1) gebracht wird, wenn man den Nenner rational macht.

§ 2. Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Veränderlichen.

1. Wir wenden uns zunächst zur Betrachtung einer Reihe von Differentialgleichungen erster Ordnung, bei denen die Herstellung des allgemeinen Integrals in geschlossener Form geleistet oder auf gewöhnliche Integrationen zurückgeführt werden kann.

Das Integral der Differentialgleichung $M dx + N dy = 0$ ist sofort gefunden, wenn die Veränderlichen getrennt sind, d. i. wenn M nur eine Funktion von x, und N nur eine Funktion von y ist; schreiben wir, um dies zu veranschaulichen, $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ für M und N, so haben wir die Differentialgleichung

$$\varphi(x)\, dx + \psi(y)\, dy = 0 \quad ,$$

und erhalten hieraus ohne weiteres

$$\int \varphi(x)\, dx + \int \psi(y)\, dy = C \quad .$$

Beispiel. Aus

$$2(a + x)\, dx + 3y^2\, dy = 0$$

folgt das allgemeine Integral

$$(a + x)^2 + y^3 = C \quad .$$

2. Wenn die Veränderlichen nicht getrennt sind, so gelingt es zuweilen durch Division oder Multiplikation die Trennung herbeizuführen. Aus

$$1) \qquad X_1 Y_1 \, dx + X_2 Y_2 \, dy = 0$$

folgt durch Division mit $X_2 Y_1$

$$\frac{X_1}{X_2} dx + \frac{Y_2}{Y_1} dy = 0 \quad .$$

Sind nun X_1, X_2 Funktionen von x allein, und Y_1, Y_2 Funktionen von y allein, so ist das allgemeine Integral von 1)

$$\int \frac{X_1}{X_2} dx + \int \frac{Y_2}{Y_1} dy = C \quad .$$

Beispiele.

A) $$x y^2 dx - (a - x)(b - y) dy = 0 \quad .$$

Hieraus folgt

$$\frac{x}{a - x} dx - \left(\frac{b}{y^2} - \frac{1}{y}\right) dy = 0 \quad ;$$

daher ist das allgemeine Integral

$$ly - a\,l(a - x) = \frac{xy - b}{y} + C \quad .$$

B) $$(1 + y^2) dx + (1 + x^2) dy = 0 \quad .$$

Diese Gleichung ergibt

$$\frac{dx}{1 + x^2} + \frac{dy}{1 + y^2} = 0 \quad ;$$

daher ist das allgemeine Integral

$$\operatorname{arc\,tang} x + \operatorname{arc\,tang} y = C \quad ,$$

oder

$$x + y = \gamma(1 - xy) \quad .$$

C) $$\sqrt{1 - y^2}\, dx + \sqrt{1 - x^2}\, dy = 0 \quad .$$

Hieraus folgt

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = 0 \quad ;$$

daher ist das allgemeine Integral

$$\arcsin x + \arcsin y = C \quad .$$

Gibt man der Differentialgleichung die Form

$$y' = -\sqrt{\frac{1 - y^2}{1 - x^2}} \quad ,$$

so erkennt man, daß die singulären Lösungen in der Gleichung enthalten sind

$$(1 - x^2)(1 - y^2) = 0 \quad .$$

Alle vier hierin enthaltenen Geraden genügen der Differentialgleichung; da keine durch Spezialisierung aus dem allgemeinen Integrale hervorgeht, so sind alle singuläre Lösungen.

3. Eine Reihe von einfachen geometrischen Aufgaben führen auf Differentialgleichungen erster Ordnung, in denen die Veränderlichen getrennt werden können.

A) Die Kurven zu bestimmen, bei denen die Subnormale eine gegebene Funktion $\varphi(y)$ der Ordinate ist.

Aus der Bedingung

$$y y' = \varphi(y)$$

folgt

$$\int \frac{y\,dy}{\varphi(y)} = x + C \quad .$$

B) Soll die Subnormale eine Funktion $\varphi(x)$ der Abscisse sein, so ist die Differentialgleichung

$$yy' = \varphi(x) \quad ,$$

und daher die Gleichung der gesuchten Kurve

$$y^2 = 2\int \varphi(x)\,dx + C \quad .$$

C) Wird verlangt, daß die Subtangente eine Funktion $\varphi(y)$ der Ordinate ist, so hat man

$$\frac{y}{y'} = \varphi(y) \quad ,$$

und daher das allgemeine Integral

$$\int \frac{\varphi(y)\,dy}{y} = x + C \quad .$$

D) Soll die Subtangente eine Funktion $\varphi(x)$ der Abscisse sein, so ist

$$\frac{y}{y'} = \varphi(x) \quad ,$$

also

$$ly = \int \frac{dx}{\varphi(x)} + C \quad .$$

E) Soll die Tangente eine Funktion der Ordinate sein, so ist

$$\frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2} = \varphi(y) \quad ;$$

hieraus folgt

$$y' = \frac{y}{\sqrt{\varphi^2 - y^2}} \quad .$$

Das allgemeine Integral ist

$$\int \frac{\sqrt{\varphi^2 - y^2}}{y}\,dy = x + C \quad .$$

F) Auf ähnliche, einfachste, durch Trennung der Veränderlichen sofort zu integrierende Differentialgleichungen führen die Aufgaben: Eine Kurve zu bestimmen, bei der die Polarsubtangente, die Polarsubnormale, oder der Winkel zwischen Tangente und Polabstand eine gegebene Funktion des Polabstands oder des Polwinkels ist.

G) Soll der von einem Kurvenbogen, der Abscissenachse einer festen Ordinate und der Ordinate eines laufenden Kurvenpunktes begrenzte Abschnitt einer Kurve eine gegebene Funktion $\varphi(y)$ der Endordinate sein, so hat man die Differentialgleichung

$$y\,dx = \varphi'(y)\,dy \quad ,$$

woraus folgt

$$\int \frac{\varphi'(y)}{y}\,dy = x + C \quad .$$

Wird verlangt, daß der Abschnitt eine gegebene Funktion der Endabscisse sei, so führt die Aufgabe auf keine Differentialgleichung.

4. Wenn in der Gleichung

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

M und N ganze homogene Funktionen von x und y vom Grade n sind, so gelingt die Trennung durch die Ersetzung $y = zx$. Da in jedem Gliede von M und N die Anzahl der veränderlichen Faktoren n ist, so folgt, daß nach der Ersetzung M und N in Produkte von x^n mit ganzen Funktionen von z

übergehen. Werden dieselben mit $M(z)$ und $N(z)$ bezeichnet, und bemerkt man, daß

$$dy = z\,dx + x\,dz \quad ,$$

so erhält man für z und x die Differentialgleichung

$$M(z)\,dx + N(z)\,(z\,dx + x\,dz) = 0 \quad .$$

Nach der Trennung der Veränderlichen folgt hieraus das allgemeine Integral

$$lx = -\int \frac{N(z)}{M(z) + z\,N(z)}\,dz + C \quad .$$

Durch die Ersetzung folgt aus der gegebenen Differentialgleichung

$$y' = -\frac{M(z)}{N(z)} = M\left(\frac{y}{x}\right) : N\left(\frac{y}{x}\right) \quad .$$

Umgekehrt: Wenn es gelingt, y' als Funktion von $y : x$ darzustellen, so werden die Veränderlichen durch die Ersetzung $y = zx$ getrennt; denn ist

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad ,$$

so liefert die Ersetzung

$$z\,dx + x\,dz = \varphi(z)\,dx \quad ;$$

daher ist das allgemeine Integral

$$lx = \int \frac{dz}{\varphi(z) - z} + C \quad .$$

5. Dieselbe Ersetzung führt auch bei der Differentialgleichung zum Ziele

$$y' = \frac{y}{x} + f(x)\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad .$$

Denn man erhält

$$x\,dz = f(x)\,\varphi(z)\,dx \quad ,$$

und daher das allgemeine Integral

$$\int \frac{dz}{\varphi(z)} = \int \frac{f(x)}{x}\,dx + C \quad .$$

6. Beispiele. A) Die Kurve zu bestimmen, bei welcher die Tangente der Geraden parallel ist, die den Winkel des Polabstands mit der Ordinatenachse halbiert. Bezeichnet ψ den halben Polwinkel, so soll sein

$$y' = \operatorname{tang}(45^0 + \psi) = \frac{\cos\psi + \sin\psi}{\cos\psi - \sin\psi} = \frac{1 + \sin 2\psi}{\cos 2\psi} \quad .$$

Daher hat man die Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{x}\left(y + \sqrt{y^2 + x^2}\right) \quad .$$

Die Ersetzung $y = zx$ liefert

$$xz' + z = z + \sqrt{z^2 + 1} \quad ,$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = \frac{dx}{x} \quad ;$$

hieraus folgt das allgemeine Integral

$$l\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right) = lx + C \quad .$$

Denkt man sich C als Logarithmus einer andern Konstanten, die wieder mit C bezeichnet werden kann, so erhält man

$$z + \sqrt{z^2 + 1} = Cx \quad .$$

Setzt man rückwärts $z = y : x$, so ergibt sich

$$Cx^2 = y + \sqrt{y^2 + x^2} \quad .$$

Hieraus folgt die rationale Gleichung

$$C^2 x^2 - 2Cy = 1 \quad .$$

Ersetzt man hier C durch $1 : C$, so erhält man das allgemeine Integral

$$C^2 + 2Cy = x^2 \quad ,$$

in Übereinstimmung mit Nr. 4, 7).

B) Die Strecke OS_2, die eine Kurventangente von der Ordinatenachse abschneidet, ist bekanntlich $y - xy'$; ist μ der Winkel, unter dem sie von P' aus gesehen wird, so ist $\operatorname{tang}\mu = y : x - y'$. Wird nun die Kurve verlangt, deren Tangente in P lotrecht zu $P'S_2$ ist, so ergibt sich für dieselbe die Differentialgleichung

$$1) \qquad y' = 1 : \left(\frac{y}{x} - y'\right) \quad .$$

Hieraus folgt für y' eine quadratische Gleichung, und durch deren Auflösung

$$2) \qquad y' = \frac{y}{2x} + \sqrt{\frac{y^2}{4x^2} - 1} \quad .$$

Die Ersetzung $y = zx$ führt zu

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dz}{\frac{1}{2}z - \sqrt{\frac{1}{4}z^2 - 1}} \quad ,$$

oder, wenn rechts der Nenner rational gemacht wird,

$$\frac{dx}{x} = -\left(\tfrac{1}{2}z + \sqrt{\tfrac{1}{4}z^2 - 1}\right) dz \quad .$$

Die Integration ergibt

$$-lx = \tfrac{1}{4}z^2 + \tfrac{1}{2}z\sqrt{\tfrac{1}{4}z^2 - 1} + l\left(\tfrac{1}{2}z - \sqrt{\tfrac{1}{4}z^2 - 1}\right) + C \quad .$$

Hieraus folgt schließlich, wenn C geeignet geändert wird,

$$3) \qquad 4x^2 l\left(y + \sqrt{y^2 - 4x^2}\right) = Cx^2 - y^2 - y\sqrt{y^2 - 4x^2} \quad .$$

Aus 2) folgt die Verzweigungskurve für y'

$$4) \qquad y^2 - 4x^2 = 0 \quad .$$

Aus dieser Gleichung folgt $y' = \pm 2$; setzt man dies und $y = \pm 2x$ in 1) oder 2) ein, so werden diese Gleichungen nicht identisch; folglich ist 4) kein Integral.

7. In der Differentialgleichung

$$1) \qquad (ax + by + c)\,dx + (a'x + b'y + c')\,dy = 0$$

setzen wir

$$x = u + \alpha\,, \qquad y = v + \beta$$

und erhalten

$$ax + by + c = au + bv + a\alpha + b\beta + c \quad ,$$
$$a'x + b'y + c' = a'u + b'v + a'\alpha + b'\beta + c' \quad .$$

Werden nun α und β so gewählt, daß

$$2)\qquad \begin{cases} a\alpha + b\beta = -c \quad , \\ a'\alpha + b'\beta = -c' \quad , \end{cases}$$

so erhält man die integrierbare Gleichung

$$3)\qquad (au + bv)\,du + (a'u + b'v)\,dv = 0 \quad .$$

Die Gleichungen 2) führen auf unendliche Werte von α und β, wenn $ab' - a'b = 0$; wird $a' = na$ gesetzt, so ist alsdann $b' = nb$, und daher $a'x + b'y = n(ax + by)$.

Setzt man jetzt $ax + by = z$, so wird

$$b\,dy = dz - a\,dx \quad ,$$

und man erhält die Differentialgleichung

$$b(z + c)\,dx + (nz + c')(dz - a\,dx) = 0 \quad ,$$

wo sich die Veränderlichen leicht trennen lassen*).

8. Als lineare Differentialgleichungen erster Ordnung bezeichnet man die Gleichungen von der Form

$$1)\qquad y' + Py = Q \quad ,$$

wenn darin P und Q Funktionen von x allein sind. Die Gleichung heißt homogen, wenn $Q = 0$ ist; alsdann lassen sich die Veränderlichen sofort sondern, und man erhält das allgemeine Integral

$$2)\qquad ly = -\int P\,dx + C \quad .$$

Wir wollen nun versuchen, das allgemeine Integral der Gleichung 1) dadurch zu erhalten, daß wir in 2) die willkürliche Konstante C durch eine Funktion von x ersetzen (Variation der Konstanten).

Ersetzen wir in 2) C durch z und differenzieren, so ergibt sich

$$y' = -Py + z'y \quad .$$

Dieser Wert wird in 1) eingesetzt und liefert für z die Gleichung $z'y = Q$, oder, wenn y hierin gemäß der Gleichung 2) durch z und x ersetzt wird,

$$3)\qquad e^z\,dz = Q\,e^{\int P\,dx}\,dx \quad .$$

Hieraus folgt für z das allgemeine Integral

$$e^z = \int Q\,e^{\int P\,dx}\,dx + C \quad .$$

Daher folgt schließlich das allgemeine Integral der linearen Differentialgleichung

$$4)\qquad y = e^{-\int P\,dx}\left(C + \int Q\,e^{\int P\,dx}\,dx\right) \quad .$$

9. Beispiele. A) Die Kurven zu bestimmen, deren Tangenten von der Ordinatenachse das geometrische Mittel der Abscisse und einer gegebenen Strecke a abschneiden.

Die Differentialgleichung des Problems ist

$$y - xy' = \sqrt{ax} \quad ,$$

oder

$$y' - \frac{1}{x}\,y = -\sqrt{\frac{a}{x}} \quad .$$

*) Boole, A treatise on differential equations, 4. Aufl., London 1877, S. 36.

Diese Gleichung ist linear; es ist $P = -1 : x$, $Q = -\sqrt{a : x}$, und daher das allgemeine Integral

$$y = e^{\int \frac{dx}{x}} \left(C - \int \sqrt{\frac{a}{x}} e^{-\int \frac{dx}{x}} dx \right) \quad .$$

Nach Ausführung der beiden Integrationen erhält man

$$y = Cx + 2\sqrt{ax} \quad .$$

B) Aus der Gleichung

$$(a + \tfrac{1}{2}y')y = (b - x)y'$$

folgt

$$b - x - \tfrac{1}{2}y = ay \cdot \frac{dx}{dy} \quad ,$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{ay} \cdot x = \frac{1}{a}\left(\frac{b}{y} - \frac{1}{2}\right) \quad .$$

Vergleicht man dies mit Nr. 8, 1), so hat man x, y, P, Q durch $y, x, \frac{1}{ay}$, $\frac{1}{a}\left(\frac{b}{y} - \frac{1}{2}\right)$ zu ersetzen und erhält

$$\int P dy = \frac{1}{a} ly \,, \qquad e^{\int P dy} = y^{\frac{1}{a}}$$

$$\int Q e^{\int P dy} dy = \frac{b}{a} \int y^{\frac{1}{a} - 1} dy - \frac{1}{2a} \int y^{\frac{1}{a}} dy$$

$$x = b + C y^{-\frac{1}{a}} - \frac{1}{2a + 2} y \quad .$$

10. Das allgemeine Integral einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung kann auch auf einem andern Wege gefunden werden, den wir ebenfalls angeben wollen. Man versucht, die Aufgabe dadurch auf einfachere zurückzuführen, daß man y durch das Produkt uv zweier noch unbestimmter Funktionen von x ersetzt. Hierdurch erhält man die Gleichung

$$1) \qquad uv' + vu' + Puv = Q \quad .$$

Bestimmt man nun u aus der Gleichung

$$2) \qquad u' + Pu = 0 \quad ,$$

so bleibt zur Bestimmung von v die Gleichung übrig

$$3) \qquad uv' = Q \quad .$$

Da es bei der Integration von 2) nur darauf ankommt, irgend eine dieser Gleichung entsprechende Funktion von x zu erhalten, so kann man der willkürlichen Konstanten des allgemeinen Integrals von 2) einen solchen besondern Wert geben, daß das Integral möglichst einfach wird. Die willkürliche Konstante des allgemeinen Integrals der Gleichung 1) tritt erst mit der Integration von 3) ein.

Die Gleichung 2) stimmt mit Nr. 8, 1) für den Fall $Q = 0$, überein; und die Gleichung 3) ist von der Gleichung Nr. 8, 4) nicht verschieden, wenn man y durch u und z durch v ersetzt.

11. Die nicht lineare Differentialgleichung

$$1) \qquad f'(y)\frac{dy}{dx} + f(y)P = Q \quad ,$$

worin P und Q wieder Funktionen von x allein sind, läßt sich in eine lineare verwandeln; setzt man nämlich $f(y) = z$, so ist $f'(y)\,dy = dz$ und man erhält

$$z' + Pz = Q \quad .$$

Auf diese Gleichung führt z. B. die folgende

$$2)\qquad y' + Py = Qy^m \quad .$$

Dividiert man nämlich durch $-y^m : (m-1)$, so erhält man

$$-(m-1)y^{-m}y' - (m-1)Py^{-(m-1)} = -(m-1)Q \quad ;$$

und diese Gleichung stimmt mit 1) überein, wenn man $f(y)$, P, Q durch $y^{-(m-1)}$, $-(m-1)P$, $-(m-1)Q$ ersetzt.

12. Das allgemeine Integral der nicht linearen Gleichung*)

$$1)\qquad y' + Py = Qy^2 + R$$

läßt sich angeben, wenn man ein Integral $y = u$ dieser Gleichung kennt. Setzt man nämlich das allgemeine Integral in der Form voraus

$$y = u + v \quad ,$$

worin v eine noch zu bestimmende Funktion bezeichnet, so hat man für u und v die Gleichung

$$u' + v' + Pu + Pv = Qu^2 + 2Quv + Qv^2 + R \quad .$$

Nach der Voraussetzung ist

$$u' + Pu = Qu^2 + R \quad ,$$

daher bleibt zur Bestimmung von v die Gleichung

$$2)\qquad v' + (P - 2Qu)v = Qv^2 \quad .$$

Diese Gleichung fällt unter Nr. 11, 2) für $m = 2$.

Beispiele. A) Der Gleichung

$$y' + Py = Qy^2 + 1 + Px - Qx^2$$

wird durch $y = x$ genügt. Daher ist jetzt $u = x$, und für v hat man

$$v' + (P - 2Qx)v = Qv^2 \quad .$$

B) $$y' + Py = y^2 + P' \quad ,$$

wobei P' für $dP : dx$ gesetzt ist.

Der Gleichung wird durch $y = P$ genügt; daher ist das allgemeine Integral $y = P + v$, wenn v durch die Gleichung bestimmt wird

$$v' - Pv = Qv^2 \quad .$$

13. Die Gleichung

$$1)\qquad xy' - ay + by^2 = cx^n$$

ist unter der Form Nr, 12, 1) enthalten. Setzen wir versuchsweise $y = kx^{\frac{n}{2}}$, so erhalten wir

$$\frac{n}{2}kx^{\frac{n}{2}} - akx^{\frac{n}{2}} + bk^2x^n = cx^n \quad .$$

Diese Gleichung ist identisch erfüllt, wenn

$$n = 2a\,, \qquad k = \sqrt{c : b} \quad .$$

Im Falle $n = 2a$ kann also nach Nr. 12 das allgemeine Integral gefunden werden.

Durch geeignete Ersetzungen kann man in einer Reihe von Fällen Differentialgleichungen von der Form 1), in denen n von $2a$ verschieden ist, auf eine Gleichung derselben Form zurückführen, in der $n = 2a$ ist.

---

*) Sturm, Cours d'Analyse, 5. Aufl., Bd. II, Paris 1877, S. 51.

Führt man nämlich in 1) eine neue Veränderliche u ein, indem man setzt

$$y = A + \frac{x^n}{u} \quad ,$$

so erhält man

$$2) \qquad -aA + bA^2 + (n - a + 2bA)\frac{x^n}{u} + b\frac{x^{2n}}{u^2} - \frac{x^{n+1}}{u^2}u' = cx^n \quad .$$

Man kann nun A so wählen, daß $bA^2 - aA = 0$, also entweder $A = a : b$, oder $A = 0$.

Die Annahme $A = a : b$ ergibt die Änderung

$$3) \qquad y = \frac{a}{b} + \frac{x^n}{u} \quad ,$$

und die geänderte Gleichung ist

$$(n + a)\frac{x^n}{u} + b\frac{x^{2n}}{u^2} - \frac{x^{n+1}}{u^2}u' = cx^n \quad ,$$

Durch Multiplikation mit $u^2 : x^n$ folgt hieraus

$$4) \qquad xu' - (a + n)u + cu^2 = bx^n \quad .$$

Diese Gleichung stimmt im wesentlichen mit 1) überein; wendet man auf sie die Ersetzung an

$$5) \qquad u = \frac{a + n}{c} + \frac{x^n}{v} \quad ,$$

so ergibt sich

$$xv' - (a + 2n)v + bv^2 = cx^n \quad .$$

Durch Wiederholung dieses Verfahrens erhält man nach k Ersetzungen

wenn k ungerade: $xw' - (a + kn)w + cw^2 = bx^n$,

wenn k gerade: $xw' - (a + kn)w + bw^2 = cx^n$.

Kann man die natürliche Zahl k so wählen, daß $n = 2(a + kn)$, ist also $(n - 2a) : 2n$ eine natürliche Zahl, so kann das allgemeine Integral von 1) auf dem angegebenen Wege gefunden werden.

Die andre Annahme $A = 0$ liefert die Ersetzung $y = x^n : u$ und die geänderte Gleichung

$$6) \qquad xu' - (n - a)u + cu^2 = bx^n \quad .$$

Wiederholte Aufwendung ergibt,

wenn k ungerade ist: $xw' - (kn - a)w + cw^2 = bx^n$,

wenn k gerade ist: $xw' - (kn - a)w + bw^2 = cx^n$.

Diese Gleichung kann in geschlossener Form integriert werden, wenn $(n + 2a) : 2n$ eine natürliche Zahl ist. Daher folgt: Das allgemeine Integral von 1) kann gefunden werden, wenn $(n \pm 2a) : 2n$ eine natürliche Zahl ist.

Die Riccatische Differentialgleichung

$$y' + by^2 = cx^m$$

kann auf die Form der Gleichung 1) gebracht werden; setzt man nämlich $y = z : x$, so erhält man

$$xz' - z + bz^2 = cx^{m+2} \quad .$$

Die Riccatische Gleichung ist somit integrierbar, wenn entweder $(m+4) : (2m+4)$ oder $m : (2m + 4)$ eine natürliche Zahl ist.

14. Die Differentialgleichung

$$1) \qquad M\,dx + N\,dy = 0 \quad ,$$

kann sofort in geschlossener Form integriert werden, wenn die linke Seite das vollständige Differential

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy$$

einer Funktion $\varphi(x, y)$ ist; das allgemeine Integral ist alsdann

$$\varphi(x, y) = C \quad .$$

Es fragt sich nun zunächst, wie man erkennt, ob ein Differentialausdruck $M\,dx + N\,dy$ ein vollständiges Differential ist, und wie man von dem vollständigen Differentiale die Funktion φ ableitet.

Ist $M\,dx + N\,dy$ das vollständige Differential von $\varphi(x, y)$, so ist

$$2) \qquad M = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad N = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad .$$

Hieraus folgt die notwendige Bedingung

$$3) \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad ,$$

denn beide Seiten der Gleichung sind nach 2) gleich $\partial^2\varphi : \partial x\,\partial y$. Die Bedingung 3) ist aber auch hinreichend. Genügt nämlich die Funktion ψ der Bedingung

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M \quad ,$$

so ist

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad ,$$

also können N und $\partial\psi : \partial y$ nur um eine Größe verschieden sein, die x nicht enthält, mithin eine bestimmte Funktion von y allein ist. Bezeichnet man dieselbe mit Y, und setzt

$$\varphi = \psi + \int Y\,dy \quad ,$$

so ist

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad ,$$

w. z. b. w.

Eine Funktion ψ ergibt sich unmittelbar aus der Gleichung $M = \partial\psi : \partial x$ zu

$$\psi = \int M\,dx \quad ,$$

wo bei der Integration das in M enthaltene y als konstant zu betrachten ist; es genügt einen besondern Wert dieses Integrals zu nehmen.

Hiermit ist auch die zweite Frage, die Bestimmung der Funktion φ, und damit die Integration der Differentialgleichung erledigt.

Beispiel:

$$(x^2 - 4xy - 2y^2)\,dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)\,dy = 0 \quad .$$

Hier ist

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -4x - 4y = \frac{\partial N}{\partial x} \quad ,$$

also ist die linke Seite der Gleichung ein vollständiges Differential. Weiter folgt

$$\psi = \int (x^2 - 4xy - 2y^2)\,dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2y - 2xy^2 \quad .$$

Der Vergleich von N und

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = -2x^2 - 4xy$$

liefert

$$Y = N - \frac{\partial\psi}{\partial y} = y^2 \quad ;$$

daher ist

$$\varphi \equiv \tfrac{1}{3}x^3 - 2x^2y - 2xy^2 + \tfrac{1}{3}y^3 = C$$

das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung.

15. Wird der Differentialausdruck

$$1) \qquad M\,dx + N\,dy$$

durch Multiplikation mit der Funktion v in ein vollständiges Differential verwandelt, so bezeichnet man v als integrierenden Faktor von 1).

Für v ergibt sich zunächst die Bedingung

$$\frac{\partial(vM)}{\partial y} = \frac{\partial(vN)}{\partial x} \quad .$$

Führt man die Differentiationen aus, so erhält man nach geeigneter Umstellung

$$2) \qquad N\frac{\partial v}{\partial x} - M\frac{\partial v}{\partial y} = v\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \quad .$$

Dies ist eine partiale Differentialgleichung; ihre Auflösung ist im allgemeinen ein höheres Problem, als das, eine Differentialgleichung erster Ordnung zu integrieren. Im allgemeinen ist daher die Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung durch Aufsuchung eines integrierenden Faktors nicht lösbar; vielmehr wird man umgekehrt die partiale Differentialgleichung 2) für im wesentlichen gelöst erachten, nachdem man ihren Zusammenhang mit dem allgemeinen Integrale einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung erkannt hat, und hierauf werden wir bei Gelegenheit der partialen Differentialgleichungen zurückkommen.

Doch bleibt trotzdem die Untersuchung der integrierenden Faktoren auch für die Integration von Differentialgleichungen erster Ordnung von Bedeutung; denn alle Integrationsmethoden lassen sich auf die eine Methode, einen integrierenden Faktor zu bestimmen, zurückführen — und indem man umgekehrt von bestimmten Formen integrierender Faktoren ausgeht, kann man Gruppen von Differentialgleichungen aufstellen, die sich in geschlossener Form integrieren, oder auf einfache Integrationen zurückführen lassen. Wir werden später hierzu Beispiele geben.

16. Dem allgemeinen Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung kann man unzählig viele verschiedene Formen geben. So hat z. B.

$$3x^2dx + 2y\,dy = 0$$

das allgemeine Integral

$$x^3 + y^2 = C \quad ;$$

dasselbe kann aber auch durch

$$(x^3 + y^2)^n = C\,, \qquad l(x^3 + y^2) = C\,, \qquad \sin(x^3 + y^2) = C$$

u. s. w. ersetzt werden. Diesen verschiedenen Formen des Integrals entspringen verschiedene Formen des integrierenden Faktors; wir wollen nun nachweisen, wie man aus einem integrierenden Faktor die allgemeine Form finden kann, unter der jeder integrierende Faktor derselben Gleichung enthalten ist.

Ist v ein integrierender Faktor von

$$1)\qquad Mdx + Ndy = 0 \quad ,$$

so ist

$$2)\qquad vMdx + vNdy \equiv d\varphi \quad ,$$

und $\varphi = c$ ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung.

Multiplizieren wir 2) mit einer willkürlichen Funktion von φ, so erhalten wir

$$vF(\varphi)(Mdx + Ndy) = F(\varphi)\,d\varphi \quad .$$

Hierin ist die rechte Seite das vollständige Differential von

$$\int F(\varphi)\,d\varphi \quad ,$$

also ist auch die linke Seite ein vollständiges Differential, mithin ist $vF(\varphi)$ ein integrierender Faktor von 1). Wir haben daher: Ist v ein integrierender Faktor der Gleichung $Mdx + Ndy = 0$, und $\varphi = c$ das allgemeine Integral, so ist das Produkt aus v und einer willkürlichen Funktion von φ ebenfalls ein integrierender Faktor.

Es sei nun außer v auch V ein integrierender Faktor; um nachzuweisen, daß $V = vF(\varphi)$, zeigen wir, daß der Quotient $V : v$ eine Funktion von φ ist. Die notwendige und ausreichende Bedingung hierfür ist das Verschwinden der Determinante

$$R \equiv \frac{\partial(V:v)}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial(V:v)}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad .$$

Differenziert man rechts die Quotienten, so entsteht

$$v^2 R \equiv v\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}\right) - V\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad .$$

Nach der Voraussetzung ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = Nv\,, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = Mv \quad ,$$

und daher

$$vR \equiv v\left(N\frac{\partial V}{\partial x} - M\frac{\partial V}{\partial y}\right) - V\left(N\frac{\partial v}{\partial x} - M\frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad .$$

Nach Nr. 15, 2) ist nun

$$N\frac{\partial V}{\partial x} - M\frac{\partial V}{\partial y} = V\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \quad ,$$

$$N\frac{\partial v}{\partial x} - M\frac{\partial v}{\partial y} = v\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \quad ;$$

daher ergibt sich

$$vR \equiv 0\,, \quad \text{d. i. } R \equiv 0\,, \quad \text{w. z. b. w.}$$

17. Hat man zwei integrierende Faktoren v und V einer Differentialgleichung erster Ordnung aufgefunden, so kann man das allgemeine Integral der Gleichung angeben, ohne eine Integration auszuführen. Denn ist $\varphi = c$ ein allgemeines Integral, so ist $V = vF(\varphi)$, mithin ist

$$\frac{V}{v} = F(\varphi) = c$$

ebenfalls ein allgemeines Integral; wenn man statt F irgend eine Funktion von F setzt, so kann man von dem so gefundenen allgemeinen Integrale unter Umständen zu einfachern Formen übergehen.

18. Wir schlagen nun den in Nr. 15 angedeuteten Weg ein und bestimmen zu integrierenden Faktoren von gegebener Form die zugehörigen Differentialgleichungen.

A) Soll der integrierende Faktor v eine Funktion von x allein sein, so ist

$$N\frac{\partial v}{\partial x} = v\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) ,$$

$$\frac{\partial l v}{\partial x} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) .$$

Die linke Seite ist eine beliebige Funktion φ von x allein; daher ergibt sich zu einem beliebigen N das zugehörige M aus

$$1) \qquad M = \varphi\int N\,dy + \int\frac{\partial N}{\partial x}\,dy + \chi ,$$

wo bei den Integrationen x für beständig gilt, und χ eine neue willkürliche Funktion von x ist. Enthält N nur y, so geht 1) über in

$$2) \qquad M = \varphi\int N\,dy + \chi ;$$

enthält dagegen N nur x, so hat man

$$3) \qquad M = \left(\varphi N + \frac{\partial N}{\partial x}\right)y + \chi .$$

B) Soll der integrierende Faktor eine Funktion von y allein sein, so vertausche man in A) die Zeichen x, y, M, N gegen y, x, N, M.

C) Ist $N = 1$, so ergibt sich bei A)

$$M = y\cdot\varphi + \chi ;$$

die lineare Gleichung

$$y' + \varphi\cdot y + \chi = 0$$

hat also eine Funktion von x als integrierenden Faktor. Sie stimmt mit der in Nr. 8 gegebenen Form überein, wenn man φ und χ durch P und $-Q$ ersetzt. Für den integrierenden Faktor hat man

$$l v = \int P\,dx , \qquad v = e^{\int P\,dx} .$$

Das Integral erhält man zunächst in der Form

$$1) \qquad \psi \equiv \int e^{\int P\,dx}(Py - Q)\,dx + Y = 0 ,$$

wobei Y eine Funktion von y allein ist; der Vergleich

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = e^{\int P\,dx}\cdot N$$

ergibt, daß Y eine beständige Zahl C sein muß. Beachtet man weiter, daß

$$\int y\,e^{\int P\,dx}\cdot P\,dx = y\,e^{\int P\,dx} ,$$

so erkennt man die Übereinstimmung von 1) mit Nr. 8, 4).

19. Ist der integrierende Faktor v eine Funktion des Produkts xy, so ist

$$\frac{v'}{v} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{Ny - Mx} ,$$

also die rechte Seite eine Funktion von xy.

Beispiel. $$y F(xy)\,dx + x\,G(xy)\,dy = 0 \quad .$$

Hier ist
$$M = y F(xy)\,, \quad N = x\,G(xy) \quad ,$$
und somit
$$\frac{v'}{v} = \frac{xy\,[F'(xy) - G'(xy)] + F(xy) - G(xy)}{xy\,[G(xy) - F(xy)]} \quad ,$$
$$\frac{dv}{v} = -\frac{F'(xy) - G'(xy)}{F(xy) - G(xy)}\,d(xy) - \frac{d(xy)}{xy} \quad ,$$
$$v = 1 : xy\,[F(xy) - G(xy)] \quad .$$

20. Ist der integrierende Faktor eine homogene Funktion n-ten Grades, also von der Form
$$x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad ,$$
so ergibt sich
$$1) \qquad \frac{v'}{v} = \frac{x^2\left(\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}\right) + n\,N x}{x M + y N} \quad ;$$
also muß die rechte Seite dieser Gleichung eine Funktion von $y : x$ sein.

Beispiel. Ist die Differentialgleichung in Bezug auf x und y homogen (und in Bezug auf y' natürlich wieder linear), so kann man sie durch Division in die Form bringen
$$M\left(\frac{y}{x}\right) dx + N\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0 \quad .$$
Hier ist
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x} M', \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} N' \quad ,$$
und daher
$$\frac{x^2\left(\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}\right) + n\,N x}{x M + y N} = \frac{(n N - M') - \dfrac{y}{x} N'}{M + \dfrac{y}{x} N} \quad .$$

Die Differentialgleichung läßt also homogene integrierende Faktoren jeden Grades zu.

21. Um die Gleichung zu integrieren
$$1) \qquad Q\,dx + R\,dy + S(x\,dy - y\,dx) = 0 \quad ,$$
worin Q, R und S homogene Funktionen sind, und zwar Q und R vom Grade m, S vom Grade n, bestimme man einen homogenen integrierenden Faktor vom Grade $-n-2$ für die Gleichung
$$Q\,dx + R\,dy = 0 \quad .$$
Gibt man der Differentialgleichung die Form
$$Q\,dx + R\,dy - S x^2\, d\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \quad ,$$
so erkennt man sofort, daß dieser Faktor die linke Seite in die Summe zweier vollständigen Differentiale verwandelt.

In die Form 1) läßt sich die Gleichung
$$(A + A'x + A''y)(x\,dy - y\,dx) - (B + B'x + B''y)\,dy + (C + C'x + C''y)\,dx = 0$$
durch eine geschickte Änderung bringen.

Setzt man nämlich

$$x = \xi + \alpha\,, \quad y = \eta + \beta \quad ,$$

so erhält man eine Gleichung von der Form

$$(a\,\xi + a'\,\eta)(\xi\,d\eta - \eta\,d\xi) - (b\,\xi + b'\,\eta)\,d\eta + (c\,\xi + c'\,\eta)\,d\xi = 0 \quad ,$$

wenn α und β die Bedingungen erfüllen

$$\alpha(A + A'\alpha + A''\beta) - (B + B'\alpha + B''\beta) = 0$$
$$-\beta(A + A'\alpha + A''\beta) + (C + C'\alpha + C''\beta) = 0 \quad .$$

Wir schreiben hierfür

$$A + A'\alpha + A''\beta = \frac{B + B'\alpha + B''\beta}{\alpha} = \frac{C + C'\alpha + C''\beta}{\beta} \quad .$$

Setzen wir den gemeinschaftlichen Wert dieser drei Ausdrücke $= \lambda$, so ergibt sich

$$A - \lambda + A'\alpha + A''\beta = 0 \quad ,$$
$$B + (B' - \lambda)\,\alpha + B''\beta = 0 \quad ,$$
$$C + C'\alpha + (C'' - \lambda)\,\beta = 0 \quad .$$

Der Verein dieser Gleichungen wird durch das Verschwinden der Determinante bedingt

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & A' & A'' \\ B & B' - \lambda & B'' \\ C & C' & C'' - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Hat man eine Wurzel λ dieser kubischen Gleichung gefunden, so ergeben sich α und β z. B. aus

$$A - \lambda + A'\alpha + A''\beta = 0 \quad \text{und} \quad B + (B' - \lambda)\,\alpha + B''\beta = 0 \quad .$$

---

22. Die bisher integrierten Differentialgleichungen erster Ordnung sind vom e r s t e n G r a d e, d. h. sie enthalten nur die erste Potenz von y'. Wir geben nun einige besondere Regeln, die bei der Integration von Differentialgleichungen von höherem Grade zu beachten sind.

Zerfällt die Gleichung

$$F(x, y, y') \equiv A_0 y'^n + A_1 y'^{n-1} + A_2 y'^{n-2} + \ldots + A_{n-1} y' + A_n = 0 \quad ,$$

in welcher A_0, A_1, ... A_n eindeutige Funktionen von x und y bezeichnen, in ein Produkt von Funktionen minderen Grades von y', deren Koeffizienten eindeutige Funktionen von x und y sind, so zerfällt die Differentialgleichung in ebensoviele einzelne Gleichungen, die dadurch hervorgehen, daß man die einzelnen Faktoren gleich Null setzt.

Gelingt es, $F(x, y, y')$ in rücksichtlich y' lineare Faktoren zu zerlegen

$$F \equiv A_0 (y' - f_1)(y' - f_2) \ldots (y' - f_n) = 0 \quad ,$$

und sind darin f_1, f_2, ... f_k ein System konjugierter Werte derselben k-deutigen Funktion f, so hat man die Gleichung zu integrieren

$$y' - f = 0 \quad ;$$

hierdurch sind die ersten k Faktoren erledigt. Bilden f_{k+1}, ... f_l ein System konjugierter Werte einer mehrdeutigen Funktion g, so hat man ferner die Gleichung zu integrieren

$$y' - g = 0 \quad ,$$

u. s. w. Die vollständige Integration der Differentialgleichung besteht aus den allgemeinen und den singulären Integralen der Gleichungen

$$y' - f = 0\,, \quad y' - g = 0\,, \quad \text{u. s. w.}$$

23. Man kann auch zum Ziele gelangen, indem man die Gleichung $F(x, y, y') = 0$ nach y auflöst; es ergebe sich

$$1)\qquad y = f(x, y') \quad .$$

Diese Gleichung differenzieren wir und erhalten

$$2)\qquad y' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \frac{dy'}{dx} \quad .$$

In dieser letzten Gleichung kommen nur die Größen x, y', $dy' : dx$ vor, und zwar letztere im ersten Grade. Der Verein des allgemeinen Integrals der Gleichung 2)

$$\varphi(x, y') = C \quad ,$$

und der gegebenen Gleichung $y = f(x, y')$ ist das allgemeine Integral der letztern. Wenn es möglich ist, so entfernt man y' aus diesen beiden Gleichungen, und erhält dann das allgemeine Integral in der bisher üblichen Form $\psi(x, y, C) = 0$.

Man kann auch aus der gegebenen Gleichung x berechnen. Ergibt sich

$$3)\qquad x = f(y, y') \quad ,$$

so erhält man durch Differentiation

$$1 = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \frac{dy'}{dx} \quad .$$

Ersetzt man hier $dy' : dx$ gemäß der Identität

$$\frac{dy'}{dy} = \frac{dy'}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{dy'}{dx} \cdot \frac{1}{y'} \quad ,$$

so erhält man

$$4)\qquad 1 = \frac{\partial f}{\partial y} y' + y' \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \frac{dy'}{dy} \quad ,$$

also eine Differentialgleichung für y, y' und $dy' : dy$. Das allgemeine Integral derselben sei

$$5)\qquad \varphi(y, y') = C \quad .$$

Der Verein der Gleichungen

$$\varphi(y, y') = C \quad \text{und} \quad x = f(y, y')$$

ist dann die Auflösung der gegebenen Gleichung: durch Entfernung von y' kann man dieselbe wieder in der üblichen Form darstellen.

24. Ist die Differentialgleichung linear in Bezug auf x und y, also von der Form

$$1)\qquad x\varphi(y') + y\psi(y') = \chi(y') \quad ,$$

so erhält man durch Differentiation

$$2)\qquad x\varphi' y'' + y\psi' y'' + \varphi + y'\psi = \chi' y'' \quad .$$

Multipliziert man 1) mit $\varphi' y''$, 2) mit φ und zieht ab, so folgt

$$(\psi\varphi' - \varphi\psi') y y'' - \varphi(\varphi + y'\psi) = y''(\chi\varphi' - \varphi\chi') \quad .$$

Setzt man hier

$$y' = p \,, \quad y'' = p\frac{dp}{dy} \quad ,$$

so erhält man

$$3)\qquad \left(\frac{1}{p}\varphi^2 + \varphi\psi\right)\frac{dy}{dp} + (\varphi\psi' - \psi\varphi')y = \varphi\chi' - \chi\varphi' \quad ,$$

also eine lineare Differentialgleichung.

Aus 3) erhält man y als Funktion von p; im Vereine mit 1) ist damit 1) integriert.

Man drückt nämlich entweder y aus 3) durch p aus und führt dies in 1) ein und hat dann das Integral in der Form

$$x = f(p)\,, \quad y = g(p) \quad ,$$

oder man drückt p aus 3) durch y aus und erhält dann aus 1)

$$x = F(y) \quad .$$

Beispiel. $$y'x + \frac{1}{n}y = a + by' + cy'^2 \quad .$$

Durch Differentiation entsteht

$$xy'' + \frac{n+1}{n}y' = by'' + 2cy'y'' \quad .$$

Entfernt man x aus beiden Gleichungen, so ergibt sich

$$yy'' - (n+1)y'^2 = (a - cy'^2)y'' \quad ,$$

oder

$$y\frac{dp}{dy} - (n+1)p = n(a - cp^2)\frac{dp}{dy} \quad ,$$

$$\frac{dy}{dp} - \frac{1}{(n+1)p}\cdot y = \frac{n(cp^2 - a)}{(n+1)p} \quad .$$

Vergleicht man dies mit

$$\frac{dy}{dp} + Py = Q \quad ,$$

so hat man

$$\int P\,dp = -\frac{1}{n+1}lp\,, \qquad e^{\int P\,dp} = p^{-\frac{1}{n+1}} \quad ,$$

$$\int Q\,e^{\int P\,dp}\,dp = \frac{n}{n+1}\int\left(cp - \frac{a}{p}\right)\cdot p^{-\frac{1}{n+1}}\,dp$$

$$= \frac{nc}{2n+1}p^{\frac{2n+1}{n+1}} + nap^{-\frac{1}{n+1}} \quad ,$$

$$y = p^{\frac{1}{n+1}}\left(C + \frac{nc}{2n+1}p^{\frac{2n+1}{n+1}} + nap^{-\frac{1}{n+1}}\right) \quad ,$$

$$y = Cp^{\frac{1}{n+1}} + \frac{nc}{2n+1}p^2 + na \quad .$$

Das allgemeine Integral ergibt sich durch Entfernung von p aus dieser Gleichung und aus

$$px + \frac{1}{n}y = a + bp + cp^2 \quad .$$

25. Durch Differentiation der Differentialgleichung

$$1) \qquad F(x, y, y') = 0$$

erhält man

$$2) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\frac{dy'}{dx} = 0 \quad .$$

Wenn es sich ereignet, daß

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'$$

identisch verschwindet, daß also

$$3) \qquad y' = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} \quad ,$$

so zerfällt die Gleichung 2) in die beiden Gleichungen

$$4) \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad ,$$

und

$$5) \qquad \frac{dy'}{dx} = 0 \quad .$$

Entfernt man y' aus 1) und 4), so erhält man (§ 1, Nr. 8) die **Verzweigungskurve** der Differentialgleichung, und damit das **singuläre Integral**. Das allgemeine Integral ergibt sich, indem man aus dem allgemeinen Integrale von 5)

$$y' = C \quad ,$$

und aus 1) y' entfernt; man erhält

$$F(x, y, C) = 0 \quad .$$

Beispiel. Die Kurve zu bestimmen, von deren Tangenten die beiden Koordinatenachsen die Strecke a abschneiden.

Die Differentialgleichung ist

$$6) \qquad xy' - y - \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0 \quad .$$

Hier ist

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y', \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -1 , \quad \text{also} \quad \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} = -y' \quad .$$

Das allgemeine Integral ist

$$Cx - y - \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}} = 0 \quad .$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden mit den Achsenabschnitten $a : \sqrt{1+C^2}$ und $-aC : \sqrt{1+C^2}$; die zwischen den Achsen liegende Strecke derselben ist in der Tat $= a$. Für das singuläre Integral bilden wir

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = x - \frac{a}{\sqrt{1+y'^2}^{\,3}} = 0 \quad .$$

Hieraus folgt

$$y' = \left(\frac{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad .$$

Dies in 6) eingesetzt, ergibt nach leichter Umgestaltung

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0 \quad ,$$

das singuläre Integral der Gleichung 6).

26. Das vorige Beispiel ist ein besonderer Fall der von CLAIRAUT bearbeiteten und nach ihm benannten Gleichung

$$1) \qquad y - xy' = f(y') \quad .$$

Für das allgemeine Integral ergibt sich der Verein der Gleichungen 1) und

$$2) \qquad y' = C \quad ,$$

also ist das allgemeine Integral

$$3) \qquad y = Cx + f(C) \quad .$$

Das singuläre Integral entsteht durch Entfernung von y' aus 1) und

$$4)\qquad x + \frac{df(y')}{dy'} = 0 \quad ,$$

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis der Entfernung von C aus 3) und aus der aus 3) durch Differentiation nach C hervorgehenden Gleichung.

27. Die Gleichung

$$1)\qquad y - 2\,x y' = y' f(y y')$$

liefert mit y multipliziert

$$2)\qquad y^2 - 2\,y y' \cdot x = y y' \cdot f(y y') \quad .$$

Setzt man $y^2 = z$, so ist $2\,y y' = z'$, und es ergibt sich

$$z - x z' = \tfrac{1}{2} z' f(\tfrac{1}{2} z') \quad ,$$

also eine CLAIRAUTsche Gleichung. Das allgemeine Integral von 1) ist daher

$$3)\qquad y^2 = 2\,C x + C f(C) \quad ,$$

das singuläre folgt durch Entfernung von y' aus 1) und aus

$$4)\qquad 1 + y'^2 \cdot \frac{df(y y')}{d(y y')} = 0 \quad .$$

28. Die Aufgabe: Die Kurve zu bestimmen, deren Normale eine gegebene Funktion f der von der Normalen auf der X-Achse abgeschnittenen Strecke ist, führt auf die Differentialgleichung

$$1)\qquad y \sqrt{1 + y'^2} = f(x + y y') \quad .$$

Führt man statt y den Polabstand r als neue Veränderliche ein, so hat man

$$r^2 = x^2 + y^2 \,, \quad r r' = x + y y' \quad ,$$

$$y' = \frac{1}{y}(r r' - x) \,, \quad 1 + y'^2 = \frac{r^2 + r^2 r'^2 - 2\,x r r'}{r^2 - x^2} \quad .$$

Daher ergibt sich aus 1)

$$2)\qquad r^2 + r^2 r'^2 - 2\,x r r' = [f(r r')]^2 \quad .$$

Hieraus folgt die neue Differentialgleichung

$$r - 2\,x r' = r' \cdot \frac{[f(r r')]^2 - r^2 r'^2}{r r'} \quad ;$$

diese ist von derselben Form, wie Nr. 27, 1).

29. Denkt man sich die Gleichung

$$1)\qquad \varphi(x, y, y') = 0$$

in Bezug auf y' aufgelöst, so erhält man ein Resultat von der Form

$$2)\qquad dy - y' dx = 0 \quad ,$$

worin man y' aus 1) zu ersetzen hat. Man kann nun versuchen, einen integrierenden Faktor F als Funktion von x, y, y' so zu bestimmen, daß

$$3)\qquad F \cdot (dy - y' dx)$$

unter der Voraussetzung 1) ein vollständiges Differential wird. Das allgemeine Integral von 1) wird alsdann durch Entfernung von y' aus 1) und aus

$$\int F \cdot (dy - y' dx) = C$$

erhalten, wenn man mit $\int F \cdot (dy - y' dx)$ eine Funktion bezeichnet, deren vollständiges Differential $F \cdot (dy - y' dx)$ ist.

Ist 3) ein vollständiges Differential, so ist

$$4)\qquad \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial x}+y'\cdot\frac{\partial F}{\partial y}+y'\cdot\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial y}+F\cdot\frac{\partial y'}{\partial y}=0\quad,$$

wobei die Differentialquotienten

$$\frac{\partial y'}{\partial x},\quad \frac{\partial y'}{\partial y}$$

aus 1) zu berechnen sind. Nun ist für jede Verschiebung des Punktes x, y entlang einer Integralkurve

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot y'+\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\left(\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial y'}{\partial y}y'\right)=\frac{dF}{dx}\quad.$$

Daher folgt aus 4)

$$\frac{1}{F}\cdot\frac{dF}{dx}=-\frac{\partial y'}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}:\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\quad.$$

Wenn sich die rechte Seite dieser Gleichung als ein Differentialquotient nach x darstellen läßt, so erhält man

$$F=e^{\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}:\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)dx}\quad.$$

30. Gibt man dem integrierenden Faktor die Gestalt $G:y'$, so ist das Kennzeichen dafür, daß

$$1)\qquad \frac{G}{y'}(dy-y'dx)$$

ein vollständiges Differential ist,

$$2)\qquad \frac{1}{y'}\left(\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial x}\right)+G\frac{\partial\frac{1}{y'}}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial y}=0\quad.$$

Da nun für jede unendlich kleine Verschiebung des Punktes x, y auf einer Integralkurve

$$\frac{dG}{dy}=\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dy}+\frac{\partial G}{\partial y'}\left(\frac{\partial y'}{\partial y}+\frac{\partial y'}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dy}\right)\quad,$$

so folgt aus 2)

$$3)\qquad \frac{1}{G}\cdot\frac{dG}{dy}=-\frac{\partial\frac{1}{y'}}{\partial x}=\frac{1}{y'^2}\cdot\frac{\partial y'}{\partial x}=-\frac{1}{y'^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}:\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)\quad.$$

Ist die rechte Seite dieser Gleichung ein Differentialquotient nach y, so kann man integrieren und erhält

$$G=e^{-\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}:\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)\frac{dy}{y'^2}}\ *)\quad.$$

31. Wir geben hierzu zwei Beispiele.

Die Kurve zu bestimmen, bei welcher das vom Nullpunkte auf die Tangente gefällte Lot eine gegebene Funktion der Normalen ist.

Die Differentialgleichung der Kurve ist

$$1)\qquad \frac{xy'-y}{\sqrt{1+y'^2}}=f(y\sqrt{1+y'^2})\quad.$$

---

*) Malmsten, Mémoire sur l'integration des équations differentielles, Liouville, Journal de Mathematiques pures et appliquées. 2. Série, t. VII. S. 315—333, 1862.

Multipliziert man beide Seiten mit $y\sqrt{1+y'^2}$, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$2)\qquad \varphi \equiv \psi(y\sqrt{1+y'^2}) - y(xy'-y) = 0 \quad .$$

Durch partiale Differentiation folgt hieraus

$$3)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -yy' \quad ,$$

$$4)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \psi'\cdot\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} - xy \quad .$$

Durch vollständige Differentiation folgt aus 1)

$$\psi'\left(\sqrt{1+y'^2}\cdot y' + \frac{yy'y''}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = xy'^2 + xyy'' - yy' \quad ,$$

also ist

$$\frac{\psi'\cdot y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{xy'^2 + xyy'' - yy'}{1+y'^2+yy''} \quad .$$

Wird dies in 4) eingesetzt, so erhält man

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y'} = \frac{-(x+yy')y}{1+y'^2+yy''} \quad .$$

Hieraus und aus 3) folgt sofort

$$-\frac{1}{y'^2}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right) = -\frac{1+y'^2+yy''}{y'(x+yy')} \quad .$$

Da nun

$$\frac{d(x+yy')}{dy} = \frac{1}{y'} + y' + yy''\cdot\frac{1}{y'} \quad ,$$

so ist

$$-\frac{1}{y'^2}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right) = -\frac{d}{dy}\,l(x+yy') \quad .$$

Hieraus folgt

$$G = \frac{1}{x+yy'} \quad .$$

Man hat nun das Integral zu bestimmen

$$\int\frac{dy - y'dx}{y'(x+yy')} = C \quad .$$

Man erhält zunächst

$$C = \int\frac{y\,dy + yy'\cdot d(yy')}{yy'(x+yy')} - \int\frac{dx + d(yy')}{x+yy'}$$

$$= -l(x+yy') + \frac{1}{2}\int\frac{d[y^2(1+y'^2)]}{yy'(x+yy')} \quad .$$

Setzt man zur Abkürzung

$$y\sqrt{1+y'^2} = u \quad ,$$

so folgt hieraus

$$C = -l(x+yy') + \int\frac{u\,du}{yy'(x+yy')} \quad .$$

Da nun
$$yy'(x+yy') \equiv u^2 + \frac{u(xy'-y)}{\sqrt{1+y'^2}} \quad ,$$
so folgt aus 1)
$$yy'(x+yy') = u^2 + uf(u) \quad .$$
Daher hat man schließlich

5) $$C = -l(x+yy') + \int \frac{du}{u+f(u)} \quad .$$

Das allgemeine Integral ergibt sich durch Entfernung von y' aus 1) und 5).

32. Die Kurve zu bestimmen, bei der der Abstand der Normalen vom Nullpunkte eine gegebene Funktion des Polabstandes ist.

Die Differentialgleichung der Kurve ist

1) $$\varphi \equiv f(x^2+y^2) - \frac{x+yy'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0 \quad .$$

Hieraus folgt
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2yf' - \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \quad ,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = \frac{xy'-y}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad .$$

Aus 1) ergibt sich ferner durch Differentiation
$$2(x+yy')f' = \frac{d(x+yy')}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} - (x+yy') \cdot \frac{y'y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad .$$
Daher ist
$$2yf' = \frac{y}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{d}{dx} l(x+yy') - \frac{yy'y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad .$$
Da nun
$$\frac{yy'y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{d(x+yy')}{dx} \quad ,$$
$$= \frac{y'x+yy'^2}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{d}{dx} l(x+yy') \quad ,$$
so folgt
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{y-y'x}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{d}{dx} l(x+yy') \quad ,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{d}{dx} l(x+yy') \quad ,$$
$$F = \frac{1}{x+yy'} \quad .$$
Man hat daher das Integral
$$\int \frac{dy - y'dx}{x+yy'} = C \quad .$$
Subtrahiert man hiervon
$$\int \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} - \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} = 0 \quad ,$$
so erhält man
$$\operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{xy'-y}{x+yy'} \cdot \frac{d(r^2)}{r^2} = C, \quad r^2 = x^2+y^2 \quad .$$

Da nun, wie man sofort erhält,

$$\left(\frac{xy'-y}{x+yy'}\right)^2+1\equiv\frac{r^2(1+y'^2)}{(x+yy')^2}\quad,$$

so folgt mit Rücksicht auf die Differentialgleichung

$$\frac{xy'-y}{x+yy'}=\sqrt{\frac{r^2}{f(r^2)^2}-1}\quad.$$

Daher hat man schließlich für das allgemeine Integral

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{r^2-f(r^2)^2}}{r^2f(r^2)}\,d(r^2)=C\ ^{*)}.$$

33. Trajektorien. Eine Kurvengleichung $\varphi(x, y, c)=0$ enthalte eine willkürliche Konstante c; gibt man derselben nacheinander alle möglichen Werte, so wird ein Verein von unendlich vielen Kurven erzeugt. Eine Kurve, welche alle diese Kurven unter demselben Winkel schneidet, wird als Trajektorie des Kurvenvereins bezeichnet. Der einfachste Fall tritt ein, wenn die Trajektorie die Kurven des Vereins rechtwinklig schneidet, eine Richtlinie des Vereins ist.

Für irgend einen Punkt x, y der Kurve

$$1)\qquad \varphi(x, y, c)=0$$

bestimmt sich die Richtung der Tangente aus der Gleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy=0\quad,$$

daher folgt für die diesen Punkt enthaltende Richtlinie

$$2)\qquad y'=\frac{\partial\varphi}{\partial y}:\frac{\partial\varphi}{\partial x}\quad.$$

Entfernt man c aus den Gleichungen 1) und 2), so erhält man die Differentialgleichung der Richtlinie; wie man sieht, ist dieselbe von der ersten Ordnung.

34. Für eine Richtlinie von

$$y=\gamma x^m$$

ergibt sich zunächst

$$y'=-\frac{1}{m\gamma x^{m-1}}\quad.$$

Die Entfernung von γ aus beiden Gleichungen führt zu

$$yy'+\frac{1}{m}x=0\quad;$$

hiervon ist das allgemeine Integral

$$\frac{1}{m}x^2+y^2=c\quad.$$

Ist $m>0$, so sind die gegebenen Kurven parabolisch und die Richtlinien Ellipsen; ist $m=1$, so sind die gegebenen Kurven Strahlen eines Büschels, das den Nullpunkt zum Träger hat, und die Richtlinien sind Kreise um den Nullpunkt; ist $m<0$, so sind die gegebenen Kurven hyperbolisch und haben die Achsen zu Asymptoten, die Richtlinien sind Hyperbeln; für $m=-1$ insbesondere

*) Weitere Beispiele findet man in dem oben angeführten MALMSTENschen Aufsatze.

bilden die gegebenen Kurven sowohl, wie die Richtlinien Büschel von gleichseitigen koaxialen Hyperbeln, die Achsen des einen Büschels sind die gemeinsamen Asymptoten des andern.

35. Um die Richtlinien der Kreise eines Büschels zu erhalten, nehmen wir die Mittellinie als X-Achse, die Chordale als Y-Achse; die Gleichungen aller Büschelkreise sind dann von der Form

$$\varphi \equiv (x-a)^2 + y^2 + b + 2\gamma x = 0 \quad ,$$

wobei γ von Kreis zu Kreis sich ändert. Für eine Richtlinie hat man daher zunächst

$$y' = \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{y}{x-a+\gamma} \quad .$$

Aus beiden Gleichungen folgt durch Entfernung von γ

$$2xy\,dx + (y^2 - x^2 + b)\,dy = 0 \quad .$$

Hier ist

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) : M = \frac{2}{y} \quad ,$$

folglich hat die Differentialgleichung einen integrierenden Faktor, der eine Funktion von y allein ist: er ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{dF}{F} = -\frac{2\,dy}{y}$$

zu

$$F = \frac{1}{y^2} \quad .$$

Ferner bildet man

$$\lambda \equiv \int \frac{M}{y^2}\,dx = \frac{x^2}{y} \quad ,$$

$$Y \equiv \frac{N}{y^2} - \frac{\partial \lambda}{\partial y} = 1 + \frac{b}{y^2}, \qquad \int Y\,dy = y - \frac{b}{y} \quad ,$$

$$\lambda + \int Y\,dy = \frac{x^2 + y^2 - b}{y} \quad ,$$

und erhält hieraus das allgemeine Integral der Differentialgleichung, wenn die willkürliche Konstante mit $2c$ bezeichnet wird,

$$\frac{x^2 + y^2 - b}{y} = 2c \quad ,$$

oder

$$x^2 + y^2 - b - 2cy = 0 \quad .$$

Dies bestätigt den in der analytischen Planimetrie entwickelten Satz, **daß** die Richtlinien eines Kreisbüschels die Kreise eines Büschels sind, dessen Mittellinie die Chordale des gegebenen Büschels und dessen Chordale Mittellinie desselben ist.

36. Die Ellipsen

$$1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad ,$$

für welche, wenn h eine Konstante bezeichnet,

$$2) \qquad a^2 - b^2 = h^2 \quad ,$$

sind brennpunktsgleich; um die Differentialgleichung ihrer Richtlinien zu erhalten, hat man a und b aus 1) und 2) und aus der Gleichung

$$y' = \frac{y}{b^2} : \frac{x}{a^2}$$

zu entfernen; man erhält

$$3) \qquad xyy'^2 + (x^2 - y^2 - h^2)y' - xy = 0 \quad .$$

Durch Einführung neuer Veränderlicher kann diese Gleichung wesentlich vereinfacht werden; setzt man nämlich $x^2 = s$, $y^2 = t$, so erhält man

$$st'^2 + (s - t - h^2)t' - t = 0 \quad ,$$

oder

$$4) \qquad st' - t = h^2 \frac{t'}{t' + 1} \quad .$$

Wird diese Gleichung differenziert und $dt' : ds = t' \cdot dt' : dt$ gesetzt, so folgt

$$st' \cdot \frac{dt'}{dt} = \frac{h^2 t'}{(t' + 1)^2} \cdot \frac{dt'}{dt} \quad .$$

Diese Gleichung zerfällt in die drei

$$5) \qquad t' = 0 \,, \quad s = \left(\frac{h}{t' + 1}\right)^2 , \quad \frac{dt'}{dt} = 0 \quad .$$

Die erste liefert in 4) eingesetzt das partikuläre Integral $t = 0$. Aus der zweiten und aus 4) entfernt man t' und erhält

$$6) \qquad (h \pm x)^2 + y^2 = 0 \quad ,$$

und diese Gleichung ist nur durch die beiden Brennpunkte $x = \pm h$, $y = 0$ zu befriedigen. Die dritte der Gleichungen 5) führt zu

$$t' = c \quad .$$

Wird dies in 4) eingesetzt, so erhält man

$$cx^2 - y^2 = \frac{h^2 c}{1 + c} \quad ,$$

das allgemeine Integral von 3); hieraus folgt, daß die Richtlinien brennpunktsgleiche Hyperbeln sind, was auch in der Differentialrechnung nachgewiesen worden ist. Zu bemerken ist noch, daß die Gleichung 6) der Differentialgleichung 3) genügt und daher das singuläre Integral derselben ist.

§ 3.

Differentialgleichungen höherer Ordnung mit zwei Veränderlichen.

1. Eine Funktion φ von x und y enthalten n Konstante $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$. Die Gleichung

$$1) \qquad \varphi(x, y, c_1, c_2, c_3, \ldots c_n) = 0$$

wollen wir n mal differenzieren; dadurch entstehen nacheinander n Gleichungen von der Form

$$2) \qquad \begin{cases} \varphi_1(x, y, y'; \quad c_1, \ldots c_n) = 0 \quad , \\ \varphi_2(x, y, y', y''; \quad c_1, \ldots c_n) = 0 \quad , \\ \varphi_3(x, y, y', y'', y'''; \quad c_1, \ldots c_n) = 0 \quad , \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_n(x, y, y', y'', y''', \ldots y^{(n)}; \quad c_1, \ldots c_n) = 0 \quad . \end{cases}$$

Entfernen wir die n Größen $c_1, \ldots c_n$ aus den $n+1$ Gleichungen 1) und 2), so entsteht eine Gleichung von der Form

$$3) \qquad F(x, y, y', y'', y''', \ldots y^{(n)}) = 0 \quad ,$$

also eine Differentialgleichung n-ter Ordnung, — vorausgesetzt, daß sich die Konstanten nicht bereits aus 1) und aus den ersten k Gleichungen von 2) entfernen lassen, in welchem Falle die erhaltene Differentialgleichung nur von der k-ten Ordnung sein würde. Wir schließen daher: Wenn eine Gleichung zwischen den Veränderlichen x und y n Konstante enthält, so genügen die mit ihr vereinbaren Werte von x, y, y', y'', y''' ... im allgemeinen einer Differentialgleichung n-ter Ordnung, die diese Konstanten nicht enthält.

Denkt man sich die Differentialgleichung 3) gegeben, so wird ihr durch die Gleichung 1) genügt, unabhängig von den Werten, die man den Konstanten beilegen mag; wenn es sich also darum handelt, die Differentialgleichung zu integrieren, d. i. aus ihr eine von Differentialquotienten freie Beziehung zwischen den Veränderlichen abzuleiten, so haben die c den Charakter von willkürlichen Konstanten.

Beispiele. A) Die Gleichung

$$y = a e^x + b e^{-x}$$

liefert durch zweimalige Differentiation

$$y'' = a e^x + b e^{-x} \quad ;$$

hieraus folgt die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = y \quad .$$

B) Aus der allgemeinern Gleichung

$$y = a e^{mx} + b e^{nx}$$

folgen

$$y' = m a e^{mx} + n b e^{nx}$$

und

$$y'' = m^2 a e^{mx} + n^2 b e^{nx} \quad .$$

Die erste und zweite Gleichung ergeben

$$y' - n y = (m - n) a e^{mx} \quad ,$$

aus der zweiten und dritten folgt

$$y'' - n y' = m (m - n) a e^{mx} \quad ,$$

daher ergibt sich die von den Konstanten a und b freie Differentialgleichung

$$y'' - (n + m) y' + m n y = 0 \quad .$$

2. Unter dem allgemeinen Integrale einer Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$1) \qquad f(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$$

versteht man eine Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ von der Beschaffenheit, daß jeder Wertverein $x, y, y', \ldots y^{(n)}$, der der Differentialgleichung genügt, auch die Gleichung $\varphi(x, y) = 0$, sowie die durch n aufeinander folgende Differentiationen daraus folgenden Gleichungen erfüllt

$$2) \qquad \begin{cases} \varphi_1(x, y, y') = 0 \quad , \\ \varphi_2(x, y, y', y'') = 0 \quad , \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_n(x, y, y', y'', y''', \ldots y^{(n)}) = 0 \quad , \end{cases}$$

und umgekehrt.

In der Differentialgleichung 1) kann man $x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ ganz willkürliche Werte geben; alsdann ist der höchste Differentialquotient $y^{(n)}$ durch die Gleichung 1) bestimmt. Es müssen daher das allgemeine Integral und die daraus abgeleiteten Gleichungen

$$\varphi_1 = 0\,, \quad \varphi_2 = 0\,, \quad \varphi_3 = 0\,, \quad \ldots \quad \varphi_{(n-1)} = 0$$

so beschaffen sein, daß sie durch jeden willkürlichen, für die Größen x, y, y', y'', $\ldots y^{(n-1)}$ gesetzten Wertverein erfüllt werden können. Hieraus folgt, daß die Funktion φ n unbestimmte Konstante $c_1, c_2, \ldots c_n$ enthalten muß, und zwar in solchen Verbindungen, daß durch geeignete Wahl dieser Zahlen den angegebenen Bedingungen genügt werden kann. Wir erhalten hieraus: Das allgemeine Integral einer Differentialgleichung n-ter Ordnung enthält n willkürliche Konstante.

Wenn eine Gleichung $\varphi = 0$ so beschaffen ist, das alle Werte von $x, y, y', \ldots y'^{(n)}$, die den Gleichungen

$$\varphi = 0\,, \quad \varphi_1 = 0\,, \quad \varphi_2 = 0\,, \quad \ldots \quad \varphi_n = 0$$

genügen, auch die Differentialgleichung erfüllen, φ aber nicht n willkürliche Konstante enthält, so wird $\varphi = 0$ als ein partikuläres Integral bezeichnet, wenn es aus dem allgemeinen Integrale durch Spezialisierung einiger Konstanten hervorgeht; in jedem andern Falle ist es ein singuläres Integral.

3. Eine Gleichung $\psi(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}) = 0$ ist ein allgemeines erstes Integral einer Differentialgleichung n-ter Ordnung, wenn jeder Wertverein $x, y, y', \ldots y^{(n)}$, der der Differentialgleichung genügt, auch die Gleichung $\psi = 0$ und die durch einmalige Differentiation daraus hervorgehende $\psi_1 = 0$ erfüllt. Aus dem Umstande, daß in der Differentialgleichung die Größen $x, y, y', \ldots y^{(n-1)}$ beliebig gewählt werden können, folgt, daß die Funktion ψ eine willkürliche Konstante enthalten muß. Ein allgemeines erstes Integral einer Differentialgleichung n-ter Ordnung enthält eine willkürliche Konstante. Außer den durch Spezialisierung der Konstanten aus einem allgemeinen ersten Integrale hervorgehenden kann es noch weitere erste Integrale $\psi = 0$ geben, so daß alle $\psi = 0$ und $\psi_1 = 0$ befriedigenden Werte von $x, y, \ldots y^{(n)}$ auch die Differentialgleichung erfüllen; diese werden als singuläre erste Integrale bezeichnet.

Ein allgemeines erstes Integral einer Differentialgleichung n-ter Ordnung ist eine Differentialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung. Ein allgemeines erstes Integral dieser Gleichung wird als ein allgemeines zweites Integral der gegebenen Differentialgleichung bezeichnet u. s. f.; ein allgemeines zweites Integral enthält somit zwei, ein drittes drei Konstante, u. s. w. Das allgemeine n-te Integral enthält n Konstante und keinen Differentialquotienten; es fällt mit dem bereits definierten allgemeinen Integrale zusammen.

Beispiele. A) Die Differentialgleichung

$$1) \qquad y'' - (m + n)y' + mn = 0$$

hat das allgemeine erste Integral

$$2) \qquad \psi \equiv y' - ny - (m - n)\,a\,e^{mx} = 0 \quad ;$$

denn durch Differentiation ergibt sich

$$\psi_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} y' + \frac{\partial \psi}{\partial y'} y'' = y'' - ny' - (m - n)\; m\,a\,e^{mx} = 0 \quad ,$$

und durch Entfernung von a aus $\psi = 0$ und $\psi_1 = 0$ folgt die Differentialgleichung. Dieselbe hat noch ein allgemeines erstes Integral, das sich aus Nr. 1, 4) und 5) durch Entfernung von a ergibt, nämlich

$$3) \qquad y' - my - (n - m)\,b\,e^{nx} = 0 \quad .$$

Entfernt man b aus dieser Gleichung und aus der durch Differentiation aus ihr hervorgehenden
$$y'' - my' - (n-m)nbe^{nx} = 0 \quad ,$$
so erhält man ebenfalls die gegebene Differentialgleichung.

B) Die Differentialgleichung erster Ordnung

$$4) \qquad y - xy' = \gamma\sqrt{x} \quad ,$$

in welcher γ als willkürliche Konstante gilt, ist ein allgemeines erstes Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung, die man durch Entfernung von γ aus 4) und aus der durch Differentiation abgeleiteten Gleichung erhält

$$5) \qquad -xy'' = \frac{\gamma}{2\sqrt{x}} \quad ,$$

also der Gleichung

$$6) \qquad 2x^2y'' - xy' + y = 0 \quad .$$

Zu 4) gehört das allgemeine Integral

$$7) \qquad y = cx + 2\gamma\sqrt{x} \quad ;$$

diese Gleichung gibt nach x differenziert

$$8) \qquad y' = c + \frac{\gamma}{\sqrt{x}} \quad .$$

Beseitigt man γ aus 7) und 8), so folgt

$$9) \qquad 2xy' - y = cx \quad ,$$

und diese Gleichung ist das andre allgemeine erste Integral von 6).

4. Entfernt man aus dem allgemeinen Integrale $\varphi(x, y, c_1, c_2, \ldots c_n) = 0$ einer Differentialgleichung n-ter Ordnung und aus der durch einmalige Differentiation abgeleiteten Gleichung $\varphi_1 = 0$ eine Konstante, so erhält man eine Differentialgleichung erster Ordnung mit $(n-1)$ Konstanten; wie man sofort sieht, ist dieselbe ein allgemeines $(n-1)$-tes Integral der gegebenen Gleichung. Da man nun jede der n Konstanten entfernen kann, so ist ersichtlich, daß man n allgemeine $(n-1)$-te Integrale erhält.

Differenziert man ein solches $(n-1)$-tes Integral und entfernt man aus dem Resultate und aus der ursprünglichen Gleichung eine weitere Konstante, so erhält man ein allgemeines $(n-2)$-tes Integral u. s. w.

Entfernt man zwei Konstante aus

$$\varphi = 0 \, , \qquad \frac{d\varphi}{dx} = 0 \, , \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0 \quad ,$$

erhält man ebenfalls ein allgemeines $(n-2)$-tes Integral.

Man erkennt leicht, daß es nicht zwei verschiedene $(n-2)$-te allgemeine Integrale geben kann, die dieselben $(n-2)$ willkürlichen Konstanten enthalten. Denn gesetzt
$$\psi(x, y, y', y'', c_1, c_2, \ldots c_{n-2}) = 0$$
und
$$\chi(x, y, y', y'', c_1, c_2, \ldots c_{n-2}) = 0$$
wären wesentlich verschieden, so daß also eine dieser beiden Gleichungen nicht eine notwendige Folge der andern wäre. Differenziert man die erste Gleichung, so erhält man
$$\psi = 0 \, , \qquad \frac{d\psi}{dx} = 0 \, , \qquad \frac{d^2\psi}{dx^2} = 0 \quad \ldots \quad \frac{d^{n-3}\psi}{dx^{n-3}} = 0 \quad ,$$
und diese $(n-2)$ Gleichungen enthalten die Größen $x, y, y', \ldots y^{(n-1)}, c_1, c_2, c_3, \ldots c_{n-2}$. Fügt man hierzu noch die Gleichung $\chi = 0$, so kann man aus

diesen $n-1$ Gleichungen die c_k eliminieren, und behält eine Gleichung zwischen $x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ übrig, im Widerspruche damit, daß ein allgemeines $(n-2)$-tes Integral durch jedes System von $x, y, y', \ldots y^{(n-1)}$ muß befriedigt werden können.

Man erhält somit dasselbe allgemeine $(n-2)$-te Integral erstens, indem man c_i und c_k aus $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$ und $\varphi'' = 0$ entfernt; zweitens, indem man c_i aus $\varphi = 0$ und $\varphi' = 0$ entfernt, die Resultante $\varphi_i = 0$ differenziert und c_k aus $\varphi_i = 0$ und $\varphi_i' = 0$ entfernt; drittens, indem man c_k aus $\varphi = 0$ und $\varphi' = 0$ entfernt, die Resultante $\varphi_k = 0$ differenziert, und c_i aus $\varphi_k = 0$ und $\psi_k' = 0$ entfernt.

Ähnlich, wie den Satz, daß es nicht zwei verschiedene allgemeine $(n-2)$-te Integrale mit denselben $(n-2)$ willkürlichen Konstanten gibt, beweist man, daß es nicht zwei $(n-k)$-te Integrale mit denselben $(n-k)$ willkürlichen Konstanten geben kann.

Hieraus schließen wir weiter, daß es so viele $(n-k)$-te verschiedene Integrale gibt, als sich die n willkürlichen Konstanten des allgemeinen Integrals zu k gruppieren lassen; es gibt daher

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}$$

allgemeine $(n-k)$-te Integrale.

Wenn man aus den allgemeinen n ersten Integralen die Größen $y', y'', y''', \ldots y^{(n-1)}$ entfernt, so erhält man eine von Differentialquotienten freie Gleichung zwischen x, y und n willkürlichen Konstanten, also das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung n-ter Ordnung.

5. Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung in den einfachsten Fällen.

A) Ist y'' eine Funktion von x allein, also

$$1) \qquad y'' = f(x) \quad ,$$

so hat man sofort ein allgemeines erstes Integral

$$2) \qquad y' = \int f(x)\,dx + C$$

und hieraus das allgemeine Integral

$$3) \qquad y = \int dx \int f(x)\,dx + Cx + C_1 \quad .$$

Das andre allgemeine erste Integral folgt durch Entfernung von C aus 2) und 3) zu

$$xy' - y = x\int f(x)\,dx - \int dx \int f(x)\,dx - C_1 \quad .$$

B) Ist y'' eine Funktion von y allein, also

$$4) \qquad y'' = f(y) \quad ,$$

so setze man

$$y'' = y'\frac{dy'}{dy} \quad ;$$

dadurch entsteht aus 4)

$$y'dy' = f(y)\,dy \quad ,$$

und hieraus folgt ein allgemeines erstes Integral

$$5) \qquad y'^2 = 2\int f(y)\,dy + C \quad \text{oder} \quad y' = \sqrt{2\int f(y)\,dy + C} \quad .$$

Hier lassen sich wieder die Veränderlichen sondern und man erhält

$$6) \qquad x = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + C}} + C_1 \quad .$$

C) Ist y'' eine Funktion von y' allein, so hat man

$$7) \qquad y'' = f(y') \quad .$$

Hieraus ergibt sich

$$8) \qquad x = \int \frac{dy'}{f(y')} + C \quad ,$$

und es erübrigt nun noch die Integration dieser Differentialgleichung erster Ordnung. Man kann indes dieselbe umgehen, da man das andre allgemeine erste Integral bestimmen kann.

Setzt man in 7)

$$y'' = y'dy' : dy \quad ,$$

so erhält man

$$y'dy' = f(y')\,dy \quad ;$$

hieraus ergibt sich

$$9) \qquad y = \int \frac{y'dy'}{f(y')} + C_1 \quad .$$

Das allgemeine Integral von 7) erhält man nun durch Entfernung von y' aus 8) und 9).

D) Eine Differentialgleichung, die nur y'', y' und x, also y nicht explizite enthält, die mithin die Form hat

$$10) \qquad f(y'', y', x) = 0 \quad ,$$

ist eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen y' und x. Die Integration führt auf eine Gleichung von der Form

$$11) \qquad \varphi(y', x, C) = 0 \quad ;$$

deren allgemeines Integral das allgemeine Integral von 10) ist.

E) Enthält die Differentialgleichung nur y'', y' und y, also nicht x explizite, so hat sie die Form

$$12) \qquad f(y'', y', y) = 0 \quad .$$

Ersetzt man hier y'' durch $y'dy' : dy$, so ergibt sich

$$f\left(y'\frac{dy'}{dy}, y', y\right) = 0 \quad ,$$

also eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen y' und y. Das allgemeine Integral derselben

$$13) \qquad \varphi(y', y, C) = 0$$

ist eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen y und x; das allgemeine Integral von 13) ist auch das allgemeine Integral von 12).

6. Geometrische Anwendungen. Die Aufgabe, eine Kurve durch ihre Krümmungshalbmesser zu bestimmen, führt auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, sobald der Krümmungshalbmesser als Funktion der Koordinaten, oder außerdem als Funktion der Tangente, Normale, Subtangente oder Subnormale gegeben ist.

A) Eine Kurve so zu bestimmen, daß der Krümmungshalbmesser in jedem Punkte verhältnisgleich dem Würfel der Normale ist.

Aus den bekannten Formeln für den Krümmungshalbmesser ϱ und die Normale ν

$$\varrho = \sqrt{(1+y'^2)^3} : y'', \qquad \nu = y\sqrt{1+y'^2}$$

folgt, wenn a eine gegebene Zahl ist, die Differentialgleichung

$$\frac{\sqrt{(1+y'^2)^3}}{y''} = a^2 y^3 \sqrt{(1+y'^2)^3} \quad ,$$

oder einfacher

$$y'' = \frac{1}{a^2 y^3} \quad ;$$

daher ist

$$y' dy' = \frac{dy}{a^2 y^3} \quad ,$$

$$y'^2 = -\frac{1}{a^2 y^2} + C, \qquad y' = \frac{\sqrt{a^2 C y^2 - 1}}{a y} \quad .$$

Hieraus ergibt sich

$$x = a \int \frac{y\, dy}{\sqrt{a^2 C y^2 - 1}} + C_1 \quad ,$$

d. i.

$$x = \frac{1}{a C} \sqrt{a^2 C y^2 - 1} + C_1 \quad .$$

Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$-a^2 C^2 (x - C_1)^2 + a^2 C y^2 - 1 = 0 \quad ,$$

so erkennt man, daß die Änderung von C_1 nur auf eine Verschiebung der Y-Achse hinauskommt; von dem Vorzeichen von C hängt es ab, ob die Kurve eine Ellipse oder eine Hyperbel ist.

B) Der Krümmungshalbmesser sei verhältnisgleich der Tangente. Die Differentialgleichung ist

$$\frac{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}{y''} = \frac{a y}{y'} \sqrt{1 + y'^2} \quad ,$$

oder

$$y'' = \frac{(1 + y'^2) y'}{a y} \quad .$$

Wir setzen hierin $y'' = y' dy' : dy$ und erhalten

$$\frac{dy'}{1 + y'^2} = \frac{dy}{a y} \quad ;$$

daher ist ein erstes allgemeines Integral

$$\operatorname{arc\,tang} y' = l C y^{\frac{1}{a}} \quad .$$

Hieraus ergibt sich schließlich

$$x = \int \frac{dy}{\operatorname{tang}\left(l C y^{\frac{1}{a}}\right)} + C_1 \quad .$$

C) Der Krümmungshalbmesser sei verhältnisgleich der Normalen. Ist n eine gegebene Zahl, so hat man

$$n \frac{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}{y''} = y \sqrt{1 + y'^2} \quad ,$$

oder einfacher

$$n (1 + y'^2) = y y'' \quad .$$

Hier setzen wir wieder $y'' = y' dy' : dy$ und erhalten

$$\frac{y' dy'}{1 + y'^2} = n \frac{dy}{y} \quad ;$$

daher ergibt sich ein erstes allgemeines Integral

$$\tfrac{1}{2} l (1 + y'^2) = n l \left(\frac{y}{C}\right) \quad ,$$

woraus folgt

$$y' = \frac{\sqrt{y^{2n} - C^{2n}}}{C^n} \quad ,$$

$$x = C^n \int \frac{dy}{\sqrt{y^{2n} - C^{2n}}} + C_1 \quad .$$

Für $n = -1$ ergibt sich ein Kreis, für $n = 1$ eine Kettenlinie, für $n = -\frac{1}{2}$ eine Cykloide, für $n = \frac{1}{2}$ eine Parabel.

D) Soll der Krümmungshalbmesser eine gegebene Funktion φ der Abscisse sein, so hat man

$$\sqrt{(1 + y'^2)^3} = y''\varphi(x) \quad .$$

Hieraus folgt

$$\int \frac{dy'}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}} = \int \frac{dx}{\varphi(x)} \quad .$$

Die Integration links kann man ausführen und erhält

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \int \frac{dx}{\varphi(x)} + C \quad .$$

Wird das Integral rechts zur Abkürzung mit X bezeichnet, so ergibt sich

$$y' = \frac{X + C}{\sqrt{1 - (X + C)^2}} \quad ,$$

und hieraus folgt schließlich

$$y = \int \frac{(X + C)}{\sqrt{1 - (X + C)^2}} dx + C_1 \quad .$$

---

7. Lineare Differentialgleichungen. Unter einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung versteht man eine Gleichung von der Form

$$1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + X_{n-1} \frac{dy}{dx} + X_n y = X \quad ,$$

wobei $X_1, X_2, \ldots X_n, X$ Funktionen von x allein sind. Die Gleichung

$$2) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + X_n y = 0 \quad ,$$

die aus 1) hervorgeht, wenn man $X = 0$ setzt, wird als homogene lineare Differentialgleichung bezeichnet. Wir betrachten diese zunächst. Für dieselben gilt folgender Satz:

Wenn eine homogene lineare Differentialgleichung die partikulären Integrale hat

$$y = y_1 \, , \quad y = y_2 \, , \quad y = y_3 \, , \quad \ldots \quad y = y_k \quad ,$$

so wird ihr auch durch die Funktion genügt

$$3) \qquad y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \ldots + c_k y_k \quad ,$$

wobei $c_1, c_2, \ldots c_k$ willkürliche Konstante sind.

Denn setzt man 3) in 1) ein, und faßt die Glieder zusammen, die mit demselben c multipliziert sind, so erhält man

$$\begin{aligned} & c_1\left(y_1^{(n)} + X_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + X_{n-1} y_1' + X_n y_1\right) \\ + & c_2\left(y_2^{(n)} + X_1 y_2^{(n-1)} + \ldots + X_{n-1} y_2' + X_n y_2\right) \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + & c_k\left(y_k^{(n)} + X_1 y_k^{(n-1)} + \ldots + X_{n-1} y_k' + X_n y_k\right) = 0 \quad . \end{aligned}$$

Da nun $y_1, \ldots y_k$ der Gleichung genügen, so verschwinden links alle Klammerausdrücke, also ist die Gleichung identisch erfüllt.

Kennt man n partikuläre Integrale und sind nicht zwei oder mehr durch eine Identität von der Form verbunden

$$y_1 \equiv a y_2 + b y_3 + c y_4 + \ldots$$

so ist

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \ldots + c_n y_n$$

das allgemeine Integral der linearen Differentialgleichung. Denn der gegebene Wert von y befriedigt die Gleichung und enthält n willkürliche Konstante. Tritt hingegen der ausgeschlossene Fall ein, ist z. B. $y_1 \equiv a y_2 + b y_3$, so hat man

$$y = (a + c_1) y_2 + (b + c_2) y_3 + c_4 y_4 + \ldots + c_n y_n \quad ,$$

und diese Funktion enthält nur $(n - 1)$ willkürliche Konstante, nämlich $(a + c_1)$, $(b + c_2)$, $c_4, c_5, \ldots c_n$.

8. In die homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0$$

setzen wir versuchsweise $y = e^{\lambda x}$, und erhalten

$$(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_n) e^{\lambda x} = 0 \quad .$$

Diese Gleichung wird identisch erfüllt, wenn

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_n = 0 \quad .$$

Hat diese Gleichung n verschiedene Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, so erhält man n verschiedene partikuläre Integrale

$$y = e^{\lambda_1 x}, \quad y = e^{\lambda_2 x}, \quad \ldots \quad y = e^{\lambda_n x} \quad ;$$

daher ist das allgemeine Integral

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x} \quad .$$

Sind unter den Wurzeln λ konjugiert komplexe, so ersetzt man die Exponentialfunktionen durch goniometrische. Die Methode versagt, wenn die Gleichung für λ zwei oder mehrere gleiche Wurzeln hat; wir werden später sehen, wie man in diesem Falle das allgemeine Integral findet.

9. Der Gleichung

$$y^{(n)} + \frac{a_1}{x} y^{(n-1)} + \frac{a_2}{x^2} y^{(n-2)} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} y = 0$$

läßt sich durch die Annahme genügen $y = x^\mu$; man erhält

$$[\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1) + a_1 \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+2) + \ldots + a_{n-1}\mu + a_n] x^{\mu-n} = 0 \quad ,$$

hat also für μ eine Wurzel der Gleichung zu nehmen

$$\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1) + a_1 \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+2) + \ldots + a_{n-1}\mu + a_n = 0 \quad .$$

Hat diese Gleichung n verschiedene Wurzeln $\mu_1, \ldots \mu_n$, so erhält man n partikuläre Integrale und aus diesen das allgemeine

$$y = c_1 x^{\mu_1} + c_2 x^{\mu_2} + c_3 x^{\mu_3} + \ldots + c_n x^{\mu_n} \quad .$$

10. Kennt man ein partikuläres Integral einer homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung, so wird das allgemeine Integral aus einer Differentialgleichung $(n - 1)$-ter Ordnung gefunden.

Ist $y = \eta$ das gegebene partikuläre Integral, so ist auch $y = c\eta$ ein Integral, wenn c konstant ist: es liegt nun nahe, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen man der Gleichung durch einen veränderlichen Wert von c genügen kann. Ersetzen wir c durch z, setzen also $y = z\eta$, so haben wir die höhern Differential-

quotienten des Produktes $z\eta$ nach den bekannten Regeln der Differentialrechnung zu bilden und diese entwickelten Werte in die Differentialgleichung einzusetzen. Wir erhalten dann eine Differentialgleichung, die keinen höhern Differentialquotienten von z enthält als $z^{(n)}$. Die Glieder, welche z enthalten, sind

$$(\eta^{(n)} + X_1\eta^{(n-1)} + X_2\eta^{(n-2)} + \ldots + X_{n-1}\eta' + X_n\eta)z \quad ;$$

da nun η ein partikuläres Integral ist, so verschwindet der Klammerinhalt, und die Differentialgleichung für z ist somit von der Form

$$z^{(n)} + Pz^{(n-1)} + Qz^{(n-2)} + \ldots + Tz'' + Uz' = 0 \quad .$$

Setzt man hier

$$\frac{dz}{dx} = v\,, \quad \text{also} \quad z = \int v\,dx \quad ,$$

so erhält man für v die Gleichung

$$v^{(n-1)} + Pv^{(n-2)} + Qv^{(n-3)} + \ldots + Tv' + Uv = 0 \quad ,$$

also in der Tat eine Differentialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung.

Hat man das allgemeine Integral dieser Gleichung, so wird zu den $(n-1)$ willkürlichen Konstanten desselben durch die Integration

$$z = \int v\,dx$$

noch eine hinzugefügt, und es ist daher

$$y = z\eta$$

das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung.

11. Dieser Satz führt zunächst dazu, eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form Nr. 8 oder Nr. 9 allgemein zu integrieren, wenn die Gleichungen für λ und μ gleiche Wurzeln haben.

Bei der Gleichung

$$1) \qquad y'' - 2ay' + a^2 y = 0$$

ergibt die Ersetzung $y = e^{\lambda x}$ für λ die Gleichung

$$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 = 0 \quad ,$$

also zwei zusammenfallende Wurzeln $\lambda = a$. Setzt man nun in 1)

$$y = ze^{ax} \quad ,$$

so erhält man für z die Gleichung

$$z'' = 0\,, \quad \text{also} \quad z = C_1 x + C \quad .$$

Folglich ist das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung

$$2) \qquad y = e^{ax}(C_1 x + C) \quad .$$

Setzt man ferner in die Gleichung

$$3) \qquad y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{(1+a)^2}{4x^2}y = 0$$

$y = \mu x$, so erhält man für μ

$$\mu^2 - (1-a)\mu + \frac{(1-a)^2}{4} = 0\,, \quad \text{also} \quad \mu = \frac{1-a}{2} \quad .$$

Um das allgemeine Integral zu erhalten, haben wir zu setzen

$$y = zx^{\frac{1-a}{2}}$$

und erhalten

$$z' \cdot x^{-\frac{a+1}{2}} + z'' \cdot x^{\frac{1-a}{2}} = 0\,, \quad \text{oder} \quad z' + xz'' = 0 \quad .$$

Hieraus folgt $v = C : x$ und $z = C l x + C_1$; daher ist

$$y = x^{\frac{1-a}{2}} (C l x + C_1)$$

das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung.

12. Hat bei der homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0 \quad ,$$

die Gleichung für λ

$$f(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_n = 0 \quad ,$$

r gleiche Wurzeln $\lambda = \nu$, so liegt es nahe, zu vermuten, daß der gegebenen Gleichung durch die Annahme genügt werde

$$1) \qquad y = e^{\nu x} (c x^{r-1} + c_1 x^{r-2} + \ldots + c_{r-1}) \quad ,$$

wobei c, c_1, c_2, ... c_{r-1} willkürliche Konstante sind.

Um die Richtigkeit dieser Vermutung nachzuweisen, bemerken wir zunächst, daß, wenn die Funktion $f(\lambda) = 0$ den Faktor $(\lambda - \nu)^r$ enthält, alsdann in der Funktion $f'(\lambda) = 0$ der Faktor $(\lambda - \nu)^{r-1}$ enthalten ist; denn aus der Voraussetzung

$$f(\lambda) = (\lambda - \nu)^r \cdot \varphi(\lambda)$$

folgt

$$f'(\lambda) = r(\lambda - \nu)^{r-1} \cdot \varphi(\lambda) + (\lambda - \nu)^r \varphi'(\lambda) \quad .$$

Wenn daher ν eine r-fache Wurzel der Gleichung

$$f(\lambda) = 0$$

ist, so sind für $\lambda = \nu$ auch die Gleichungen erfüllt

$$f'(\lambda) = 0 \,, \quad f''(\lambda) = 0 \,, \quad f^{(r-1)}(\lambda) = 0 \quad .$$

Setzt man

$$c x^{r-1} + c_1 x^{r-2} + \ldots + c_{r-1} = \varphi \quad ,$$

so erhält man

$$e^{-\nu x} y^{(k)} = \nu^k \varphi + \binom{k}{1} \nu^{k-1} \varphi' + \binom{k}{2} \nu^{k-2} \varphi'' + \ldots$$

Setzt man diese für $k = n$, $n - 1$, $n - 2$, ... 2, 1 gebildeten Werte in die Differentialgleichung und unterdrückt den Faktor $e^{\nu k}$, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 = \varphi & \cdot (\nu^n + a_1 \nu^{n-1} + a_2 \nu^{n-2} + \ldots) \\ & + \varphi' \cdot \left[\binom{n}{1} \nu^{n-1} + \binom{n-1}{1} a_1 \nu^{n-2} + \binom{n-2}{1} a_2 \nu^{n-3} + \ldots\right] \\ & + \varphi'' \cdot \left[\binom{n}{2} \nu^{n-2} + \binom{n-1}{2} a_1 \nu^{n-3} + \binom{n-2}{2} a_2 \nu^{n-4} + \ldots\right] \\ & + \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die Faktoren von φ, φ', φ'' ... sind der Reihe nach

$$f(\nu) \,, \quad \frac{f'(\nu)}{1} \,, \quad \frac{f''(\nu)}{1 \cdot 2} \,, \quad \ldots$$

verschwinden daher sämtlich; folglich ist 1) ein Integral der Differentialgleichung.

13. Der homogenen linearen Gleichung zweiter Ordnung

$$1) \qquad y'' + \frac{2}{x} y' + k^2 y = 0$$

suchen wir durch eine Potenzreihe zu genügen; setzen wir

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots \quad ,$$

also
$$y' = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \dots\;,$$
$$y'' = 2A_2 + 2\cdot 3A_3x + 3\cdot 4\cdot A_4x^2 + \dots\;,$$
so erhalten wir
$$\frac{2A_1}{x} + 2\cdot 3A_2 + k^2A_0 + (3\cdot 4A_3 + k^2A_1)x + (4\cdot 5A_4 + k^2A_2)x^2 + \dots$$
$$\dots + [n(n+1)A_n + k^2A_{n-2}]x^{n-2} + \dots \equiv 0\;.$$

Hieraus ergeben sich
$$A_1 = 0\,,\quad A_2 = -\frac{k^2}{1\cdot 2\cdot 3}A_0\,,\quad A_3 = 0\,,\quad A_4 = \frac{k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}A_0\dots\;,$$
allgemein
$$A_{2n-1} = 0\,,\quad A_{2n} = \pm\frac{k^{2n}}{1\cdot 2\dots(2n+1)}A_0\;.$$

Daher ist
$$y = A_0\left(1 - \frac{k^2x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{k^4x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \dots\right) = \frac{A_0}{k}\cdot\frac{\sin kx}{x}\;.$$

Dieses Integral ist partikulär, da es nur eine willkürliche Konstante enthält. Setzt man in 1)
$$y = z\cdot\frac{\sin kx}{x}\;,$$
so erhält man für z die Gleichung
$$\sin kx\cdot z'' + 2k\cos kx\cdot z' = 0\;.$$
Diese Differentialgleichung ergibt
$$z' = \frac{C_1}{\sin^2 kx}\,,\qquad z = -\frac{C_1\cot kx}{k} + C_2\;.$$

Ersetzt man hier C_1 durch $-kC_1$, so erhält man für das allgemeine Integral von 1)
$$y = \frac{C_1\cos kx + C_2\sin kx}{x}\;.$$

14. Ersetzt man in der Gleichung
$$1)\qquad y'' - (x^2+3)y = 0$$
y durch die Reihe $A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots$, so erhält man das allgemeine Integral
$$y = A_0\left(1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{24}x^4 + \frac{23}{240}x^6 + \dots\right)$$
$$+ A_1\left(x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2\cdot 4}x^5 + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}x^7 + \dots\right)\;.$$

In der zweiten eingeklammerten Reihe ist das Bildungsgesetz der Koeffizienten zwar nicht allgemein nachgewiesen, nach den ersten vier Gliedern scheint es aber, als sei diese Reihe
$$x\left[1 + \frac{1}{1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots\right] = xe^{\frac{1}{2}x^2}\;.$$

Setzt man
$$y = xe^{\frac{1}{2}x^2}$$
in die Differentialgleichung, so erkennt man leicht, daß ihr genügt wird. Zur Bestimmung des allgemeinen Integrals hat man
$$xe^{\frac{1}{2}x^2}\cdot z'' + 2\frac{d}{dx}(xe^{\frac{1}{2}x^2})z' = 0\;.$$

Aus dieser Gleichung folgt sofort

$$z' = \frac{C}{x^2} e^{-x^2}, \quad z = C_1 + C\int \frac{1}{x^2} e^{-x^2} dx \quad ,$$

also ist das allgemeine Integral von 2)

$$y = x e^{\frac{1}{2}x^2} \left(C_1 + C\int \frac{1}{x^2} e^{-x^2} dx \right) \text{*)}.$$

15. Wir wenden uns nun zur Integration einer nicht homogenen linearen Differentialgleichung; das Verfahren wollen wir zunächst an der Differentialgleichung zweiter Ordnung zeigen.

Um das allgemeine Integral der Gleichung

$$1) \qquad y'' + X_1 y' + X_2 y = X$$

zu finden, liegt es nahe, zunächst die homogene Gleichung zu integrieren

$$2) \qquad y'' + X_1 y' + X_2 y = 0 \quad ,$$

und dann zu versuchen, ob man der Gleichung 1) vielleicht dadurch genügen kann, daß man in dem allgemeinen Integrale von 2)

$$3) \qquad y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

die willkürlichen Konstanten durch passend gewählte Funktionen von x ersetzt.

Setzen wir nun in 1)

$$4) \qquad y = u_1 y_1 + u_2 y_2 \quad ,$$

wobei also y_1 und y_2 bekannte Funktionen sind, die den Gleichungen genügen

$$5) \qquad \begin{cases} y_1'' + X_1 y_1' + X_2 y_1 = 0 \quad , \\ y_2'' + X_1 y_2' + X_2 y_2 = 0 \quad , \end{cases}$$

so erhalten wir zunächst

$$6) \qquad \begin{cases} u_1(y_1'' + X_1 y_1' + X_2 y_1) + u_2(y_2'' + X_1 y_2' + X_2 y_2) \\ + X_1(u_1' y_1 + u_2' y_2) + 2(u_1' y_1' + u_2' y_2') + u_1'' y_1 + u_2'' y_2 = X \quad . \end{cases}$$

Die erste Zeile verschwindet nach der Voraussetzung. Machen wir nun für u_1 und u_2 die Annahme

$$7) \qquad u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \quad ,$$

so folgt zunächst durch Differentiation dieser Gleichung

$$8) \qquad u_1' y_1' + u_2' y_2' = -(u_1'' y_1 + u_2'' y_2) \quad .$$

Durch 7) und 8) geht 6) über in

$$9) \qquad u_1' y_1' + u_2' y_2' = X \quad .$$

Aus 7) und 9) folgen nun für u_1' und u_2' die Werte

$$u_1' = \frac{X y_2}{y_2 y_1' - y_1 y_2'}, \quad u_2' = \frac{X y_1}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \quad .$$

Daher ergibt sich

$$u_1 = \int \frac{X y_2 \, dx}{y_2 y_1' - y_1 y_2'} + C_1, \quad u_2 = \int \frac{X y_1 \, dx}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} + C_2 \quad .$$

Das allgemeine Integral der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist daher

$$10) \qquad y = y_1 \int \frac{X y_2 \, dx}{y_2 y_1' - y_1 y_2'} + y_2 \int \frac{X y_1 \, dx}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} + C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad .$$

---

*) Schloemilch, Kompendium, Bd. I, § 114.

Hieraus ist der auch direkt leicht erweisliche Satz ersichtlich: **Das allgemeine Integral einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung wird erhalten, indem man zu einem partikulären Integrale das allgemeine Integral der entsprechenden homogenen Gleichung fügt.**

Bei der Verwendung der Formel 10) wird man unter Umständen mit Vorteil berücksichtigen, daß

$$\frac{Xy_2}{y_2y_1' - y_1y_2'} = X : y_2\frac{d}{dx}\left(\frac{y_1}{y_2}\right), \qquad \frac{Xy_1}{y_1y_2' - y_2y_1'} = X : y_1\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \quad .$$

Beispiele. A) Die homogene Gleichung

$$y'' + \frac{2}{x}y' + k^2y = 0$$

hat bekanntlich die partikulären Integrale

$$y_1 = \frac{\cos kx}{x}, \qquad y_2 = \frac{\sin kx}{x} \quad ;$$

daher hat die Gleichung

$$y'' + \frac{2}{x}y' + k^2y = X$$

das allgemeine Integral

$$y = \frac{\cos kx}{x}\left(C_1 - \frac{1}{k}\int Xx\sin kx\,dx\right) + \frac{\sin kx}{x}\left(C_2 + \frac{1}{k}\int Xx\cos kx\,dx\right) \quad .$$

B) Für die Gleichung

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 0$$

haben wir die partikulären Integrale

$$y_1 = x^2, \qquad y_2 = x^3 \quad ;$$

daher ergibt sich für

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = X$$

das allgemeine Integral

$$y = x^2\left(C_1 - \int\frac{X}{x}dx\right) + x^3\left(C_2 + \int\frac{X}{x^2}dx\right) \quad .$$

16. Um das allgemeine Integral der Gleichung

$$1) \qquad y^{(n)} + X_1y^{(n-1)} + \ldots + X_{n-1}y' + X_ny = X$$

zu erhalten, setzen wir voraus, es sei

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + \ldots + c_ny_n$$

das allgemeine Integral der homogenen Gleichung

$$y^{(n)} + X_1y^{(n-1)} + \ldots + X_{n-1}y' + X_ny = 0 \quad ,$$

und suchen nun $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$ als Funktionen von x so zu bestimmen, daß

$$2) \qquad y = u_1y_1 + u_2y_2 + \ldots + u_ny_n$$

das allgemeine Integral von 1) wird.

Wenn man den Wert 2) und die daraus folgenden Werte $y', y'', y''', \ldots y^{(n)}$ in 1) einführt, so erhält man eine Gleichung für die n unbestimmten Funktionen u_k; um sie zu bestimmen, kann man daher noch $(n-1)$ Gleichungen beliebig annehmen. Wir wählen diese Gleichungen so, daß in den Werten $y', y'', y''', \ldots y^{(n-1)}$ keine Differentialquotienten der u_k vorkommen; alsdann enthält die Differential-

gleichung nur die ersten Differentialquotienten dieser Funktionen und die Bestimmung derselben wird dadurch tunlichst erleichtert. Aus y folgt zunächst

$$y' = u_1 y_1' + \ldots + u_n y_n' + u_1' y_1 + \ldots + u_n' y_n \quad .$$

Um Differentialquotienten der u in y' zu vermeiden, setzen wir

$$y_1 u_1' + y_2 u_2' + \ldots + y_n u_n' = 0 \quad ,$$

und erhalten unter dieser Voraussetzung

$$y' = u_1 y_1' + u_2 y_2' + \ldots + u_n y_n' \quad .$$

Ferner setzen wir

$$y_1' u_1' + y_2' u_2' + \ldots + y_n' u_n' = 0 \quad ,$$

und erhalten dadurch

$$y'' = u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + \ldots + u_n y_n'' \quad .$$

So weiter gehend, erhalten wir schließlich

$$y_1^{(n-2)} u_1' + y_2^{(n-2)} u_2' + \ldots + y_n^{(n-2)} u_n' = 0 \quad ,$$

$$y^{(n-1)} = u_1 y_1^{(n-1)} + u_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + u_n y_n^{(n-1)} \quad .$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= u_1 y_1^{(n)} + u_2 y_2^{(n)} + \ldots + u_n y_n^{(n)} \\ &+ y_1^{(n-1)} u_1' + y_2^{(n-1)} u_2' + \ldots + y_n^{(n-1)} u_n' \quad . \end{aligned}$$

Setzt man nun diese Werte für $y, y', y'', \ldots y^{(n)}$ in die Differentialgleichung ein und berücksichtigt, daß $y_1, y_2, \ldots y_n$ der homogenen Differentialgleichung genügen, so erhält man

$$y_1^{(n-1)} u_1' + y_2^{(n-1)} u_2' + \ldots + y_n^{(n-1)} u_n' = X \quad .$$

Für die Unbekannten $u_1, u_2, \ldots u_n$ haben wir somit die n Gleichungen

$$\begin{aligned} y_1 u_1' + y_2 u_2' + \ldots + y_n u_n' &= 0 \quad , \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' + \ldots + y_n' u_n' &= 0 \quad , \\ y_1'' u_1' + y_2'' u_2' + \ldots + y_n'' u_n' &= 0 \quad , \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad & \\ y_1^{(n-2)} u_1' + y_2^{(n-2)} u_2' + \ldots + y_n^{(n-2)} u_n' &= 0 \quad , \\ y_1^{(n-1)} u_1' + y_2^{(n-1)} u_2' + \ldots + y_n^{(n-1)} u_n' &= X \quad . \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind linear für $u_1', u_2', \ldots u_n'$; löst man sie auf, so erhält man

$$u_1' = \chi_1 \, , \quad u_2' = \chi_2 \, , \quad u_3' = \chi_3 \, , \quad \ldots \quad u_n' = \chi_n \quad ,$$

wobei $\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_n$ bekannte Funktionen von x sind. Hieraus folgt

$$u_1 = \int \chi_1 dx + C_1 \, , \quad u_2 = \int \chi_2 dx + C_2 \, , \quad \ldots \quad u_n = \int \chi_n dx + C_n \quad ;$$

daher ist schließlich das gesuchte allgemeine Integral

$$y = y_1 \int \chi_1 dx + \ldots + y_n \int \chi_n dx + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \quad .$$

Man ersieht hieraus noch: Das allgemeine Integral einer linearen Differentialgleichung wird aus einem partikulären Integrale gefunden, indem man zu diesem das allgemeine Integral der entsprechenden homogenen Gleichung fügt.

17. Wenn von der homogenen Gleichung, die zu einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung gehört, nicht n linear unabhängige partikuläre Integrale bekannt sind, sondern nur deren r, nämlich $y_1, y_2, \ldots y_r$, so setzen wir für das allgemeine Integral

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \ldots + u_r y_r \quad .$$

Wir bilden nun die entsprechenden Bedingungsgleichungen für die u_1 wie im vorigen Falle; da wir aber nur u_r unbekannte Funktionen haben, so dürfen wir außer der Differentialgleichung nur $(r - 1)$ Gleichungen ansetzen. Dieselben seien

$$1)\quad \begin{cases} y_1 u'_1 + y_2 u'_2 + \dots + y_1 u'_r = 0 \quad , \\ y'_1 u'_1 + y_2 u'_2 + \dots + y'_r u'_r = 0 \quad , \\ y''_1 u'_1 + y''_2 u'_2 + \dots + y''_r u'_r = 0 \quad , \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ y_1^{(r-2)} u'_1 + y_2^{(r-2)} u'_2 + \dots + y_r^{(r-2)} u'_r = 0 \quad . \end{cases}$$

Alsdann ergibt sich

$$2)\quad \begin{cases} y' = u_1 y'_1 + u_2 y'_2 + \dots + u_r y'_r \quad , \\ y'' = u_1 y''_1 + u_2 y''_2 + \dots + u_r y''_r \quad , \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ y^{(r-1)} = u_1 y_1^{(r-1)} + u_2 y_2^{(r-1)} + \dots + u_r y_r^{(r-1)} \quad , \end{cases}$$

sowie ferner

$$y^{(r)} = u_1 y_1^{(r)} + u_2 y_2^{(r)} + \dots + u_r y_r^{(r)}$$
$$+ u'_1 y_1^{(r-1)} + u'_2 y_2^{(r-1)} + \dots + u'_r y_r^{(r-1)} \quad ,$$

$$y^{(r+1)} = \Sigma u_k y_k^{(r+1)} + 2 \Sigma u'_k y_k^{(r)} + \Sigma u''_k y_k^{(r-1)} \quad ,$$

$$y^{(r+2)} = \Sigma u_k y_k^{(r+2)} + 3 \Sigma u'_k y_k^{(r+1)} + 3 \Sigma u''_k y_k^{(r)} + \Sigma u'''_k y_k^{(r-1)} \quad ,$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$y^{(n)} = \Sigma u_k y_k^{(n)} + \binom{n - r + 1}{1} \Sigma u'_k y_k^{(n-1)} + \binom{n - r + 1}{2} \Sigma u''_k y_k^{(n-2)} + \dots$$
$$\dots + \Sigma u_k^{(n-r+1)} y_k^{(r-1)} \quad .$$

Führen wir diese Werte in die Differentialgleichung ein und beachten dabei, daß $y_1, y_2, \dots y_r$ der zugehörigen homogenen Gleichung genügen, so erhalten wir eine Gleichung von der Form

$$3)\qquad \Sigma P_k u'_k + \Sigma Q_k u''_k + \dots + \Sigma V_k u_k^{(n-r+1)} = X \quad ,$$

worin die $P_k, Q_k, \dots V_k$ bekannte Funktionen von x sind. Aus den $(r - 1)$ Bedingungsgleichungen 1) können wir die Verhältnisse der $u'_1, u'_2, \dots u'_r$ finden; drücken wir $u'_2, \dots u'_r$ durch u'_1 aus, so erhalten wir

$$5)\qquad u'_2 = A u'_1 \,, \qquad u'_3 = B u'_1 \,, \quad \dots \quad u'_r = N u'_1 \quad ,$$

wo nun $A, B, \dots N$ bekannt sind. Diese Gleichungen differenzieren wir $(n - r)$mal und setzen die Resultate in 4) ein. Dadurch entsteht eine Differentialgleichung, die nur u_1 enthält und von der Form ist

$$\alpha u_1^{(n+r-1)} + \beta u_1^{(n+r-2)} + \dots + \nu u'_1 = X \quad ,$$

worin $\alpha, \beta, \dots \nu$ bekannte Funktionen von x sind.

Dies ist eine lineare Differentialgleichung $(n - r)$-ter Ordnung für den Differentialquotienten u'. Wir erhalten somit: W e n n m a n r p a r t i k u l ä r e l i n e a r u n a b h ä n g i g e I n t e g r a l e d e r D i f f e r e n t i a l g l e i c h u n g k e n n t

$$y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \dots + X_n y = 0 \quad ,$$

s o h a t m a n z u r B e s t i m m u n g d e s a l l g e m e i n e n I n t e g r a l s v o n

$$y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \dots + X_n y = X$$

e i n e l i n e a r e D i f f e r e n t i a l g l e i c h u n g $(n - r)$-t e r O r d n u n g z u i n t e g r i e r e n, u n d d a n n n o c h r e i n f a c h e I n t e g r a l e a u s z u f ü h r e n.

---

18. Das Verfahren, an Stelle einer gegebenen Differentialgleichung eine einfachere aufzulösen, und aus dem allgemeinen Integrale dieser Gleichung das der gegebenen durch Variation der Konstanten abzuleiten, läßt sich auch in andern Fällen mit gutem Erfolge anwenden.

Um zu dem allgemeinen Integrale der nicht linearen Differentialgleichung

$$1) \qquad y'' + Xy' + Yy'^2 = 0$$

zu gelangen, in welcher X und Y Funktionen von x bezw. y allein sind, betrachten wir zunächst die einfachere Gleichung

$$2) \qquad y'' + Xy' = 0 \quad ,$$

zu der wir leicht ein erstes Integral finden

$$3) \qquad y' = Ce^{-\int X dx} \quad .$$

Wir versuchen nun, z als Funktion von x so zu bestimmen, daß

$$4) \qquad y' = ze^{-\int X dx}$$

ein allgemeines erstes Integral von 1) wird. Aus 4) folgt durch Differentiation

$$5) \qquad y'' = e^{-\int X xd}(-zX + z') \quad ;$$

führt man 4) und 5) in 1) ein, so ergibt sich

$$z' + Yz^2 e^{-\int X dx} = 0 \quad .$$

Ersetzt man hier z' durch $y'dz : dy$, so erhält man in Rücksicht auf 4)

$$\left(\frac{dz}{dy} + Yz\right)\frac{dy}{dx} = 0 \quad .$$

Hieraus folgt

$$\frac{dz}{dy} + Yz = 0 \quad ,$$

also

$$z = Ce^{-\int Y dy} \quad .$$

Führt man dies in 4) ein, so entsteht zunächst

$$\frac{dy}{dx} = Ce^{-\int Y dy} \cdot e^{-\int X dx} \quad .$$

In dieser Differentialgleichung erster Ordnung kann man die Veränderlichen trennen und erhält das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung

$$\int e^{\int Y dy} dy = C\int e^{-\int X dx} dx + C_1 \quad .$$

19. An Stelle der Gleichung

$$1) \qquad (1 - x^2)y'' - 2xy' + Xy'^3 = 0 \quad ,$$

worin X nur x enthält, untersuchen wir zunächst die einfachere

$$2) \qquad (1 - x^2)y'' - 2xy' = 0 \quad ;$$

diese hat das erste Integral

$$3) \qquad y' = \frac{C}{1 - x^2} \quad .$$

Setzen wir nun in 1)

$$y' = \frac{z}{1-x^2} \quad ,$$

also

$$y'' = \frac{2xz}{(1-x^2)^2} + \frac{z'}{1-x^2} \quad ,$$

so erhalten wir

$$z' + X \cdot \frac{z^3}{(1-x^2)^3} = 0 \quad .$$

Hieraus folgt das allgemeine Integral

$$\frac{1}{z^2} = 2\int \frac{X\,dx}{(1-x^2)^3} + C \quad ,$$

und daher schließlich das allgemeine Integral von 1)

$$y = \int \frac{z\,dx}{1-x^2} + C_1 \quad .$$

20. Die soeben behandelte Gleichung ist ein besonderer Fall von

$$y'' + X_0 y' + X_1 y'^n = 0 \quad .$$

Ein allgemeines erstes Integral von

$$y'' + X_0 y' = 0$$

ist

$$y' = C e^{-\int X_0 dx} \quad .$$

Sucht man nun der gegebenen Gleichung durch das erste Integral zu genügen

$$y' = z e^{-\int X_0 dx} \quad ,$$

so erhält man zur Bestimmung von z die Gleichung

$$z' + X_1 z^n e^{-(n-1)\int X_0 dx} = 0 \quad .$$

Hieraus folgt, sobald n von $+1$ verschieden ist,

$$\frac{1}{n-1} z^{-n+1} = \int X_1 e^{-(n-1)\int X_0 dx} dx + C \quad .$$

Führt man den hieraus folgenden Wert von z in y' ein, so erhält man y' als Funktion von x, und gewinnt y durch nochmalige Integration.

21. Das allgemeine Integral der Gleichung

$$1) \qquad y'' + Y_0 y'^2 + Y_1 y'^n = 0 \quad ,$$

worin Y_0 und Y_1 Funktionen von y allein sind, wird aus einem allgemeinen ersten Integrale der Gleichung gefunden

$$y'' + Y_0 y'^2 = 0 \quad .$$

Ersetzt man y'' durch $y'dy' : dy$, so erhält man

$$\frac{dy'}{y'} = -Y_0\,dy \quad ,$$

und hieraus

$$y' = C e^{-\int Y_0 dy} \quad .$$

Wir suchen nun der gegebenen Gleichung durch

$$2) \qquad y' = z\, e^{-\int Y_0 dy}$$

zu genügen, worin z eine Funktion von y allein bedeute. Bildet man unter dieser Voraussetzung

$$y'' = y' \frac{dy'}{dy} = z\, e^v \left(e^v \frac{dz}{dy} - Y_0\, z\, e^v \right) \quad ,$$

wobei zur Abkürzung

$$v = - \int Y_0\, dy$$

gesetzt worden ist, so erhält man aus 1)

$$z\, e^{2v} \frac{dz}{dy} + Y_1\, z^n e^{nv} = 0 \quad .$$

Hieraus folgt

$$3) \qquad \frac{dz}{z^{n-1}} + Y_1\, e^{(n-2)v} dy = 0 \quad ,$$

worin die Veränderlichen gesondert sind. Hat man hieraus z als Funktion von y erhalten, so gibt 2) durch eine Integration x als Funktion von y. Die beiden Konstanten treten bei der Integration der Gleichungen 3) und 2) ein.

22. Mitunter gelingt es, durch Einführung von ein oder zwei neuen Veränderlichen eine Differentialgleichung in eine einfachere überzuführen. Die Gleichung

$$1) \qquad y'' = a^2 x - b^2 y$$

läßt sich als lineare Gleichung integrieren; schneller kommt man zum Ziele, wenn man setzt

$$a^2 x - b^2 y = t \,, \qquad \text{also} \qquad -b^2 y'' = t'' \quad .$$

Dadurch erhält man aus 1)

$$t'' = -b^2 t \quad ;$$

das allgemeine Integral hiervon ist

$$t = C_1 \cos b\,x + C_2 \sin b\,x \quad ,$$

daher ist das allgemeine Integral von 1)

$$a^2 x - b^2 y = C_1 \cos b\,x + C_2 \sin b\,x \text{ *)}.$$

§ 4. Allgemeine Untersuchungen über homogene lineare Differentialgleichungen mit eindeutigen Koeffizienten.

1. Ehe wir an den Gegenstand dieses Abschnitts herantreten können, erledigen wir einige Betrachtungen über die eindeutigen Funktionen**).

Eine rationale ganze Funktion f der Veränderlichen x ist eine Potenzreihe mit endlicher Gliedzahl

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n \quad .$$

Sie ist eindeutig, an allen Stellen stetig, und nur unendlich für $x = \infty$. Sie

*) Weitere Ausführungen siehe LACROIX, Traité du calcul differential et du calcul intégral, Paris 1800, 2. Bd. Auf die Theorie der singulären Integrale von Gleichungen höherer Ordnung einzugehen, müssen wir uns versagen; man vergleiche LACROIX, Traité, 2. Bd. Nr. 667; BOOLE, A Treatise on differential equations, 4. Aufl. 1. Bd., X. Kap.

**) Die Nrn. 1 bis 19 sind im engen Anschlusse an WEIERSTRASS, Abhandlungen aus der Funktionenlehre, Berlin 1886, bearbeitet.

verschwindet an n voneinander verschiedenen oder gruppenweis zusammenfallenden Stellen; sind diese Nullstellen

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \quad ,$$

so erscheint $f(x)$ auch in Form des endlichen Produktes

$$f(x) = A_n (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n) \quad .$$

Ersetzt man x durch $(x - a) + a$, und entwickelt die Potenzen dieses Binoms, so erhält man f auch als endliche Potenzreihe für die Veränderliche $x - a$.

2. Eine rationale Funktion f ist der Quotient zweier ganzen rationalen Funktionen g_1 und g_2. Sie hat die Nullstellen von g_1 und wird unendlich in den Nullstellen von g_2.

Die Stellen der x-Ebene, in denen eine Funktion unendlich oder unstetig wird, bezeichnet man als ihre Sonderstellen. Ist g_1 von höherem Grade als g_2, so ist auch $x = \infty$ eine Sonderstelle von f, hat dagegen g_2 höhern Grad als g_1, so ist $x = \infty$ eine Nullstelle von f. Hat g_1 die Nullstellen $a_1, a_2, \ldots a_m$, g_2 die Nullstellen $c_1, c_2, \ldots c_n$, so ist f der Quotient zweier endlichen Produkte

$$f(x) = c \cdot \frac{(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_m)}{(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n)} \quad .$$

Für die Punkte der Umgebung eines jeden Punktes a, der nicht Sonderstelle ist, läßt sich f in eine Potenzreihe

$$f \equiv \mathfrak{P}(x - a)$$

entwickeln, d. i. in eine unendliche Reihe, die nach steigenden natürlichen Potenzen von $x - a$ fortschreitet. Die Reihe ist gültig innerhalb eines Kreises, der um a beschrieben ist und die nächste Sonderstelle c enthält.

Für alle Punkte außerhalb eines Kreises der um a beschrieben ist und alle Sonderstellen einschließt, kann f in der Form

$$f = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x - a}\right) \quad .$$

entwickelt werden.

Eine gebrochene rationale Funktion mit der m_k-fachen Sonderstelle c_k verwandelt sich durch Multiplikation mit

$$(x - c_k)^{m_k}$$

in eine Funktion, die an der Stelle c_k sich regulär verhält, d. h. für die c_k keine Sonderstelle ist.

3. Als ganze Funktion $G(x)$ bezeichnet man eine Funktion, die durch eine für jedes endliche x gültige Potenzreihe dargestellt wird, die also im Endlichen keine Sonderstelle hat. Ist

$$G(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots \quad ,$$

so kann durch keinen endlichen Wert von n ein Produkt

$$x^{-n} G(x)$$

gewonnen werden, das sich im Unendlichen regulär verhält; daher wird $x = \infty$ als wesentliche Sonderstelle bezeichnet.

Im Gegensatze hierzu stehen die außerwesentlichen Sonderstellen a, in denen eine Funktion f zwar unendlich wird, durch Multiplikation mit einer natürlichen Potenz von $x - a$ aber ein Produkt

$$(x - a)^m \cdot f(x)$$

sich ergibt, das sich im Punkte a wie eine ganze Funktion verhält, indem es sich in der Umgebung von a in eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x - a)$ verwandeln läßt.

4. Unter den ganzen Funktionen zeichnet sich die Exponentialfunktion

$$e^{G(x)}$$

dadurch aus, daß sie im Endlichen keine Nullstelle hat*).

Eine ganze Funktion $f(x)$ ohne Nullstelle im Endlichen kann immer auf die Form $e^{G(x)}$ gebracht werden. Nach der Voraussetzung hat $lf(x)$ keine Sonderstelle im Endlichen, ist also eine ganze Funktion, daher ist

$$f(x) = e^{G(x)} \quad ,$$

wenn $G(x)$ für $lf(x)$ gesetzt wird.

5. Eine ganze Funktion mit einer endlichen Anzahl im Endlichen liegender Nullstellen erhält man, wenn man eine rationale ganze Funktion mit einer Exponentialfunktion multipliziert, also unter der Form

$$G(x) = G_0(x) \cdot e^{\overline{G}(x)} \quad .$$

Sind die Nullstellen im Endlichen vorgeschrieben, so ist G_0 bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, den man in die Exponentialfunktion einrechnen kann; diese selbst bleibt innerhalb der für sie festzuhaltenden Voraussetzungen völlig willkürlich.

6. Unter einer transcendenten ganzen Funktion verstehen wir eine ganze Funktion mit unendlich vielen Nullstellen

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ldots a_\infty \quad ,$$

und setzen voraus, daß in jedem endlichen Gebiete nur eine endliche Anzahl Nullstellen enthalten sind, daß also

$$\lim_{n=\infty} |a_n| = \infty \quad ,$$

wenn unter $|a_n|$ der absolute Wert (d. i. der Modul) der komplexen Zahl a_n verstanden wird. Wir wollen zunächst alle Nullstellen als von Null verschieden annehmen; auch mögen sie nach der Größe geordnet sein, unbeschadet der Möglichkeit, daß sich darunter Gruppen gleicher Zahlen finden.

Die Funktion

$$1) \qquad E(x, m) = (1 - x) \cdot e^{\sum_1^m r \left(\frac{x^r}{r}\right)}$$

ist eine ganze Funktion mit der Nullstelle 1, die Funktion

$$2) \qquad E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)$$

hat daher die Nullstelle a_ν. Das unendliche Produkt

$$3) \qquad \prod_1^\infty {}^\nu E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)$$

ergibt innerhalb der Grenzen seiner Gültigkeit eine ganze Funktion mit den Nullstellen $a_1, a_2, a_3, \ldots$, wobei die Zahlen m_ν, die wir als ganze ansehen wollen, vor der Hand noch unbestimmt sind. Man kann nun über die m_ν so verfügen, daß 3) für jedes endliche x gilt, daß also durch 3) eine ganze Funktion dargestellt wird.

---

*) Die Funktionszeichen G, G_1, G' u. s. w. sollen von jetzt an immer für ganze Funktionen gebraucht werden.

7. Zunächst bemerken wir noch eine Form für $\varepsilon(x, m)$. Für $|x| < 1$ hat man bekanntlich

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\right) .$$

Hieraus folgt

$$1 - x = e^{-\sum_0^\infty r \frac{x^{r+1}}{r+1}} .$$

Führt man dies in $E(x, m)$ ein, so erhält man

$$E(x, m) = e^{-\sum_1^\infty r \frac{x^{m+r}}{m+r}} ,$$

und daher

$$E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) = e^{-\sum_1^\infty r \frac{1}{r+m_\nu}\cdot\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{r+m_\nu}} ,$$

wobei $|x| < |a_\nu|$ sein muß.

Setzt man

$$1) \qquad D_n = \sum_1^\infty {}_r \sum_n^\infty {}_\nu \left[\frac{1}{r+m_\nu}\cdot\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{r+m_\nu}\right] ,$$

so ist

$$|D_n| < \sum_1^\infty {}_r \sum_n^\infty {}_\nu \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{r+m_\nu} ,$$

wenn $m_\nu > 0$. Ist $|x < a_n|$, so ist auch

$$|D_n| < \sum_n^\infty {}_\nu \frac{1}{1 - \left|\frac{x}{a_\nu}\right|}\cdot\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{m_\nu+1} .$$

Wird $1 - \left|\frac{x}{a_n}\right|$ mit k bezeichnet, so ist

$$1 - \left|\frac{x}{a_\nu}\right| \overline{\gtrless} k , \qquad \nu = n+1, n+2, \ldots ,$$

folglich

$$|D_n| < \left|\frac{x}{k}\right| \sum_n^\infty {}_\nu \frac{1}{|a_\nu|}\cdot\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{m_\nu} .$$

Man kann nun immer eine unendliche Reihe positiver, nach der Größe geordneter Zahlen

$$\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \ldots$$

so annehmen, daß $\varepsilon < 1$, und daß die unendliche Reihe

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots$$

eine endliche Summe s hat; ferner kann man die Zahlen $m_1, m_2, m_3, \ldots$ auf mehrfache Weise so bestimmen, daß von einer bestimmten Stelle ν an

$$\varepsilon^{m_\nu+1} < \varepsilon_\nu \quad ;$$

alsdann ist

$$\varepsilon^{m_1} + \varepsilon^{m_2} + \varepsilon^{m_3} + \ldots$$

eine endliche Zahl. Unter dieser Voraussetzung für die m_ν ist daher auch $|D_n|$, und damit auch

$$2) \qquad D_n = \sum_1^\infty {}_r \sum_n^\infty {}_\nu \left[\frac{1}{r+m_\nu}\cdot\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{r+m_\nu}\right]$$

von endlicher Größe.

In dieser Doppelreihe kann man alle gleich hohen Potenzen von x zusammenfassen und erhält dadurch eine Potenzreihe

$$D_n = \mathfrak{P}(x, n) \quad .$$

Ersetzt man in D_n den Zeiger durch 1 und $n+1$, so erhält man identisch

$$\mathfrak{P}(x, 1) - \mathfrak{P}(x, n+1) = \sum_1^n{}^{\nu} \sum_1^{\infty}{}^{r} \frac{1}{r+m_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{r+m_\nu} ,$$

und hieraus weiter

$$3) \qquad e^{-\mathfrak{P}(x,1)} = \prod_1^n{}^{\nu} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) \cdot e^{-\mathfrak{P}(x,n+1)} \quad .$$

Jede der Funktionen E läßt sich in eine für jedes endliche x gültige Potenzreihe verwandeln, daher auch ein Produkt aus einer endlichen Anzahl solcher E; das gleiche gilt von der Exponentialgröße

$$e^{-\mathfrak{P}(x,n+1)} ,$$

solange die Potenzreihe gilt, wenn also

$$|x| < |a_{n+1}| \quad .$$

Daher ist die rechte Seite eine unter dieser Voraussetzung gültige Potenzreihe. Da nun die linke mit der rechten identisch ist, und auf der linken a_n gar keine ausgezeichnete Rolle spielt, so folgt, daß

$$e^{-\mathfrak{P}(x,1)}$$

für jedes endliche x gilt. Man hat daher für jedes endliche x

$$3) \qquad \begin{cases} e^{-\mathfrak{P}(x,1)} = \prod_1^{\infty}{}^{\nu} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) \\ \qquad = \sum_1^{\infty}{}^{\nu} \sum_1^{\infty}{}^{r} \frac{1}{r+m_\nu} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{r+m_\nu} . \end{cases}$$

8. Nach der Voraussetzung ist keine der Nullstellen $a_1, a_2, \ldots$ gleich Null. Um eine ganze Funktion zu erhalten, die auch im Nullpunkte und zwar hier λ mal verschwindet, hat man 3) mit x^λ zu multiplizieren. Außerdem kann man noch den Faktor

$$e^{\overline{G}(x)}$$

hinzufügen, wo der Exponent eine willkürliche ganze Funktion ist, und erhält daher schließlich als allgemeinen Ausdruck für eine ganze Funktion, die λ mal im Nullpunkte, und außerdem an den von Null verschiedenen Stellen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ verschwindet,

$$1) \qquad \begin{cases} G(x) = C \cdot x^\lambda \prod_1^{\infty}{}^{\nu} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) \cdot e^{\overline{G}(x)} , \\ \lim\limits_{n=\infty} |a_n| = \infty \quad . \end{cases}$$

Da man einen konstanten Faktor C angebracht hat, so darf man voraussetzen, daß $\overline{G}(x)$ im Nullpunkte verschwindet, im übrigen ist $\overline{G}(x)$ eine willkürliche ganze Funktion.

Umgekehrt erkennt man leicht, daß jede ganze Funktion mit denselben Nullstellen wie G in der Form 1) enthalten sein muß. Nimmt man an, G_1 sei eine

zweite derartige Funktion, so ist $G_1 : G$ eine ganze Funktion ohne Nullstellen, also von der Form

$$\frac{G_1}{G} = C_1 \cdot e^{\bar{G}(x)} \quad ,$$

daher

$$G_1 = G \cdot C_1 \cdot e^{\bar{G}(x)} \quad ,$$

also wieder von der Form 1).

9. Die Funktion $\bar{G}$ kann in mehrfacher Weise die Gestalt erhalten

$$\bar{G}(0) + \sum_1^\infty {}^{\nu} \bar{g}_\nu(x) \quad ,$$

wo die $\bar{g}_\nu$ ganze rationale, im Nullpunkt verschwindende Funktionen sind; setzt man

$$g_\nu(x) = \bar{g}_\nu(x) + \sum_1^{m_\nu} {}^{r} \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^r \quad ,$$

so erhält man

$$G(x) = C \cdot x^\lambda \prod_1^\infty {}^{\nu} \left\{\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) e^{g_\nu(x)}\right\} \quad .$$

Jede ganze eindeutige Funktion kann daher in ein Produkt von Potenzen von Primfunktionen zerlegt werden, d. h. solcher ganzen Funktionen

$$x, \quad \text{bezw.} \quad \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) e^{g_\nu(x)} \quad ,$$

die nur eine einzige Nullstelle (0, bezw. a_ν) haben.

10. Wir wenden uns nun zur Betrachtung allgemeiner transcendenter eindeutiger Funktionen, d. i. eindeutiger Funktionen, die neben beliebig vielen unwesentlichen Sonderstellen wenigstens eine wesentliche Sonderstelle im Endlichen haben.

Hat die transcendente Funktion $f(x)$ die wesentliche Sonderstelle c, sonst aber keine wesentliche Sonderstelle, so hat die Funktion

$$f\left(\frac{1}{\eta} + c\right)$$

die einzige wesentliche Sonderstelle

$$\eta = \infty \quad ,$$

ist daher eine ganze Funktion

$$G(\eta)$$

der Veränderlichen η; man hat also

$$f\left(\frac{1}{\eta} + c\right) = G(\eta) \quad .$$

Ersetzt man hier η wieder durch x, so erhält man: Jede transcendente Funktion $f(x)$, die in $x = c$ eine wesentliche Sonderstelle, sonst aber keine wesentliche Sonderstelle hat, kann man immer in der Form darstellen

$$f(x) = G\left(\frac{1}{x - c}\right) \quad ,$$

wobei G, wie immer, eine ganze Funktion ist.

Hat dagegen $f(x)$ neben der wesentlichen Sonderstelle $x = c$ noch eine Anzahl außerwesentliche, so hat

$$f\left(\frac{1}{\eta} + c\right)$$

neben der wesentlichen $\eta = \infty$ noch gewisse Stellen im Endlichen zu außerwesentlichen Sonderstellen; ist

$$G_2(\eta)$$

eine ganze Funktion, die die außerwesentlichen Sonderstellen von f zu Nullstellen hat, so kann G_2 immer so gewählt werden, daß

$$f\left(\frac{1}{\eta} + c\right) \cdot G_2(\eta)$$

keine Sonderstellen im Endlichen hat, also eine ganze Funktion

$$G_1(\eta)$$

ist. Man hat daher

$$f\left(\frac{1}{\eta} + c\right) \cdot G_2(\eta) = G_1(\eta) \quad ,$$

oder, wenn man η wieder durch x ersetzt,

$$f(x) = \frac{G_1\left(\frac{1}{x-c}\right)}{G_2\left(\frac{1}{x-c}\right)} \quad .$$

In dieser Gestalt kann also jede transcendente Funktion gebracht werden, die in c eine wesentliche und sonst noch im Endlichen einige außerwesentliche Sonderstellen hat.

Dabei muß eine der beiden Funktionen G_1 oder G_2 transcendent sein; ferner kann man voraussetzen, daß sie keine Nullstelle gemein haben.

11. Eine transcendente Funktion $f(x)$ mit n verschiedenen wesentlichen Sonderstellen

$$c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$$

kann man mit Hilfe von transcendenten Funktionen $F(y)$ herstellen, die nur die wesentliche Sonderstelle ∞ haben. Ersetzt man nämlich y durch eine rationale Funktion $\varphi(x)$, die für $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$ unendlich wird, so hat

$$F[\varphi(x)]$$

die wesentlichen Sonderstellen $c_1, c_2, \ldots c_n$. Bildet man mehrere solche Funktionen, auf die die Sonderstellen $c_1, c_2, \ldots c_n$ passend verteilt sind, und multipliziert jede mit einer rationalen Funktion, so ist die Summe dieser Produkte ebenfalls eine Funktion mit den Sonderstellen $c_1, c_2, \ldots c_n$. Es fragt sich nun, wie man eine gegebene Funktion $f(x)$ unter tunlichster Beschränkung der Willkür auf diesem Wege herstellen kann.

12. Nimmt man eine Reihe von Zahlen

$$c_1, c_2, c_3, \ldots c_{n-1}, c_n$$

willkürlich an, und zwar alle verschieden und endlich bis auf c_1, das wir als unendlich groß voraussetzen wollen, sowie ferner die Zahlen

$$k_0, k_1, k_2, \ldots k_n \quad ,$$

von denen $k_1, \ldots k_n$ von Null verschieden sein sollen, so hat die rationale Funktion

$$\varphi = k_0 + k_1 x + \frac{k_2}{x - c_2} + \frac{k_3}{x - c_3} + \ldots + \frac{k_n}{x - c_n} \tag{1}$$

die außerwesentlichen Sonderstellen

$$c_1, c_2, c_3, \ldots c_n \quad .$$

Führt man eine neue Veränderliche y durch die Gleichung ein

$$2)\qquad \varphi(x) = y \quad ,$$

so gehören zu jedem endlichen y n Werte $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ von x, die von $c_1, c_2, c_3, \ldots$ verschieden sind; im allgemeinen sind sie auch unter sich verschieden, und nur für ganz besondere Werte von y finden sich gleiche unter ihnen.

Wir wollen zunächst voraussetzen, y sei nicht so gewählt, daß unter den $x_1, x_2, \ldots$ zwei gleiche vorkommen. Setzt man

$$3)\qquad \Pi(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) \quad ,$$

so ist

$$\Pi' = \frac{d}{dx}\Pi(x) = \Pi(x)\left(\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \ldots + \frac{1}{x - x_n}\right) \quad ,$$

und daher, wenn mit ν eine der Zahlen $1, 2, \ldots n$ bezeichnet wird

$$\Pi'(x_\nu) = \left(\frac{\Pi(x)}{x - x_\nu}\right)_\nu \quad ,$$

wobei der angehängte Zeiger ν bedeutet, daß nach der Division x_ν an Stelle von x gesetzt werden soll.

Die rationale ganze Funktion $(n-1)$-ten Grades

$$4)\qquad \sum_1^n{}_\nu \frac{f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)} \cdot \frac{\Pi(x)}{x - x_\nu}$$

nimmt daher für die Werte $x_1, x_2, \ldots x_n$ der Veränderlichen x die Werte an

$$f(x_1)\,,\quad f(x_2)\,,\quad f(x_3)\,,\quad \ldots\ f(x_n) \quad ,$$

wobei $f(x)$ jede beliebige eindeutige Funktion sein kann *).

Entwickelt man Π nach fallenden Potenzen und setzt

$$5)\qquad \Pi(x) = x^n + \chi_1 x^{n-1} + \chi_2 x^{n-2} + \ldots + \chi_n \quad ,$$

so erhält man durch Ausführung der Division

$$6)\qquad \frac{\Pi(x)}{x - x_\nu} = x^{n-1} + (x_\nu + \chi_1)x^{n-2} + (x_\nu^2 + \chi_1 x_\nu + \chi_2)x^{n-3} + \ldots$$

Gibt 4) nach steigenden Potenzen von x entwickelt

$$F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + \ldots + F_{n-1}x^{n-1} \quad ,$$

so hat man, wenn man $f(x_\nu) : \Pi'(x_\nu)$ abkürzend mit h_ν bezeichnet,

$$7)\qquad \left\{\begin{array}{l} F_{n-1} = \Sigma h_\nu \quad , \\ F_{n-2} = \Sigma h_\nu \cdot \chi_1 + \Sigma x_\nu h_\nu \quad , \\ F_{n-3} = \Sigma h_\nu \cdot \chi_2 + \Sigma x_\nu h_\nu \cdot \chi_1 + \Sigma x_\nu^2 h_\nu \quad , \\ F_{n-4} = \Sigma h_\nu \cdot \chi_3 + \Sigma x_\nu h_\nu \cdot \chi_2 + \Sigma x_\nu^2 h_\nu \cdot \chi_1 + \Sigma x_\nu^3 h_\nu \\ \cdot \\ F_0 \quad = \Sigma h_\nu \cdot \chi_{n-1} + \Sigma x_\nu h_\nu \cdot \chi_{n-2} + \ldots + \Sigma x_\nu^{n-1} h_\nu \quad , \\ \qquad\qquad \nu = 1, 2, \ldots n \quad . \end{array}\right.$$

13. Ist nun f eine transcendente Funktion mit den wesentlichen Sonderstellen $c_1, \ldots c_n$, so läßt sich nachweisen, daß die F eindeutige Funktionen von y sind, und die wesentliche Sonderstelle $y = \infty$, sonst aber keine wesentliche Sonderstelle haben. Zunächst hat man

$$1)\qquad (x - c_2)(x - c_3)\ldots(x - c_n)\cdot[\varphi(x) - y] = k_1 \Pi(x) \quad ,$$

*) Die Formel 4) ist unter dem Namen »Lagranges Interpolationsformel« bekannt.

und erkennt daraus, daß die symmetrischen Wurzelfunktionen $\chi_1 \ldots \chi_{n-1}$ ganze rationale Funktionen von y, und zwar ersten Grades sind. Es ist daher noch zu beweisen, daß auch die Funktionen

$$2) \qquad \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \frac{x_\nu^k f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)}, \qquad k = 0, 1, \ldots n-1 \quad ,$$

eindeutige Funktionen von y sind, die im Endlichen nur außerwesentliche Sonderstellen haben, daß sie sich also in der Umgebung jedes nicht unendlich fernen Punktes b nach Multiplikation mit einer geeigneten natürlichen Potenz von $(y-b)$ durch eine gewöhnliche Potenzreihe darstellen lassen.

Ist b so gewählt, daß die Gleichung $\varphi(x) = b$ nicht zwei gleiche Wurzeln enthält, und sind $a_1, a_2, \ldots$ diese Wurzeln, so verschwindet $\varphi'(a_\nu)$ für keinen der Zeiger $\nu = 1, 2, \ldots n$, die Gleichung $\varphi(x) = y$ hat daher in der Umgebung von a_ν die Form

$$3) \qquad \varphi'(a_\nu) \cdot (x - a_\nu) + \tfrac{1}{2}\varphi''(a_\nu) \cdot (x - a_\nu)^2 + \ldots = y - b \quad .$$

Diese Gleichung hat für ein hinlänglich kleines $y - b$ eine nahe bei a_ν liegende Wurzel, der man die Form geben kann

$$4) \qquad x_\nu = a_\nu + (y-b)\,\mathfrak{P}_\nu(y-b) \quad .$$

Da $\Pi'(a_\nu)$ von Null verschieden ist, so ergibt sich für $\lambda = 1, 2, \ldots n$ eine Entwicklung von der Form

$$5) \qquad \frac{x_\nu^{\lambda-1} f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)} = (x_\nu - a_\nu)^{-m_\nu} \cdot \overline{\mathfrak{P}}_\nu(x_\nu - a_\nu) \quad ;$$

hierbei ist m_ν Null oder eine natürliche Zahl, je nachdem $f(x)$ sich in der Umgebung von a_ν wie eine ganze Funktion verhält oder in a_ν eine außerwesentliche Sonderstelle hat. Ist nun m die größte unter den Zahlen m_ν, so ist

$$6) \qquad (y-b)^m \sum \frac{x_\nu^{\lambda-1} f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)} = \mathfrak{P}^\lambda(y-b) \quad ,$$

wobei $\mathfrak{P}^\lambda(y-b)$ eine gewöhnliche Potenzreihe bezeichnet.

Wenn dagegen die Gleichung

$$\varphi(x) = b$$

nicht lauter ungleiche Wurzeln hat, so sei

$$\varphi^{(\mu)}(a)$$

der niedrigste Differentialquotient von φ, der für die mehrfache Wurzel a nicht verschwindet; in der Umgebung von a hat man alsdann

$$7) \qquad \frac{1}{\mu!}\varphi^{(\mu)} a \cdot (x-a)^\mu + \frac{1}{(\mu+1)!}\varphi^{(\mu+1)} a \cdot (x-a)^{\mu+1} + \ldots = y - b$$

für die bei a liegende Wurzel dieser Gleichung hat man eine Entwicklung der Form

$$8) \qquad x = a + \eta\,\mathfrak{P}(\eta) \quad ,$$

wobei

$$9) \qquad \eta = \left[\frac{\mu!\,(y-b)}{\varphi^{(\mu)}(a)}\right]^{\frac{1}{\mu}} \quad .$$

Versteht man unter η einen bestimmten Wert dieser μ-deutigen Formel und setzt

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{\mu}} \quad ,$$

so sind die μ Werte der Formel 8)

$$x_\nu = a + \varepsilon^{\nu-1}\eta\,\mathfrak{P}(\varepsilon^{\nu-1}\eta), \qquad \nu = 0, 1, \ldots \mu - 1 \quad ;$$

für $\eta = 0$, also $y = b$, nehmen sie den gemeinsamen Wert a an.

$\Pi'(x_\nu)$ kann in der Umgebung von a_ν als Potenzreihe für $(x_\nu - a_\nu)$ dargestellt werden; da

$$\Pi'(a_\nu) = \Pi''(a_\nu) = \ldots = \Pi^{(\mu-1)}(a_\nu) = 0 \,, \qquad \Pi^{(\mu)} \gtrless 0 \quad ,$$

so ist

$$10) \qquad \Pi'(x_\nu) = (\varepsilon^{\nu-1}\eta)^{\mu-1}\,\bar{\mathfrak{P}}^\nu(\varepsilon^{\nu-1}\eta) \quad .$$

Verhält sich das Produkt $(x-a)^m f(x)$ in der Umgebung von a regulär, so hat man

$$f(x) = (x-a)^{-m}\,\mathfrak{P}(x-a) \quad .$$

Hieraus folgt

$$11) \qquad \frac{x_\nu^{\lambda-1} f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)} = (\varepsilon^{\nu-1}\eta)^{-m-\mu+1} \cdot \mathfrak{P}(\varepsilon^{\nu-1}\eta) \quad ,$$

und weiter

$$12) \qquad \sum_1^\mu {}_\nu \frac{x_\nu^{\lambda-1} f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)} = \eta^{-m-\mu+1} \sum_0^{\mu-1} {}_\nu\, \varepsilon^{-(\nu-1)(m-1)}\,\mathfrak{P}_\lambda(\varepsilon^{\nu-1}\eta) \quad .$$

In der Summe rechts ist η^k mit der Reihe multipliziert:

$$\varepsilon^0 + \varepsilon^{k+1-m} + \varepsilon^{2(k+1-m)} + \ldots + \varepsilon^{(\mu-1)(k+1-m)} \quad ,$$

deren Summe ist

$$\frac{\varepsilon^{\mu(k+1-m)} - 1}{\varepsilon^{k+1-m} - 1} \quad ;$$

sie verschwindet wegen $\varepsilon^\mu = 1$ für jedes k, für das der Nenner von Null verschieden ist; daher enthält die in 12) rechts stehende Summe nur die Glieder η^k, für die, wenn p eine ganze Zahl ist,

$$k + 1 - m = p\,\mu \,, \qquad \text{also} \qquad k = p\,\mu + m - 1 \quad .$$

Auf der rechten Seite von 11) gibt es also nur Glieder mit den Exponenten

$$-m - \mu + 1 + p\,\mu + m - 1 = (p-1)\,\mu \quad .$$

Da nun

$$\eta^\mu = \frac{\mu!\,(y-b)}{\varphi^{(\mu)}(a)} \quad ,$$

so ist bewiesen, daß auch an den Stellen b, für die in $\varphi(x) = b$ gleiche Wurzeln vorkommen, die Summe 12) bei genügend kleinem $y - b$ als Potenzreihe für $y - b$, multipliziert mit einer Potenz $(y-b)^{-q}$, dargestellt wird.

14. Für jedes endliche y besteht, wenn x der Gleichung

$$\varphi(x) = y$$

genügt, die Beziehung

$$1) \qquad \sum_1^{n-1} {}_\nu F_\nu(y) \cdot x^\nu = f(x) \quad .$$

Ist nun x' eine beliebige von $c_1, c_2, \ldots c_n$ verschiedene Zahl, so kann man y immer so wählen, daß

$$y = \varphi(x') \quad ;$$

alsdann hat man

$$\sum_0^{n-1} {}_\nu F_\nu[\varphi(x')]\,x'^\nu = f(x') \quad ,$$

die Gleichung 1) gilt also für jedes von $\infty, c_2, c_3, \ldots c_n$ verschiedene x.

15. Wenn die wesentlichen Sonderstellen $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$ der Funktion $f(x)$ alle im Endlichen sind, so kann man die Änderung benutzen

$$x = c_1 + \frac{1}{z} \quad ;$$

der Sonderstelle $z = \infty$ entspricht dann $x = c_1$, und den Sonderstellen $c_2, c_3, \ldots c_n$ für x entsprechen $c_2', c_3', \ldots c_n'$ für z, wenn

$$c_r = c_1 + \frac{1}{c_r'} \,, \qquad r = 2, 3, \ldots n \quad .$$

Man bildet jetzt die Funktion

$$1)\qquad \overline{\varphi}(z) = k_0 + k_1' z + \frac{k_2'}{z - c_2'} + \frac{k_3'}{z - c_3'} + \dots + \frac{k_n'}{z - c_n'} \quad ,$$

sowie die durch die Änderung aus $f(x)$ hervorgehende, mit den wesentlichen Sonderstellen ∞, c_2', c_3', $\dots c_n'$ behaftete Funktion $\bar{f}(z)$; ordnet man dieser in der angegebenen Weise die Funktionen $F_\nu(y)$ zu, so hat man für jedes endliche, von c_2', c_3', $\dots c_n'$ verschiedene z

$$2)\qquad \sum_0^{n-1} {}^{\nu} F_\nu[\overline{\varphi}(z)] \cdot z^\nu = \bar{f}(z) \quad ,$$

also rückwärts

$$3)\qquad \sum_0^{n-1} {}^{\nu} F_\nu[\varphi(x)] \cdot \left(\frac{1}{x - c_1}\right)^\nu = f(x) \quad .$$

In dieser Darstellung von $f(x)$ ist noch c_1 willkürlich — insofern dafür jede der n wesentlichen Sonderstellen genommen werden kann, — sowie die Reihe der Zahlen k_0, k_1, k_2, $\dots k_n$, die zur Herstellung der Funktion φ mit den außerwesentlichen Sonderstellen c_1, c_2, c_3, $\dots c_n$ dienen, bezw. die mit den k in einfachem Zusammenhange stehenden Zahlen k'.

16. Die soeben gegebene Darstellung einer Funktion, die eine Reihe wesentlicher Sonderstellen, außerdem aber keine Sonderstellen hat, kann man so umgestalten, daß sie mit der einer rationalen Funktion

$$f(x) = \sum_1^n {}^{\nu} G_\nu\left(\frac{1}{x - c_\nu}\right)$$

in Einklang kommt. Haben wir, wenn $f(x)$ rational ist, für die G_ν ganze rationale Funktionen zu nehmen, so kann man zeigen, daß, wenn $f(x)$ eine endliche Anzahl wesentlicher oder außerwesentlicher Sonderstellen hat, allen außerwesentlichen rationale Funktionen G, allen wesentlichen dagegen transcendente zugeordnet werden.

17. Hat $f(x)$ keine außerwesentlichen Sonderstellen, so erkennt man aus Nr. 13 leicht, daß alsdann $F_\nu(y)$ ganze Funktionen von y sind; man hat daher in diesem Falle für jedes endliche y

$$F_\nu(y) = F_{\nu 0} + F_{\nu 1} y + F_{\nu 2} y^2 + \dots \quad ,$$

wobei $F_{\nu\lambda}$ Zahlen sind, die x nicht enthalten.

Bleibt $x - c_1$ unter einer gewissen Grenze, so hat man

$$1)\qquad \varphi(x) = \frac{1}{x - c_1} \mathfrak{P}(x - c_1) \quad ,$$

wo $\mathfrak{P}(x - c_1)$ für $x = c_1$ nicht verschwindet; daher ist

$$2)\qquad F_\nu[\varphi(x)] = \sum_0^\infty [F_{\nu\lambda}(x - c_1)^{-\lambda} \mathfrak{P}^\lambda(x - c_1)] \quad .$$

Setzt man hier

$$\mathfrak{P}^\lambda(x - c_1) = \sum_0^\infty {}^{\mu} A_{\lambda\mu}(x - c_1)^\mu \quad ,$$

so erhält man

$$3)\qquad F_\nu[\varphi(x)] = \sum_0^\infty {}^{\lambda} \sum_0^\infty {}^{\mu} F_{\nu\lambda} A_{\lambda\mu}(x - c_1)^{-\lambda+\mu} \quad .$$

Die rechts stehende Doppelsumme gilt auch, wenn man alle Glieder durch ihre absoluten Werte ersetzt. Denn für ein genügend kleines $x - c_1$

kann man die positive Zahl $\varrho > |x - c_1|$ immer so bestimmen, daß jeder Koeffizient in der gültigen Potenzreihe $\mathfrak{P}(x - c_1)$ kleiner ist, als der der gleich hohen Potenz von $x - c_1$ in der Entwicklung von

$$4)\qquad \frac{g}{1 - \frac{x - c_1}{\varrho}} \quad ,$$

wobei g eine genügend klein zu wählende positive Zahl bezeichnet. Setzt man $x - c_1 = \xi$, wo nun also $|\xi| < \varrho$ ist, so hat man

$$5)\qquad \sum_0^\infty {}^\mu |A_{\lambda\mu}(x - c_1)^{-\lambda+\mu}| < g^\lambda \xi^{-\lambda}\left(1 - \frac{\xi}{\varrho}\right)^{-\lambda} ,$$

folglich

$$6)\qquad \sum_0^\infty {}^\lambda \sum_0^\infty {}^\mu |F_{\nu\lambda} A_{\lambda\mu}(x - c_1)^{-\lambda+\mu}| < \sum_0^\infty {}^\lambda |F_{\nu\lambda}| g^\lambda \xi^{-\lambda}\left(1 - \frac{\xi}{\varrho}\right)^{-\lambda} .$$

Da nun die Reihe

$$\sum_0^\infty {}^\lambda |F_{\nu\lambda}| z^\lambda$$

für jedes endliche z gilt, so folgt aus 6) die Richtigkeit der Behauptung.

Man darf daher in 3) die Glieder anders anordnen; rechnet man die in den F_ν mit gleichen Potenzen von x behafteten zusammen, so erhält man

$$7)\qquad f(x) = \sum_1^\infty {}^k C_k\left(\frac{1}{x - c_1}\right)^k + \mathfrak{P}^1(x - c_1) \quad ,$$

gültig für $|x - c_1| < \varrho$. Da

$$\sum_1^\infty {}^k C_k\left(\frac{1}{x - c_1}\right)^k$$

für beliebig große Werte von $1 : (x - c_1)$ gilt, so ist diese Summe eine g a n z e Funktion von $1 : (x - c_1)$, und kann mit

$$G_1\left(\frac{1}{x - c_1}\right)$$

bezeichnet werden. Da nun

$$f(x) - G_1\left(\frac{1}{x - c_1}\right) = \mathfrak{P}^1(x - c_1) \quad ,$$

so erkennt man, daß sich die linke Seite in der Umgebung von c_1 regulär verhält.

Bildet man nun in derselben Weise für die andern wesentlichen Sonderstellen die ganzen Funktionen

$$G_2\left(\frac{1}{x - c_2}\right) , \quad G_3\left(\frac{1}{x - c_3}\right) \ldots ,$$

so ist

$$f(x) - \sum_1^n {}^\nu G_\nu\left(\frac{1}{x - c_\nu}\right)$$

regulär in der Umgebung j e d e r Sonderstelle von $f(x)$, also regulär an j e d e r Stelle; hieraus folgt, daß dieser Unterschied eine K o n s t a n t e ist. Rechnet man sie in die ganzen Funktionen G_ν ein, so erhält man

$$f(x) = \sum_1^n {}^\nu G_\nu\left(\frac{1}{x - c_\nu}\right) \quad ,$$

übereinstimmend mit der Behauptung.

18. Hat $f(x)$ m wesentliche Sonderstellen $c_1, c_2, \ldots c_m$ und außerdem $n-m$ außerwesentliche $c_{m+1}, \ldots c_n$, so ist, wenn x in der Umgebung einer außerwesentlichen c_ν angenommen wird,

$$f(x) = (x-c_\nu)^{-m_\nu}\left[C_0^{(\nu)} + C_1^{(\nu)}(x-c_\nu) + \ldots\right]$$

Setzt man

$$(x-c_\nu)^{-m_\nu}\left[C_0^{(\nu)} + C_1^{(\nu)}(x-c_\nu) + \ldots + C_{m_\nu-1}^{(\nu)}(x-c_\nu)^{m_\nu-1}\right] = G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right) \quad ,$$

$$f(x) - \sum_{m+1}^{n}{}_\nu G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right) = f_1(x) \quad ,$$

so ist $f_1(x)$ eine eindeutige Funktion, die nur die Sonderstellen $c_1, c_2, \ldots c_m$ hat, die sämtlich wesentlich sind. Daher ist

$$f_1(x) = \sum_1^m{}_\nu G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right) \quad ,$$

und daher schließlich

$$f(x) = \sum_1^m{}_\nu G_\nu\left(\frac{1}{x-c_1}\right) \quad ,$$

wo nun die ganzen Funktionen G_ν für $\nu = 1, 2, \ldots m$ transcendent, für $\nu = m+1, m+2, \ldots n$ rational sind.

19. Wir schließen hieran den Beweis eines funktionentheoretischen Lehrsatzes, den wir an späterer Stelle verwenden werden*).

Ist die gewöhnliche Potenzreihe

$$P(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\nu A_\nu x^\nu \quad ,$$

gültig für jedes $|x|$, das zwischen zwei bestimmten Grenzen R und R' liegt, und ist, wenn x innerhalb des Geltungsbereichs einen Kreis um den Nullpunkt mit dem Halbmesser r beschreibt, der absolute Wert der Reihe beständig kleiner als G, so ist für jeden Zeiger μ

$$|A_\mu| < G r^{-\mu} \quad .$$

Beweis. In der endlichen Reihe mit ganzzahligen Exponenten

$$P(x) = \sum_{-m}^{+m}{}_\nu A_\nu x^\nu$$

ersetzen wir x durch $r\xi^\lambda$, wo r eine beliebige positive Zahl bedeutet und ξ den absoluten Wert 1 haben soll, mit der Beschränkung, daß ξ^ν nicht 1 sein soll, wenn man für ν die Zahlen $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm m$ setzt.

Auf dem um den Nullpunkt mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreise nimmt $|P(x)|$ verschiedene Werte an; ist deren obere Grenze G, so hat man

$$1) \qquad \left|\frac{1}{l}\sum_0^{l-1}{}_\lambda P(r\xi^\lambda)\right| < G \quad .$$

Ferner ist

$$2) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{l}\sum_0^{l-1}{}_\lambda P(r\xi^\lambda) &= \sum_{-m}^{+m}{}_\nu \sum_0^{l-1}{}_\lambda \left(\frac{1}{l}A_\nu r^\nu \xi^{\nu\lambda}\right) \text{**)} \\ &= A_0 + \frac{1}{l}\sum_{-m}^{+m}{}_\nu A_\nu \cdot \frac{1-\xi^{\nu l}}{1-\xi^\nu} r^\nu \quad , \end{aligned}\right.$$

*) Weierstrass, Abhandlungen aus der Funktionenlehre, Berlin 1886, S. 93 und 94.

**) In Weierstrass, Abhandlungen, steht irrtümlich an dieser Stelle $r^{\nu\lambda}$ statt r^ν.

wo bei der Summe rechts der Wert $m = 0$ wegzulassen ist. Man kann nun l immer so groß wählen, daß

$$\left| \frac{1}{l} \sum_{-m}^{+m} {}_\nu A_\nu \frac{1 - \xi^{\nu l}}{1 - \xi^\nu} r^\nu \right|$$

kleiner als eine beliebig kleine positive Größe δ wird; aus 1) und 2) folgt alsdann

$$3) \qquad |A_0| \leq G + \delta\,, \quad \text{also} \quad |A_0| \leq G \quad .$$

Dieses Ergebnis ist unabhängig von m, bleibt also auch bestehen, wenn $m = \infty$ angenommen wird.

Multipliziert man die Reihe

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} {}_\nu A_\nu r^\nu$$

mit $r^{-\mu}$, so erhält man eine zwischen denselben Grenzen für ν gebildete Potenzreihe, wobei aber A_μ an die Stelle von A_0 getreten ist; aus 3) geht daher hervor

$$|A_\mu| < G r^{-\mu} \quad .$$

---

20. Indem wir nun zu den homogenen linearen Differentialgleichungen übergehen, wollen wir hier, wo es sich nur um Andeutung der Grundlinien handeln kann, uns auf die dritte Ordnung beschränken, also auf Differentialgleichungen der Form

$$1) \qquad p_0 y''' + p_1 y'' + p_2 y' + p_3 y = 0 \quad ,$$

wobei p_0, p_1, p_2, p_3 gegebene Funktionen von x sind; über sie wollen wir voraussetzen, daß sie für alle endlichen Werte von x eindeutig, endlich und stetig, also ganze rationale oder transcendente Funktionen sind; ohne weitere Beschränkung kann ferner festgesetzt werden, daß sie keine gemeinsame Nullstelle haben.

Entfernt man in 1) p_0 durch Division, so ergibt sich

$$2) \qquad y''' + \frac{p_1}{p_0} y'' + \frac{p_2}{p_0} y' + \frac{p_3}{p_0} y = 0 \quad .$$

Wenn p_0 Nullstellen hat, so haben $p_1 : p_0, p_2 : p_0, p_3 : p_0$ in denselben Punkten außerwesentliche Sonderstellen, die man als Sonderstellen der Differentialgleichung bezeichnet. In jedem andern endlichen Punkte verhalten sich die Koeffizienten von 2) regulär; dieselbe Bezeichnung gebraucht man daselbst für die Differentialgleichung.

21. Wir suchen der Differentialgleichung in der Umgebung der Stelle a durch eine Potenzreihe allgemeiner Art zu genügen

$$y = A(x-a)^\alpha + B(x-a)^\beta + C(x-a)^\gamma + \ldots$$

wobei wir die $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ als eine unendliche Reihe komplexer Zahlen voraussetzen.

Wird in Nr. 20, 1) die Ersetzung

$$x - a = x'$$

gemacht, so entsteht eine neue Differentialgleichung von wesentlich derselben Art, bei welcher die Stelle $x' = 0$ der Stelle $x = a$ entspricht. Wir können uns daher auf die Untersuchung des Integrals in der Umgebung von $x = 0$ beschränken.

Unter den Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ wird es solche geben, die um natürliche Zahlen voneinander abweichen, neben andern, deren Unterschied keine natürliche Zahl ist. Zahlen der ersten Art vereinigen wir zu einer Reihe nach den realen Teilen ihrer Elemente; dadurch ordnen sich die in y vorkommenden Exponenten in der Weise

$$\begin{array}{lllll} a_1\,, & a_1 + 1\,, & a_1 + 2\,, & a_1 + 3\,, & \ldots \\ a_2\,, & a_2 + 1\,, & a_2 + 2\,, & a_2 + 3\,, & \ldots \\ a_3\,, & a_3 + 1\,, & a_3 + 2\,, & a_3 + 3\,, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

wobei die Koeffizienten der Anfangsglieder jeder Zeile von Null verschieden sind, die der übrigen Glieder dagegen verschwinden können. Faßt man die zu jeder Zeile gehörigen Glieder in y zusammen, so erhält man

$$1) \qquad y = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \dots$$

wobei die Glieder der Potenzreihe η_k die Exponenten aufweisen

$$a_k, \quad a_k + 1, \quad a_k + 2, \quad \dots ,$$

so daß also

$$2) \qquad \eta_k = \sum_1^\infty C_{r,k}\, x^{a_k + r} \quad .$$

Wird die Differentialgleichung abkürzungsweise mit

$$D(x, y) = 0$$

bezeichnet, so folgt aus 1)

$$D(x, y) \equiv D(x, \eta_1) + D(x, \eta_2) + D(x, \eta_3) + \dots = 0 \quad .$$

Diese Gleichung ist identisch; werden p_0, p_1, p_2, p_3 als gewöhnliche Potenzreihen entwickelt, und in $D(x, \eta_k)$ die mit gleichen Potenzen von x behafteten Glieder zusammengenommen, so muß jeder Koeffizient der entstehenden Potenzreihe identisch verschwinden. Dabei kann kein Exponent, der in $D(x, \eta_k)$ vorkommt, sich in irgend einem andern $D(x, \eta)$ wieder vorfinden; es muß also für jedes k

$$D(x, \eta_k) = 0 \quad ,$$

d. i. die Reihen

$$\eta_1, \ \eta_2, \ \eta_3, \ \dots$$

sind Integrale von $D(x, y) = 0$.

22. Wenn wir die oben angedeutete Entwicklung für η_k ausführen, und den Koeffizienten jeder Potenz von x gleich Null setzen, so erhalten wir eine unendlich große Anzahl von linearen Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten in η_k. Wegen der Verminderung der Exponenten bei der Bildung von η', η'', η''', wollen wir die Differentialgleichung auf die Form bringen

$$1) \qquad x^3 \cdot P_0 y''' + x^2 \cdot P_1 y'' + x \cdot P_2 y' + P_3 y = 0$$

wobei die P wieder ganze Funktionen von x sind. Dies ist immer ausführbar; denn wenn z. B. der Koeffizient von y''' in 1) die Absonderung von x^3 nicht gestattet, so steht es frei, 1) mit x, x^2, oder x^3 zu multiplizieren; man kommt dann unter Umständen zu Funktionen P_1, P_2, P_3 die nicht mit x^0, sondern x^1, x^2 oder x^3 anfangen; jedenfalls ist aber vorauszusetzen, daß P_0, P_1, P_2, P_3 nicht $x = 0$ als gemeinsame Nullstelle haben. Die Form 1) bezeichnet man als die Normalform der Differentialgleichung.

23. Nach Nr. 21, 2) hat man, wenn man den Zeiger k wegläßt,

$$\begin{aligned}
\eta &= c_0 x^a + c_1 x^{a+1} + c_2 x^{a+2} + \dots \\
x\eta' &= c_0 a x^a + c_1 (a+1) x^{a+1} + c_2 (a+2) x^{a+2} + \dots \\
x^2\eta'' &= c_0 a(a-1) x^a + c_1 (a+1) a \cdot x^{a+1} + c_2 (a+2)(a+1) x^{a+2} + \dots \\
x^3\eta''' &= c_0 a(a-1)(a-2) x^a + c_1 (a+1) a (a-1) x^{a+1} + c_2 (a+2)(a+1) a x^{a+2} + \dots
\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}
P_3 &= a_{30} + a_{31} x + a_{32} x^2 + \dots \\
P_2 &= a_{20} + a_{21} x + a_{22} x^2 + \dots \\
P_1 &= a_{10} + a_{11} x + a_{12} x^2 + \dots \\
P_0 &= a_{00} + a_{01} x + a_{02} x^2 + \dots
\end{aligned}$$

Setzt man dies in Nr. 22, 1), ordnet nach den Potenzen x^a, x^{a+1}, x^{a+2}, ... und setzt zunächst den Koeffizienten von x^a gleich Null, so erhält man

$$1)\qquad c_0[a_{30} + a_{20}\,a + a_{10}\,a(a-1) + a_{00}\,a(a-1)(a-2)] = 0 \quad .$$

Da nach der Voraussetzung c_0 nicht verschwindet, so folgt

$$2)\qquad a_{30} + a_{20}\,a + a_{10}\,a(a-1) + a_{00}\,a(a-1)(a-2) = 0 \quad ,$$

oder, nach fallenden Potenzen von a,

$$3)\qquad a_{00}\,a^3 + (a_{10} - 3\,a_{00})\,a^2 + (a_{20} - a_{10} + 2\,a_{00})\,a + a_{30} = 0 \quad .$$

Diese Gleichung bestimmt die Anfangsexponenten a, und wird daher als die Bestimmung der Differentialgleichung bezeichnet. Sie ergibt drei Wurzeln für a, die im allgemeinen verschieden sind; in besondern Fällen aber können zwei von ihnen oder alle drei einander gleich sein. Zu beachten ist ferner der besondere Fall, wenn zwei von ihnen oder auch alle drei um natürliche Zahlen verschieden sind, also zu derselben Reihe gehören.

Ist a_{00} von Null verschieden, so hat die Gleichung 2) drei Wurzeln, von denen keine unendlich groß ist. Man bezeichnet alsdann die Stelle $x = 0$ als Stelle der Bestimmtheit.

Ist $a_{00} = 0$, $a_{10} \gtrless 0$, so hat 2) eine unendliche neben zwei endlichen Wurzeln; ist $a_{00} = a_{10} = 0$, $a_{20} \gtrless 0$, so gibt es nur eine endliche Wurzel.

24. Nach der Voraussetzung sind die p_k, also auch die P_k, ganze Funktionen. Ist nun $x = 0$ eine reguläre Stelle, so hat p_0 den Teiler x nicht; die von allen gemeinsamen Teilern befreite Differentialgleichung muß daher zur Herstellung der Normalform mit x^3 multipliziert werden. Hieraus folgt sofort, daß

$$a_{10} = a_{20} = a_{30} = a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0 \quad .$$

Die Bestimmung ist daher

$$a_{00}\,a(a-1)(a-2) = 0$$

und ergibt die Wurzeln

$$a_1 = 0\,, \qquad a_2 = 1\,, \qquad a_3 = 2 \quad .$$

Bei einer Differentialgleichung zweiter Ordnung erhält man unter derselben Voraussetzung

$$a_{10} = a_{20} = a_{21} = 0 \quad ,$$

und die beiden Wurzeln

$$a_1 = 0\,, \qquad a_2 = 1 \quad .$$

Jede reguläre Stelle ist also eine Stelle der Bestimmtheit und ergibt als Wurzeln der Bestimmung 0, 1, 2, bezw. 0, 1.

25. Beispiele. A) Die Gleichung (§ 3, Nr. 8)

$$y''' + a_1\,y'' + a_2\,y' + a_3\,y = 0$$

hat die Normalform

$$x^3 \cdot 1 \cdot y''' + x^2 \cdot a_1\,x \cdot y'' + x \cdot a_2\,x^2 \cdot y' + a_3\,x^3 \cdot y = 0 \quad ,$$

daher ist die Bestimmung

$$a(a-1)(a-2) = 0 \quad ,$$

mit den Wurzeln

$$a_1 = 0\,, \qquad a_2 = 1\,, \qquad a_3 = 2 \quad .$$

$$\text{B)}\qquad x^3 y''' + a_1\,x^2 y'' + a_2\,x y' + a_3\,y = 0$$

hat die Normalform; die Bestimmung ist

$$a^3 + (a_1 - 3)\,a^2 + (a_2 - a_1 + 2)\,a + a_3 = 0 \quad .$$

C) Die Gausssche Differentialgleichung

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - ab \cdot y = 0$$

hat die außerwesentlichen Sonderstellen 0 und 1.

α) Für $x = 0$ erhält sie die Normalform durch Multiplikation mit x, und ergibt die Bestimmung

$$a^2 - (1-c)a = 0 \quad ,$$

mit den Wurzeln

$$a_1 = 0 \quad \text{und} \quad a_2 = 1 - c \quad .$$

β) Für $x = 1$ macht man die Ersetzung

$$x = x' + 1 \quad .$$

und erhält die geänderte Gleichung

$$x'(x'+1)y'' + [a+b-c+1+(a+b+1)x']y' + aby = 0 \quad ,$$

deren Bestimmung

$$a^2 - (c-a-b)a = 0$$

die Wurzeln hat

$$a_1 = 0 \,, \quad a_2 = c - a - b \quad .$$

26. Die Koeffizienten von

$$x^{a+1}, \quad x^{a+2}, \ldots$$

in Nr. 23 ergeben Gleichungen zur schrittweisen Bestimmung von

$$c_0 \,, c_1 \,, c_2 \,, \ldots$$

Setzt man

$$a_{3i} + a_{2i}(a+k) + a_{1i}(a+k)(a+k-1) + a_{0i}(a+k)(a+k-1)(a+k-2) \equiv b_{ik} \,,$$

so erhält man

$$1) \quad \begin{cases} b_{01} c_1 + b_{10} c_0 = 0 \quad , \\ b_{02} c_2 + b_{11} c_1 + b_{20} c_0 = 0 \quad , \\ b_{03} c_3 + b_{12} c_2 + b_{21} c_1 + b_{30} c_0 = 0 \quad , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Hiernach bleibt c_0 in jedem Falle unbestimmt; die andern Unbekannten ergeben sich aus dem Vereine 1) (dem Koeffizientenvereine) als Vielfache von c_0, durch 1) ist also das zu einer Wurzel a der Bestimmung gehörige Integral η bis auf einen konstanten Faktor c_0 bestimmt. Dies hätte sich leicht voraussehen lassen, da eine homogene Gleichung offenbar für ein ganz beliebiges c_0 durch $c_0\,\eta$ erfüllt wird, wenn sie das Integral η hat.

Durch jede der Gleichungen 1) wird eine neue Unbekannte eingeführt; ihr Koeffizient b_{0r} ergibt sich aus der Bestimmung, wenn man darin a durch $a + r$ ersetzt. Hat daher die Bestimmung zwei Wurzeln a_1 und a_2, die sich durch eine natürliche Zahl r unterscheiden, so daß also $a_2 = a_1 + r$, und stellt man den Koeffizientenverein für die Wurzel a_1 mit dem kleinern realen Teile auf, so haben die $(r-1)$-te und r-te Gleichung dieselben r Unbekannten $c_0, c_1, c_2, \ldots c_{r-1}$. Im allgemeinen kann diesen Gleichungen nur durch $c_0 = c_1 = \ldots = c_{r-1} = 0$ genügt werden; Werte, die nicht sämtlich verschwinden, ergeben sich nur dann, wenn die Determinante des Vereins verschwindet. Unterscheiden sich also zwei oder alle drei Wurzeln der Bestimmung einer homogenen linearen Differentialgleichung dritter Ordnung um natürliche Zahlen, so gibt es im allgemeinen nur für die Wurzel eine Reihe, die den größten realen Teil hat.

Zu einer regulären Stelle der Bestimmtheit gehören die Wurzeln $\alpha = 0, 1, 2$. Man erhält für die ersten b_{ik} folgende Werte:

$$\begin{aligned} \alpha = 0: &\quad b_{01} = b_{02} = b_{10} = b_{20} = 0 \quad ; \\ \alpha = 1: &\quad b_{01} = b_{10} = 0 \quad ; \\ \alpha = 2: &\quad b_{20} = 0 \quad ; \end{aligned}$$

die übrigen b_{ik} verschwinden im allgemeinen nicht. Für $\alpha = 0$ werden daher die ersten beiden Gleichungen des Koeffizientenvereins identisch, für $\alpha = 1$ dagegen nur die erste. Hieraus folgt als wichtige Eigenschaft regulärer Stellen: An jeder regulären Stelle gehört zu jeder der drei Wurzeln $\alpha = 0$, 1 und 2 eine Reihe; in der Reihe für $\alpha = 2$ bleibt nur c_0 willkürlich; in der Reihe für $\alpha = 1$ bleiben c_0 und c_1 willkürlich; in der Reihe für $\alpha = 0$ bleiben c_0, c_1, c_2 willkürlich.

27. In der Differentialgleichung

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$$

ist

$$a_{00} = 1, \quad a_{11} = a_1, \quad a_{22} = a_2, \quad a_{33} = a_3 \quad ;$$

alle andern a_{ik} sind Null. Daher ist für $\alpha = 0$

$$1) \begin{cases} b_{00} = 0, \quad b_{01} = 0, \quad b_{02} = 0, \quad b_{03} = 3!, \quad b_{04} = \frac{4!}{1!}, \quad b_{05} = \frac{5!}{2!}, \dots \\ b_{10} = 0, \quad b_{11} = 0, \quad b_{12} = 2!\, a_1, \quad b_{13} = \frac{3!}{1!} a_1, \quad b_{14} = \frac{4!}{2!} a_1, \quad b_{15} = \frac{5!}{3!} a_1, \dots \\ b_{20} = 0, \quad b_{21} = 1 \cdot a_2, \quad b_{22} = 2\, a_2, \quad b_{23} = \frac{3!}{2!} a_2, \quad b_{24} = \frac{4!}{3!} a_2, \quad b_{25} = \frac{5!}{4!} a_2, \dots \\ b_{30} = a_3, \quad b_{31} = a_3, \quad b_{32} = a_3, \quad b_{33} = a_3, \quad \dots \end{cases}$$

Alle b_{ik} mit höherem ersten Zeiger sind Null. Die ersten beiden Gleichungen des Koeffizientenvereins verschwinden identisch; zu $\alpha = 0$ gehört also eine Reihe, und für ihre Koeffizienten hat man

$$2) \begin{cases} c_3 + \frac{1}{3} a_1 c_2 + \frac{1}{3 \cdot 2} a_2 c_1 + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} a_3 c_0 = 0 \quad , \\ c_4 + \frac{1}{4} a_1 c_3 + \frac{1}{4 \cdot 3} a_2 c_2 + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} a_3 c_1 = 0 \quad , \\ c_5 + \frac{1}{5} a_1 c_4 + \frac{1}{5 \cdot 4} a_2 c_3 + \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3} a_3 c_2 = 0 \quad , \\ c_6 + \frac{1}{6} a_1 c_5 + \frac{1}{6 \cdot 5} a_2 c_4 + \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4} a_3 c_3 = 0 \quad , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Hiernach bleiben c_0, c_1, c_2 ganz unbestimmt. Zur Vereinfachung der Berechnung der c suchen wir zunächst ein partikuläres Integral, indem wir c_0, c_1, c_2 möglichst bequeme Werte geben; wir setzen, unter r eine noch zu bestimmende Zahl verstehend,

$$c_0 = 1, \quad c_1 = r, \quad c_2 = \tfrac{1}{2} r^2 \quad ,$$

und erhalten zunächst für c_3

$$c_3 = -\frac{1}{3!}(a_1 r^2 + a_2 r + a_3) \quad .$$

Wählt man für r eine Wurzel der Gleichung

$$3)\qquad r^3 + a_1 r^2 + a_2 r + a_3 = 0 \quad ,$$

so erhält c_3 einen möglichst einfachen Wert, nämlich

$$c_3 = \frac{r^3}{3!} \quad .$$

Aus c_1, c_2 und c_3 ergibt sich nun sofort

$$c_4 = \frac{r^4}{4!} \quad .$$

Nimmt man nun an, man habe bis zu einem bestimmten Werte n gefunden

$$c_n = \frac{r^n}{n!} \quad ,$$

so folgt aus 2)

$$c_{n+1} + \frac{a_1}{n+1} \cdot \frac{r^n}{n!} + \frac{a_2}{(n+1)n} \cdot \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{a_3}{(n+1)n \cdot (n-1)} \cdot \frac{r^{n-2}}{(n-2)!} = 0 \, ,$$

$$c_{n+1} = -\frac{r^{n-2}}{(n+1)!}(a_1 r^2 + a_2 r + a_3) = \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} \quad .$$

Folglich hat man das partikuläre Integral

$$\eta = 1 + r x + \frac{r^2}{2!} x^2 + \frac{r^3}{3!} x^3 + \frac{r^4}{4!} x^4 + \dots$$

in Übereinstimmung mit § 3, Nr. 8.

Hat die Gleichung 3) verschiedene Wurzeln r_1, r_2, r_3, so ergeben sich drei Integrale

$$\eta_1 = 1 + r_1 x + \frac{r_1^2}{2!} x^2 + \dots$$

$$\eta_2 = 1 + r_2 x + \frac{r_2^2}{2!} x^2 + \dots$$

$$\eta_3 = 1 + r_3 x + \frac{r_3^2}{2!} x^2 + \dots$$

Hieraus ergeben sich ferner die Integrale

$$\eta_4 = \eta_1 - \eta_2 = (r_1 - r_2) x + \dots$$

$$\eta_5 = (r_2 - r_3)\eta_1 + (r_3 - r_1)\eta_2 + (r_1 - r_2)\eta_3$$

$$= \frac{1}{2!}[r_1^2(r_2 - r_3) + r_2^2(r_3 - r_1) + r_3^2(r_1 - r_2)] x^2 + \dots$$

Die Integrale η_1, η_4, η_5 fangen mit den Gliedern x^0, x^1, x^2 an, entsprechend den Wurzeln 0, 1, 2 der Bestimmung.

28. Die Differentialgleichung

$$x^3 y''' + a_1 x^2 y'' + a_2 x y' + a_3 y = 0$$

hat

$$a_{00} = 1 \, , \quad a_{10} = a_1 \, , \quad a_{20} = a_2 \, , \quad a_{30} = a_3 \quad ,$$

alle andern a_{ik} sind Null. Daher sind nur die b_{0k} von Null verschieden, dagegen alle andern b_{ik} gleich Null; aus dem Koeffizientenverein folgt also

$$c_1 = c_2 = c_3 = \dots = 0 \quad ,$$

und

$$\eta = c_0 x^\alpha \quad .$$

Sind α_1, α_2, α_3, die Wurzeln der Bestimmung, und voneinander verschieden, so beschränken sich die Reihen für η_1, η_2, η_3 auf ihre Anfangsglieder.

29. Bei der GAUSSschen Gleichung (Nr. 25, C) hat man für eine Entwicklung in der Umgebung von $x = 0$

$$a_{00} = 1\,, \quad a_{01} = -1\,, \quad a_{02} = a_{03} = \ldots = 0\,,$$
$$a_{10} = c\,, \quad a_{11} = -(a + b + 1)\,, \quad a_{12} = a_{13} = \ldots = 0\,,$$
$$a_{20} = 0\,, \quad a_{21} = -a\,b\,, \quad a_{22} = a_{23} = \ldots = 0\,;$$

aus

$$b_{ik} = a_{2i} + a_{1i}(\alpha + k) + a_{0i}(\alpha + k)(\alpha + k - 1)$$

folgt für $\alpha = 1 - c$

$$b_{01} = 2 - c\,, \quad b_{02} = 2(3 - c)\,, \quad b_{03} = 3(4 - c)\,, \ \ldots$$
$$b_{10} = -(a - c + 1)(b - c + 1)\,, \quad b_{11} = -(a - c + 2)(b - c + 2)\,,$$
$$b_{12} = -(a - c + 3)(b - c + 3)\,, \ \ldots, \ b_{2k} = b_{3k} = \ldots = 0\,.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$c - 2 = c', \quad a - c + 1 = a', \quad b - c + 1 = b'\,,$$

und nimmt $c_0 = 1$, so erhält man das Integral

$$1) \qquad y = x^{1-c}\left\{1 + \frac{a'b'}{c'}x + \frac{a'(a'+1)b'(b'+1)}{2!\,c'(c'+1)}x^2 + \ldots\right\}$$

Die eingeklammerte Reihe ist die hypergeometrische, mit den Parametern a', b', c'.

Für die andre Wurzel $\alpha = 0$ der Bestimmung ergibt sich, wenn wieder $c_0 = 1$ genommen wird,

$$b_{01} = c\,, \quad b_{02} = 2(c + 1)\,, \quad b_{03} = 3(c + 2)\,, \ \ldots$$
$$b_{10} = -a\,b\,, \quad b_{11} = -(a + 1)(b + 1)\,, \quad b_{12} = -(a + 2)(b + 2)\,, \ \ldots$$
$$b_{2k} = b_{3k} = \ldots = 0\,,$$

$$2) \quad y = 1 + \frac{a\,b}{c}x + \frac{a(a+1)\,b(b+1)}{2!\,c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)\,b(b+1)(b+2)}{3!\,c(c+1)(c+2)}x^3 + \ldots$$

Ersetzt man für die hypergeometrische Reihe das Zeichen $F(a, b, c, x)$, so hat man also in der Umgebung von $x = 0$ die beiden Integrale

$$y_1 = x^{1-c} \cdot F(a - c + 1\,, \ b - c + 1\,, \ 2 - c\,, \ x)\,,$$
$$y_2 = F(a, b, c, x)\,.$$

In der Umgebung der andern Sonderstelle 1 hat man

$$y_3 = (1 - x)^{c-a-b} \cdot F(c - a\,, \ c - b\,, \ c - a - b + 1\,, \ 1 - x)\,,$$
$$y_4 = F(a, \ b, \ a + b - c + 1\,, \ 1 - x)\,.$$

30. Wir untersuchen nun die Gültigkeit der erhaltenen Potenzreihen.

Zunächst läßt sich leicht zeigen, daß, wenn $x = 0$ keine Stelle der Bestimmtheit ist, die Reihe im allgemeinen keine Gültigkeit hat.

Wenn $x = 0$ Stelle der Unbestimmtheit ist, so muß $a_{00} = 0$ sein; folglich ist für jedes k

$$b_{0k} = a_{30} + a_{20}(\alpha + k) + a_{10}(\alpha + k)(\alpha + k - 1)\,,$$

in Bezug auf k höchstens vom zweiten Grade. Die andern b_{ik} können nicht alle zweiten Grades sein, da sonst alle a_{0i}, und damit die Funktion P_0 verschwinden würden. Mit unendlich wachsendem k wird also im Koeffizientenvereine, wenn man die k-te Gleichung durch b_{0k} teilt, c_k durch die c_{k-1}, c_{k-2}, ... mit Koeffizienten linear berechnet, die ins Unendliche wachsen. Daher wachsen die $|c_k|$ mit k selbst ins Unendliche; folglich hat die Reihe im allgemeinen keine Gültigkeit. Der Fall, daß $x = 0$ keine Stelle der Bestimmtheit ist, bedarf also einer besondern Untersuchung.

31. Ist $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit, so kann man der Gleichung die Form geben

$$1)\qquad x^3 y''' + x^2 P_1 y'' + x P_2 y' + P_3 y = 0 \quad ,$$

wobei P_1, P_2, P_3 gewöhnliche Potenzreihen sind, die keine Potenzen von x mit negativen Exponenten enthalten.

Man kann die Untersuchung auf ein Integral y beschränken, dessen Anfangsexponent 0 ist. Ist nämlich ein andrer Anfangsexponent x^a vorhanden, so setzt man

$$y = x^a u \quad ,$$

und hat dann

$$y' = a x^{a-1} u + x^a u' \quad ,$$
$$y'' = a(a-1) x^{a-2} u + 2 a x^{a-1} u' + x^a u'' \quad ,$$
$$y''' = a(a-1)(a-2) x^{a-3} u + 3 a(a-1) x^{a-2} u' + 3 a x^{a-1} u'' + x^a u''' \quad ,$$

woraus sich für u die Gleichung ergibt

$$2)\qquad \begin{cases} x^3 u''' + x^2 (3a + P_1) u'' + x[3a(a-1) + 2a P_1 + P_2] u' \\ + [a(a-1)(a-2) + a(a-1) P_1 + a P_2 + P_3] u = 0 \quad , \end{cases}$$

also eine Gleichung wie 1), der nach der Voraussetzung ein partikuläres Integral u genügt, das mit x^0 anfängt, und das bei $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit hat. In 2) hat der Faktor von u kein von x freies Glied; man kann daher in allen Gliedern den gemeinsamen Faktor x unterdrücken, und hat somit eine Gleichung von der Form zu untersuchen

$$3)\qquad x^2 y''' + x \mathfrak{P}_1 y'' + \mathfrak{P}_2 y + \mathfrak{P}_3 = 0 \quad .$$

Wir setzen

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{a}_{10} + \mathfrak{a}_{11} x + \mathfrak{a}_{12} x^2 + \dots$$
$$\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{a}_{20} + \mathfrak{a}_{21} x + \mathfrak{a}_{22} x^2 + \dots$$
$$\mathfrak{P}_3 = \mathfrak{a}_{30} + \mathfrak{a}_{31} x + \mathfrak{a}_{32} x^2 + \dots$$

und sondern in 3) die Absolutglieder ab, indem wir 3) ersetzen durch

$$4)\qquad \begin{cases} x^2 y''' + \mathfrak{a}_{10} x y'' + \mathfrak{a}_{20} y' = -x^2 (\mathfrak{a}_{11} + \mathfrak{a}_{12} x + \dots) y'' \\ - x(\mathfrak{a}_{21} + \mathfrak{a}_{22} x + \dots) y' - (\mathfrak{a}_{31} + \mathfrak{a}_{32} x + \dots) y \quad . \end{cases}$$

Diese Differentialgleichung vergleichen wir mit einer andern von derselben Form, die wir so wählen, daß die Bestimmung die drei Wurzeln Null hat, also sicher eine Reihe mit dem Anfangsexponenten Null besteht, für die ferner die Gültigkeit der Integralreihe innerhalb eines bestimmten Kreises um den Nullpunkt sich leicht nachweisen läßt, und deren Vergleich mit 4) einen Rückschluß auf die Gültigkeit des Integrals von 4) zuläßt. Die erste Bedingung wird erfüllt, wenn wir für die neue Gleichung, mit γ eine noch verfügbare Zahl bezeichnend,

$$\mathfrak{a}_{00} = \gamma \,, \quad \mathfrak{a}_{10} = 3\gamma \,, \quad \mathfrak{a}_{20} = \gamma$$

wählen. Bleiben ferner die absoluten Werte der Potenzreihen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ innerhalb eines Kreises um den Nullpunkt, der bis zur nächsten Sonderstelle reicht, kleiner als die absoluten Zahlen M_1, M_2, M_3 und ist r der Halbmesser des Geltungskreises, so nehmen wir auf der rechten Seite anstatt der eingeklammerten Reihen die Funktionen

$$\frac{M_1}{1 - \frac{x}{r}} \,, \quad \frac{M_2}{1 - \frac{x}{r}} \,, \quad \frac{M_3}{1 - \frac{x}{r}} \,,$$

so daß die Hilfsgleichung lautet

$$5)\qquad \gamma x^2 u''' + 3\gamma x u'' + \gamma u' = x^2 \cdot \frac{M_1}{1 - \frac{x}{r}} u'' + x \cdot \frac{M_2}{1 - \frac{x}{r}} u' + \frac{M_3}{1 - \frac{x}{r}} u \quad .$$

Das Integral wird am einfachsten gefunden, wenn man vorher beide Seiten von 5) mit

$$1 - \frac{x}{r}$$

multipliziert. Man erhält dann die Normalform

$$6)\quad \begin{cases} \gamma x^3\left(1 - \frac{x}{r}\right)u''' + x^2\left(3\gamma - \left[\frac{3\gamma}{r} + M_1\right]x\right)u'' \\ \quad + x\left(\gamma - \left[\frac{\gamma}{r} + M_2\right]x\right)u' - x M_3 u = 0 \quad . \end{cases}$$

Hierin hat man

$$7)\quad \begin{cases} a_{00} = \gamma\,, & a_{01} = -\frac{\gamma}{r}\,, & a_{02} = \ldots = 0 \quad , \\ a_{10} = 3\gamma\,, & a_{11} = -\frac{3\gamma}{r} - M_1\,, & a_{12} = \ldots = 0 \quad , \\ a_{20} = \gamma\,, & a_{21} = -\frac{\gamma}{r} - M_2\,, & a_{22} = \ldots = 0 \quad , \\ a_{30} = 0\,, & a_{31} = -M_3\,, & a_{32} = \ldots = 0 \quad . \end{cases}$$

Hieraus folgt weiter

$$b_{0k} = \gamma\,[k + 3k(k-1) + k(k-1)(k-2)] = \gamma k^3 \quad ,$$

$$b_{1k} = -M_3 - \left(\frac{\gamma}{r} + M_2\right)k - \left(\frac{3\gamma}{r} + M_1\right)k(k-1) - \frac{\gamma}{r}k(k-1)(k-2)$$

$$= -[M_3 + M_2 k + M_1 k(k-1)] - \frac{\gamma k^3}{r} \quad ,$$

alle andern b_{ik} sind Null. Im Koeffizientenvereine beschränkt sich daher jede Gleichung auf ihre beiden Anfangsglieder, und man erhält, wenn man

$$M_3 + M_2 k + M_1 k(k-1) = b_k$$

setzt, und die Koeffizienten mit c_k bezeichnet,

$$\gamma k^3 \cdot c_k = \left[\frac{\gamma}{r}(k-1)^3 + b_{k-1}\right] c_{k-1} \quad .$$

Da b_{k-1} vom zweiten Grade ist, so ist

$$\lim_{k=\infty} \frac{c_k}{c_{k-1}} = \frac{1}{r} \quad .$$

Der Grenzwert des Verhältnisses zweier aufeinander folgender Glieder des Integrals u ist daher $|x| : r$, also nach der Voraussetzung ein echter Bruch. Damit ist die Gültigkeit der Potenzreihe u für den um $x = 0$ mit r beschriebenen Kreis bewiesen.

32. Da die absoluten Werte der Reihen Nr. 31, 3) der Reihe nach kleiner als M_1, M_2, M_3 sind, so folgt nach dem Satze Nr. 19, daß der absolute Koeffizient des Gliedes x^n nicht größer als $M_i r^{-n}$ ist: dies ist aber der Koeffizient von x^n in der Reihe

$$\frac{M_i}{1 - \frac{x}{r}} \quad .$$

Bezeichnet man die Koeffizienten in den Koeffizientenvereinen von 4) und 5) mit b_{ik} und b'_{ik}, so hat man daher

$$b_{ik} < b'_{ik}\,, \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Wäre es nun möglich, $\hat{c}_0$ so zu wählen, daß für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots k$ die Ungleichheit gilt

$$1) \qquad |c_n| < \hat{c}_n \quad ,$$

so würde folgen

$$2) \qquad |b_{0,\,k+1}\, c_{k+1}| < b'_{0,\,k+1}\, \hat{c}_{k+1}\,, \quad \text{d. i.} < \gamma\,(k+1)^3\, \hat{c}_{k+1} \quad .$$

Könnte man nun γ so wählen, daß

$$3) \qquad |b_{0,\,k+1}| > \gamma\,(k+1)^3 \quad ,$$

so würde aus 3) und 2) folgen

$$|c_{k+1}| \leqq \hat{c}_{k+1} \quad ,$$

und damit wäre die Gültigkeit der Reihe für das Integral y innerhalb des Kreises mit dem Halbmesser r erwiesen.

In 3) steht links eine kubische Funktion von $k+1$, die mit dem Gliede $(k+1)^3$ anfängt, also die Form hat

$$(k+1)^3 + a\,(k+1)^2 + b\,(k+1) + c \quad .$$

Daher folgt aus 3)

$$4) \qquad 1 + \frac{a}{k+1} + \ldots > \gamma \quad .$$

Man kann nun bekanntlich k immer so groß annehmen, daß die linke Seite positiv ist, und für jedes größere k auch positiv bleibt. Tritt dies bei $k = h$ ein, so gibt es immer einen echten Bruch γ derart, daß die Gleichung 4) für jedes k erfüllt ist, das gleich h oder größer ist.

Man erkennt nun leicht, daß man $\hat{c}_0$ immer so wählen kann, daß für $k < h$

$$|c_k| < \hat{c}_k \quad .$$

Denn man hat

$$c_k = C_k\, c_0\,, \qquad \hat{c}_k = D_k\, \hat{c}_0 \quad ,$$

wobei die C_k und D_k bestimmte endliche Werte haben, und c_0 ganz beliebig, $\hat{c}_0$ beliebig positiv ist. Man kann $c_0 = 1$ nehmen, ohne der Allgemeinheit der Untersuchung zu schaden, und hat dann

$$\frac{|c_k|}{\hat{c}_k} = \frac{|C_k|}{D_k} \cdot \frac{1}{d_0} \quad .$$

Unter den Zahlen

$$1) \qquad \frac{|C_1|}{D_1}\,, \quad \frac{|C_2|}{D_2}\,, \quad \frac{|C_3|}{D_3}\,, \quad \ldots \quad \frac{|C_k|}{D_k}$$

suche man die größte aus, und nehme d_0 größer; dann ist

$$|c_k| < \hat{c}_k \quad ,$$

für $k = 0, 1, 2, \ldots h$.

Hiermit ist bewiesen, daß an jeder Stelle der Bestimmtheit die Reihenentwicklung für das Integral innerhalb eines Kreises gilt, der um den Nullpunkt beschrieben ist, und die nächste Sonderstelle enthält.

— — —

33. In § 3, Nr. 7 haben wir bereits nachgewiesen, daß aus n partikulären, linear unabhängigen Integralen das allgemeine, d. i. also jedes Integral als homogene lineare Funktion jener partikulären gewonnen werden kann.

Unabhängig von den dort zugrunde gelegten Betrachtungen gelangt man auf folgendem, für unsere allgemeinen Untersuchungen brauchbaren Wege zu demselben Satze.

Wenn die linear unabhängigen Integrale $y_1, y_2, \ldots y_n$ der Gleichung genügen

$$1)\qquad p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0 \quad ,$$

so hat man die identischen Gleichungen

$$2)\qquad \begin{cases} p_0 y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + p_n y_1 = 0 \quad , \\ p_0 y_2^{(n)} + p_1 y_2^{(n-1)} + \ldots + p_n y_2 = 0 \quad , \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_0 y_n^{(n)} + p_1 y_n^{(n-1)} + \ldots + p_n y_n = 0 \quad . \end{cases}$$

Aus 1) und 2) folgt das Verschwinden der Determinante

$$3)\qquad \begin{vmatrix} y^{(n)}, & y^{(n-1)}, & y^{(n-2)}, & \ldots & y', & y \\ y_1^{(n)}, & y_1^{(n-1)}, & y_1^{(n-2)}, & \ldots & y_1', & y_1 \\ y_2^{(n)}, & y_2^{(n-1)}, & y_2^{(n-2)}, & \ldots & y_2', & y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n^{(n)}, & y_n^{(n-1)}, & y_n^{(n-2)}, & \ldots & y_n', & y_n \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Entwickelt man sie als homogene lineare Funktion der Glieder der ersten Zeile, so erhält man Koeffizienten, die gegebene Funktionen von x sind; man hat damit die Differentialgleichung gefunden, die n willkürlich gewählte Integrale $y_1, y_2, \ldots y_n$ hat. Genügen sie der Gleichung 1), so muß 3) mit 1) identisch sein, d. h. es muß sein

$$p_0 : p_1 : p_2 : \ldots : p_n = D_{00} : D_{01} : D_{02} : \ldots : D_{0n} \quad ,$$

wenn D_{0k} den Koeffizienten von $y^{(n-k)}$ in der Determinante 3) bezeichnet.

34. Es läßt sich nachweisen, daß die Gleichung Nr. 33, 3) das Bestehen eines linearen Zusammenhangs unter $y, y_1, y_2, \ldots y_n$ bedingt. Wir begnügen uns, den Beweis für $n = 3$ zu führen. Das Verschwinden der Determinante

$$1)\qquad \begin{vmatrix} y_0''', & y_0'', & y_0', & y_0 \\ y_1''', & y_1'', & y_1', & y_1 \\ y_2''', & y_2'', & y_2', & y_2 \\ y_3''', & y_3'', & y_3', & y_3 \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

worin y_1, y_2, y_3 als linear unabhängig vorausgesetzt werden, bedingt den Verein

$$2)\qquad \begin{cases} c_0 y_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = 0 \quad , \\ c_0 y_0' + c_1 y_1' + c_2 y_2' + c_3 y_3' = 0 \quad , \\ c_0 y_0'' + c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_3 y_3'' = 0 \quad , \\ c_0 y_0''' + c_1 y_1''' + c_2 y_2''' + c_3 y_3''' = 0 \quad , \end{cases}$$

wobei die c_0, c_1, c_2, c_3 nicht sämtlich Null sind. Um nachzuweisen, daß sie x nicht enthalten können, nehmen wir z. B. an, c_0 sei von Null verschieden; dann können wir 2) ersetzen durch

$$3)\qquad \begin{cases} y_0 + d_1 y_1 + d_2 y_2 + d_3 y_3 = 0 \quad , \\ y_0' + d_1 y_1' + d_2 y_2' + d_3 y_3' = 0 \quad , \\ y_0'' + d_1 y_1'' + d_2 y_2'' + d_3 y_3'' = 0 \quad , \\ y_0''' + d_1 y_1''' + d_2 y_2''' + d_3 y_3''' = 0 \quad . \end{cases}$$

Werden diese Gleichungen differenziert, so erhält man in Rücksicht auf die jedesmal folgende

$$4)\quad \begin{cases} d'_1 y_1 + d'_2 y_2 + d'_3 y_3 = 0 \quad , \\ d'_1 y'_1 + d'_2 y'_2 + d'_3 y'_3 = 0 \quad , \\ d'_1 y''_1 + d'_2 y''_2 + d'_3 y''_3 = 0 \quad . \end{cases}$$

Wären $d'_1 = d'_2 = d'_3 = 0$, so würden d_1, d_2, d_3 von x unabhängig sein, und damit würde die erste Gleichung des Vereins 3) den behaupteten linearen Zusammenhang ergeben. Nehmen wir z. B. $d'_1 \gtrless 0$ an, so kann man 4) ersetzen durch

$$5)\quad \begin{cases} y_1 + e_2 y_2 + e_3 y_3 = 0 \quad , \\ y'_1 + e_2 y'_2 + e_3 y'_3 = 0 \quad , \\ y''_1 + e_2 y''_2 + e_3 y''_3 = 0 \quad . \end{cases}$$

Durch Differenzieren erhält man hieraus, wie oben,

$$6)\quad \begin{cases} e'_2 y_2 + e'_3 y_3 = 0 \quad , \\ e'_2 y'_2 + e'_3 y'_3 = 0 \quad . \end{cases}$$

Wären e'_2 und e'_3 Null, so würden e_2 und e_3 von x unabhängig sein, und die erste Gleichung des Vereins 5) würde eine lineare Abhängigkeit der Funktionen y_1, y_2, y_3 ergeben, entgegen der Voraussetzung. Ist $e'_2 \gtrless 0$, so ersetzt man 6) durch

$$7)\quad \begin{cases} y_2 + f_3 y_3 = 0 \quad , \\ y'_2 + f_3 y'_3 = 0 \quad . \end{cases}$$

Durch Differenzieren ergibt sich

$$8)\qquad f'_3 y_3 = 0 \quad .$$

Hieraus folgt, daß $f'_3 = 0$, also f_3 von x nicht abhängt.

Die erste Gleichung des Vereins 6) ist

$$e'_2(y_2 + f_3 y_3) = 0 \quad .$$

Da nach der Voraussetzung die Klammer nicht verschwinden kann, so folgt, daß $e'_2 = 0$, also e_2 und damit auch e_3 von x nicht abhängen. Nun ersetzt man die erste Gleichung des Vereins 4) durch

$$d'_1(y_1 + e_2 y_2 + e_3 y_3) = 0 \quad .$$

Da nach der Voraussetzung die Klammer auch hier nicht verschwindet, so folgt, daß $d'_1 = 0$, also d_1, d_2 und d_3 von x unabhängig sind. Führt man dies in die erste Gleichung des Vereins 3), so ist die Behauptung bewiesen.

35. Aus drei linear unabhängigen Integralen kann man also durch lineare Zusammensetzung jedes Integral einer homogenen linearen Differentialgleichung dritter Ordnung herstellen. Man bezeichnet daher drei linear unabhängige Integrale als einen Grundverein, und zur vollständigen Integration kommt es nun darauf an, einen Grundverein herzustellen.

Hat man drei partikuläre Integrale gefunden, so handelt es sich darum, zu erkennen, ob sie linear unabhängig sind. In diesem Falle bilden sie einen Grundverein, und die Integrationsaufgabe ist damit innerhalb des Gültigkeitsbereiches der Integrale gelöst.

Ohne weiteres erkennt man die Richtigkeit der Sätze: Wenn in demselben Gültigkeitsgebiete Integrale in Form von Potenzreihen gefunden worden sind, und kein Exponent einer Reihe sich in einer der andern wieder vorfindet, so sind die Integrale linear unabhängig.

Wenn Potenzreihen, deren Exponenten sich um ganze Zahlen unterscheiden, nach der Größe der realen Teile der Exponenten geordnet sind, und mit verschiedenen Exponenten anfangen, so sind sie linear unabhängig.

36. Fuchs*), der Schöpfer der Theorie der homogenen linearen Differentialgleichungen, hat angegeben, wie man durch Integration einer Reihe von homogenen linearen Differentialgleichungen von den Ordnungen $n-1$, $n-2$, ... aus einem Integrale einer Gleichung n-ter Ordnung einen Grundverein ableiten kann. Wir beschränken uns hierbei wieder auf Gleichungen dritter Ordnung (vgl. § 3, Nr. 11 u. ff).

Ist η ein Integral der Gleichung

$$1) \qquad p_0 y''' + p_1 y'' + p_2 y' + p_3 y = 0 \quad ,$$

und setzt man

$$y = \eta \int z\,dx \quad ,$$

so erhält man für z die Bedingung

$$2) \qquad p_0 \eta \cdot z'' + (3p_0 + p_1 \eta) \cdot z' + (3p_0 \eta'' + 2p_1 \eta' + p_2 \eta) z = 0 \quad .$$

Kennt man ein Integral ζ dieser Gleichung, dessen Gültigkeitsbereich ganz oder teilweise mit dem von η zusammenfällt, so setze man in 2)

$$z = \zeta \int t\,dx \quad .$$

Man erhält für t die Differentialgleichung

$$3) \qquad p_0 \eta \zeta t' + ([3p_0 + p_1 \eta] \zeta + 2p_0 \eta \zeta') t = 0$$

und hieraus

$$4) \qquad t = Ce^{-\int u\,dx} \quad ,$$

wobei

$$u = \frac{(3p_0 + p_1 \eta) \zeta + 2p_0 \zeta'}{p_0 \eta \zeta} \quad .$$

Man hat daher für 1) die Integrale

$$5) \qquad y_1 = \eta \,, \quad y_2 = \eta \int \zeta\,dx \,, \quad y_3 = \eta \int \zeta\,dx \int t\,dx \quad .$$

Diese Integrale bilden einen Grundverein; denn aus der Annahme

$$c_1 \eta + c_2 \eta \int \zeta\,dx + c_3 \eta \int \zeta\,dx \int t\,dx \equiv 0$$

folgt

$$c_1 + c_2 \int \zeta\,dx + c_3 \int \zeta\,dx \int t\,dx \equiv 0 \quad .$$

Differenziert man nach x, so ergibt sich

$$c_2 \zeta + c_3 \zeta \int t\,dx \equiv 0 \quad ,$$

und hieraus weiter

$$c_2 + c_3 \int t\,dx \equiv 0 \quad .$$

Differenziert man auch hier nach x, so erhält man

$$c_3 t \equiv 0 \quad .$$

Hieraus folgt $c_3 = 0$, und dann aus den vorhergehenden Gleichungen weiter

$$c_2 = c_1 = 0 \quad .$$

37. Beispiel. A) Der Gleichung

$$x^2(x+1)^3 y''' - 3x(x+1)(2x^2+3x+1)y''$$
$$+ 3(x+1)(5x^2+4x+1)y' - 3(5x^2+4x+1)y = 0$$

wird durch

$$y = x + 1$$

genügt. Setzt man

$$y = (x+1)\int z\,dx \quad ,$$

so erhält man für z die Gleichung

$$x^2 z'' - 3xz' + 3z = 0 \quad .$$

*) Fuchs, Programm der städtischen Gewerbeschule zu Berlin 1865; Crelles Journal Bd. 66 und 68 (1866 und 1868).

Man genügt ihr durch $z = x$; setzt man weiter $z = x\int t\,dx$, so erhält man

$$x t' - t = 0 \quad ,$$

die durch $t = x$ erfüllt wird. Die gegebene Gleichung hat also den Grundverein

$$y_1 = x + 1\,, \quad y_2 = (x+1)\int x\,dx = \tfrac{1}{2}(x^3 + x^2) \quad ,$$
$$y_3 = \tfrac{1}{2}(x^3 + x^2)\int x\,dx = \tfrac{1}{4}(x^5 + x^4) \quad .$$

Da man die Nenner bei y_2 und y_3 weglassen kann, so kann als Grundverein gelten

$$x + 1\,, \quad x^3 + x^2\,, \quad x^5 + x^4 \quad .$$

Um dieselbe Aufgabe nach der allgemeinen Methode zu behandeln, stellt man die Normalform her

$$x^3(x+1)^3 y''' - 3x^2(x+1)(2x^2 + 3x + 1)y''$$
$$+ 3x(x+1)(5x^2 + 4x + 1)y' + 3(5x^3 + 4x^2 + x)y = 0 \quad .$$

Die zugehörige Bestimmung für die Umgebung des Punktes 0 ist

$$a^3 - 6a^2 + 8a = 0 \quad ;$$

sie hat die Wurzeln 0, 2, 4, übereinstimmend mit den niedrigsten Exponenten von x in y_1, y_2, y_3.

B) Die Gleichung

$$y'' + y = 0$$

hat das Integral

$$y = \sin x \quad .$$

Setzt man

$$y = \sin x \int z\,dx \quad ,$$

so erhält man für z die Gleichung

$$\sin x \cdot z' + 2\cos x \cdot z = 0 \quad ,$$

und erhält aus ihr

$$lz = -2\int \cot x\,dx = -2\,l\sin x \quad ,$$

also

$$z = \frac{1}{\sin^2 x}$$

und daher als zweites Integral der vorgelegten Gleichung

$$y = \sin x \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\sin x \cdot \cot x = -\cos x \quad .$$

Hier kann man das negative Zeichen weglassen, und hat daher als Grundverein

$$y_1 = \sin x\,, \quad y_2 = \cos x \quad .$$

Die Normalform der Differentialgleichung ist

$$x^2 y'' + x^2 y = 0 \quad ,$$

deren Bestimmung ist

$$a(a-1) = 0 \quad .$$

Die Gleichung für λ ist (§ 3, Nr. 8)

$$\lambda^2 + 1 = 0\,, \quad \lambda = \pm i \quad ;$$

daher erhält man auch den Grundverein

$$y_1 = e^{ix} \quad \text{und} \quad y_2 = e^{-ix} \quad ;$$

aus ihnen bildet man auf linearem Wege den ersten Grundverein

$$\frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = \sin x\,, \quad \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2) = \cos x \quad .$$

C) Bei der Gleichung

$$y''' - 5y' + 8y - 4 = 0$$

verschwindet die Summe der Koeffizienten, daher hat sie das Integral

$$y = e^x \quad .$$

Setzt man weiter

$$y = e^x \int z\,dx \quad ,$$

so erhält man für z die Gleichung

$$z'' - 2z + 1 = 0 \quad ,$$

die auch das Integral

$$z = e^x$$

hat. Ersetzt man z durch $e^x \int t\,dx$, so erhält man

$$t' = 0 \quad ,$$

als deren Integral $t = 1$ genommen werden kann. Für y erhält man daher den Grundverein

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^x \int e^x\,dx = e^{2x} \quad ,$$

$$y_3 = e^x \int e^x dx \int dx = e^x \int x\,e^x\,dx = x\,e^{2x} - e^x \quad .$$

Anstatt des letzten Integrals kann man auch

$$y_3 + y_1 = x\,e^{2x}$$

als Glied des Grundvereins verwenden.

38. Für jede reguläre Stelle x_k haben wir einen Grundverein von Integralen gefunden, dessen drei (bezw. zwei) Glieder gewöhnliche, innerhalb eines bestimmten Kreises gültige, nach Potenzen von $(x - x_k)$ fortschreitende Potenzreihen sind, aus denen wir das allgemeine Integral η für diese Umgebung von x_k auf lineare Weise zusammensetzen können.

Anstatt durch diese Zusammensetzung

$$\eta = m_1\,\eta_1 + m_2\,\eta_2 + m_3\,\eta_3$$

können wir das allgemeine Integral auch dadurch bezeichnen, daß wir der Funktion η und ihren beiden ersten Ableitungen η' und η'' für den Punkt x_k, den Mittelpunkt des Gültigkeitsbereichs von η, willkürlich gewählte Werte (Anfangswerte) beilegen.

Denn ist

$$\eta_i = c_{0i} + c_{1i}(x - x_k) + c_{2i}(x - x_k)^2 + \ldots \quad ,$$

so sind

$$\eta_i' = c_{1i} + 2\,c_{2i}(x - x_k) + \ldots$$

$$\eta_i'' = 2\,c_{2i} + \ldots \quad .$$

Sind nun $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{y}''$ die vorgeschriebenen Anfangswerte von η, so hat man den Verein

$$c_{01}\,m_1 + c_{02}\,m_2 + c_{03}\,m_3 = \mathfrak{y} \quad ,$$

$$c_{11}\,m_1 + c_{12}\,m_2 + c_{13}\,m_3 = \mathfrak{y}' \quad ,$$

$$c_{21}\,m_1 + c_{22}\,m_2 + c_{23}\,m_3 = \mathfrak{y}'' \quad ,$$

zur Bestimmung der Zahlen m_1, m_2, m_3 aus den Anfangswerten $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{y}''$.

39. Vom Nullpunkte ziehe man nun nach irgend einem andern regulären Punkte $x_\varkappa$ eine sich selbst nicht schneidende Linie l, die überall von jeder Sonderstelle einen endlichen Abstand hat. Ferner beschreibe man um den Nullpunkt durch die nächste Sonderstelle den Gültigkeitskreis K_0 für das dem Nullpunkte zugehörige Integral

$$y = \mathfrak{P}(x) \quad .$$

Wir bewegen uns nun von 0 aus entlang l bis zu einer Stelle x_1, die noch im Innern von K_0 liegt; die dem Punkte x_1 nächste Sonderstelle S_1 liegt entweder außerhalb K_0, oder auf K_0. In jedem Falle kann x_1 so gewählt werden, daß der um x_1 durch S_1 beschriebene Gültigkeitskreis K_1 mit einem nicht verschwindend kleinen Teile seiner Fläche außerhalb K_0 liegt; ein Schnittpunkt c von K_1 und l liegt alsdann sicher zwischen x_1 und x_n und von einem außerhalb K_0 gelegenen Punkte x_2 des Bogens xc kann man alsdann durch die dem Punkte x_2 zunächst liegende Sonderstelle wieder einen Kreis K_2 beschreiben. Durch eine endliche Anzahl von Wiederholungen dieser Konstruktion muß man zu einem Kreise K_n kommen, der den Punkt x_n einschließt.

Ersetzt man nun in $\mathfrak{P}(x)$ die Veränderliche durch $(x - x_1) + x_1$ und entwickelt nach steigenden Potenzen von $x - x_1$, so erhält man eine Reihe, die gültig ist für alle Punkte, die den Kreisen K_0 und K_1 gemeinsam sind. Innerhalb des um x_1 beschriebenen Kreises K'_1, der ganz im Innern von K_0 liegt, ist also diese Reihe gültig, stellt daher das allgemeine Integral für die reguläre Stelle x_1 dar. Folglich erstreckt sich die Gültigkeit dieser Reihe über K'_1 hinaus, nämlich über den ganzen Gültigkeitskreis K_1. So weiter schließend erhält man nach und nach für jeden der Punkte x_μ der Folge $x_2, x_3, \ldots x_m$ eine neue Potenzreihe $\mathfrak{P}(x - x_\mu)$, gültig im Innern des Kreises K_μ, schließlich also eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x - x_m)$, gültig im Innern von K_m.

Dieses Verfahren heißt die analytische Fortsetzung des Integrals*). Die Gesamtheit der unendlich vielen Potenzreihen, die man durch analytische Fortsetzung des Integrals y erhält, nennt man nach WEIERSTRASS das monogene Gebilde der Funktion y, die einzelnen Reihen heißen die Elemente der Funktion, in unserem Falle, wo es sich überall um reguläre Punkte x_n handelt, die regulären Elemente.

40. Es gilt nun zunächst, zu untersuchen, welchen Einfluß der Weg l auf das erreichte Integral hat; ob man, bezw. unter welchen Voraussetzungen man auf zwei verschiedenen Wegen von einem Elemente aus zu Integralen des Punktes x_n mit denselben Anfangswerten kommt, und wie sich die Integrale unterscheiden, die man auf zwei zwischen 0 und x_n verlaufenden Wegen erreicht, die den gefundenen Voraussetzungen nicht entsprechen.

Aus der Lehre der Integrale einer komplexen Veränderlichen ist von vornherein gewiß, daß bei diesen Untersuchungen die Sonderstellen zu beachten sind; es wird sich darum handeln, ob die Fläche F, die zwischen sich selbst und einander nicht schneidenden zwischen 0 und x_m gezeichneten Wegen enthalten ist, Sonderstellen enthält oder nicht.

Wir wählen zunächst eine Punktfolge $x'_1, x'_2, \ldots x'_{n-1}$ so, daß x_i und x'_i innerhalb des Kreises K_i und K_{i+1} liegen und voneinander keinen verschwindend kleinen Abstand haben. Die Punkte $0, x'_1, x'_2, x'_3, \ldots x'_{m-1}, x_n$ verbinden wir durch eine Linie, die keine Sonderstelle enthält, und mit l zusammen eine geschlossene Linie (Schleife) bildet, innerhalb deren keine Sonderstelle liegt.

Da 0, x_1 und x'_1 innerhalb K_0 liegen, so kommt man zu demselben Integrale, gleichgültig, ob man von 0 ohne weiteres (entlang l) zu x_1 übergeht, oder den Umweg über x'_1 macht (auf l' nach x'_1 und dann geradlinig von x'_1 nach x_1 geht). Da ferner $x_i, x_{i+1}, x'_i, x_{i+1}$ innerhalb K_i und K_{i+1} liegen, so ist es für das Ergebnis gleichgültig, ob man von x_i ohne weiteres auf x_{i+1} übergeht, oder ob man erst nach x'_i, dann nach x'_{i+1} und hierauf nach x_{i+1} übergeht. Geht man nun von 0 bis x_n auf dem Wege

$$1)\qquad 0\, x'_1\, x_1\, x'_1\, x'_2\, x_2\, x'_2\, x'_3\, x_3 \ldots x'_{n1}\, x_n \quad ,$$

so kommt man zu demselben Ergebnisse, wie durch die Änderungen

$$2)\qquad 0\, x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_n \quad ;$$

*) CAUCHY, Comptes rendues, 1840, Bd. I und II.

da sich dabei je zwei Änderungen x_i', x_i und $x_i x_i'$ aufheben, so kann man die Änderungen 1) ersetzen durch die Änderungen

$$3) \qquad 0\, x_1'\, x_2'\, x_3' \ldots x_n \quad .$$

Die Änderungen 2) und 3) führen also zu demselben Ziele.

Hierauf kann man l' durch einen andern Weg l'', l'' durch l''' u. s. w. ersetzen, wobei man nur darauf zu achten hat, daß zwischen zwei aufeinander folgenden Wegen, d. i. also innerhalb des ganzen von den äußersten Wegen begrenzten Teils der x-Ebene, keine Sonderstelle enthalten ist.

Schließt man die endlichen Sonderstellen durch unendlich kleine Kreise, die Sonderstelle ∞ durch einen im Endlichen liegenden beliebig großen Kreis aus, so kann man die übrigbleibende mehrfach zusammenhängende x-Fläche durch geeignete Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandeln (vgl. 2. Buch, § 2, Nr. 7).

Setzt man das allgemeine Integral der Differentialgleichung von einem Punkte x_1 dieser Fläche nach einem andern ihrer Punkte x_2 analytisch fort, so kommt man immer zu einem Integrale für x_2 mit denselben Anfangswerten, gleichgültig, welchen Weg von x_1 nach x_2 man benutzt hat, sofern nur dieser Weg die aus Kreisen und Querschnitten bestehende Begrenzung der Fläche nicht überschreitet.

41. Geht man von den Elementen eines Grundvereins für $x = 0$ zu einem andern Punkte x_n auf einem Wege über, der keinen Querschnitt überschreitet, so erhält man die Elemente eines Grundvereins für x_n. Denn macht man den Übergang, indem man die Punkte x_1, x_2, x_3, ... x_{m-1} berührt, so hat man es bei jeder einzelnen Änderung mit zwei Punkten x_i x_{i+1} zu tun, von denen x_{i+1} im Gültigkeitsbereiche von x_i liegt. Hat man nun bis x_i einen Grundverein V_i erhalten, so erhält man die Integrale für x_{i+1}, indem man in den Elementen von V_i die Ersetzung macht

$$x - x_i = x - x_{i+1} + (x_{i+1} - x_i) \quad ,$$

wodurch die lineare Unabhängigkeit der Elemente nicht aufgehoben werden kann, da sie durch eine nicht verschwindende Determinante bezeichnet wird, deren Elemente von x nicht abhängen.

42. Um zu erkennen, wie sich die Anfangswerte des allgemeinen Integrals für x_2 voneinander unterscheiden, wenn man von x_1 nach x_2 auf zwei Wegen geht, die einen oder mehrere Sonderstellen einschließen, oder wenn man einen Weg einschlägt, der Sonderstellen umkreist, genügt es, geschlossene Wege zu untersuchen.

Wenn ein geschlossener Weg keine Sonderstelle umkreist, so führt er nach dem obigen Satze zu denselben Anfangswerten zurück. Es ist für die gegenwärtige Erörterung zweckmäßiger, nicht vom allgemeinen Integrale mit bestimmten Anfangswerten, sondern von einem Grundvereine auszugehen; jedes seiner Glieder ist ein besonderer Wert des allgemeinen Integrals, ein allgemeines mit geeignet gewählten Anfangswerten.

Ein geschlossener Weg, der keine Sonderstelle umkreist, führt also von einem Grundvereine auf denselben Grundverein zurück, und zwar so, daß jedes Integral des Grundvereins sich selbst wieder erzeugt.

Ein geschlossener Weg, der eine oder mehrere Sonderstellen einschließt, führt von einem Grundvereine wieder zu einem Grundvereine der Ausgangsstelle, aber im allgemeinen nicht zu demselben. Auf die Erörterung der Frage, ob man bei mehrfacher Durchlaufung desselben geschlossenen Weges zu immer neuen Grundvereinen kommt, oder ob eine gewisse Anzahl Umläufe wieder zum Anfangsvereine zurückführen, können wir hier aus Rücksicht auf die für diese

Darstellung geltenden Grenzen nicht eingehen*), sondern beschränken uns auf zwei Beispiele.

A) Die Gleichung

$$4(x-a)^2 y'' - 4(x-a)y' + 3y = 0$$

hat für die Umgebung von $x = a$ den Grundverein

$$y_1 = \sqrt{x-a}\,, \quad y_2 = \sqrt{(x-a)^3} \quad .$$

Umkreist man die Sonderstelle a einmal, so wechseln die Quadratwurzeln die Zeichen, man kommt daher zu den Integralen

$$\bar{y}_1 = -\sqrt{x-a}\,, \quad \bar{y}_2 = -\sqrt{(x-a)^3} \quad .$$

Legt man noch einen Umlauf um a zurück, so kommt man wieder auf

$$\bar{\bar{y}}_1 = y_1\,, \quad \bar{\bar{y}}_2 = y_2 \quad .$$

B) Die Gleichung

$$4x^2 y'' - 8xy' + 9 = 0$$

hat für die Umgebung des Nullpunktes den Grundverein

$$y_1 = x^{\frac{3}{2}}\,, \quad y_2 = x^{\frac{3}{2}}\, l x \quad .$$

Eine Umkreisung des Mittelpunktes ändert bei $x^{\frac{3}{2}}$ das Vorzeichen und vermehrt lx um $2\pi i$.

Nach einem bezw. zwei Umläufen erhält man also

$$\bar{y}_1 = -y_1\,, \quad \bar{y}_2 = -y_2 - 2\pi i y_1$$

$$\bar{\bar{y}}_1 = y_1\,, \quad \bar{\bar{y}}_2 = y_2 + 4\pi i y_1 \quad .$$

Das Integral y_1 kehrt also durch zwei Umläufe zum Ausgangswerte zurück, y_2 erhält dagegen seinen Ausgangswert nicht wieder.

43. Bei regulären Stellen der Bestimmtheit gehört zu jeder der Wurzeln $a = 0,\ 1,\ 2$ eine innerhalb eines bestimmten um den Nullpunkt beschriebenen Kreises gültige Potenzreihe.

Es fragt sich nun, wie sich Gleichungen verhalten, bei denen $x = 0$ eine Sonderstelle der Bestimmtheit ist, für die nicht jede der drei Wurzeln der Bestimmung einer Reihe zugehört, bezw. bei denen die Bestimmung zwei oder drei gleiche Wurzeln hat.

Hat man für die Gleichung in Normalform

$$1) \qquad x^3 \cdot \mathfrak{P}_0 y''' + x^2 \cdot \mathfrak{P}_1 y'' + x \cdot \mathfrak{P}_2 y' + \mathfrak{P}_3 y = 0$$

ein Integral $y_1 = \eta$ gefunden, so läßt sich ein zweites in der Form bestimmen

$$y_2 = \zeta + \eta\, l x \quad .$$

Durch Differentiation erhält man

$$y_2' = \zeta' + \frac{\eta}{x} + \eta'\, l x \quad ,$$

$$y_2'' = \zeta'' - \frac{\eta}{x^2} + \frac{2\eta'}{x} + \eta''\, l x \quad ,$$

$$y_2''' = \zeta''' + \frac{2\eta}{x^3} - \frac{3\eta'}{x^2} + \frac{3\eta''}{x} + \eta'''\, l x \quad .$$

Hieraus folgt für ζ die Differentialgleichung

$$2) \qquad x^3 \mathfrak{P}_0 \zeta''' + x^2 \mathfrak{P}_1 \zeta'' + x \mathfrak{P}_2 \zeta' + \mathfrak{P}_3 \zeta + P = 0 \quad ,$$

wobei

$$3) \qquad P = (2\eta - 3\eta' x + 3\eta'' x^2)\mathfrak{P}_0 - (\eta - 2\eta' x)\mathfrak{P}_1 + \eta \mathfrak{P}_2 \quad .$$

---

*) HEFFTER, Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen, Leipzig 1894. Man vergleiche auch KÖNIGSBERGER, Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen, Leipzig 1889; SCHLESINGER, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Leipzig 1895 bis 1898.

Die Gleichung 2) ist nicht homogen. In § 3, Nr. 16 ist gezeigt worden, wie man die Integration einer nicht homogenen Gleichung auf eine Anzahl Quadraturen zurückführen kann, wenn man das allgemeine Integral der homogenen Gleichung 1) kennt; diesen Weg können wir hier nicht benutzen, da uns hier kein Grundverein von 1) bekannt ist.

Ist

$$\eta = x^a \sum_0^\infty c_k x^k , \qquad c_0 \gtrless 0 ,$$

so ist auch

$$P = x^a \sum_0^\infty \gamma_x x^k ,$$

enthält also sicher kein Glied mit einem Exponenten, dessen realer Teil kleiner ist als bei a. Im allgemeinen ist γ_0 von Null verschieden; setzt man daher

$$\zeta = x^\beta \sum_0^\infty d_k x^k ,$$

so kann β nur gleich a oder um eine reale Zahl kleiner als a sein; ist β kleiner als a, so ist an Gliedern mit x^β die Größe P nicht beteiligt, zur Ermittlung von β dient also die Bestimmung der Gleichung 1). Die Potenzreihe ζ fängt daher mit a oder mit einer der Wurzeln der Bestimmung an, die um eine ganze Zahl kleiner als a sind.

44. Als Beispiel wählen wir die Gleichung zweiter Ordnung

$$1) \qquad x y'' + y' + y = 0 ,$$

oder in Normalform

$$2) \qquad x^2 y'' + x y' + x y = 0 .$$

Hier ist $a_{00} = 1$, $a_{10} = 1$, $a_{21} = 1$, alle andern a_{ik} sind Null.

Die Bestimmung hat die Doppelwurzel $a = 0$. Ferner findet man

$$b_{0k} = k^2 , \quad b_{1k} = 1 , \quad b_{2k} = b_{3k} = \ldots = 0 .$$

Daher hat man den Koeffizientenverein

$$1^2 \cdot c_1 + c_0 = 0 ,$$
$$2^2 \cdot c_2 + c_1 = 0 ,$$
$$3^2 \cdot c_3 + c_2 = 0 ,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot ,$$

woraus folgt

$$c_k = (-1)^k \cdot \frac{1}{k!^2} c_0 .$$

Man hat daher das Integral

$$\eta = 1 - \frac{1}{1!^2} x + \frac{1}{2!^2} x^2 - \frac{1}{3!^2} x^3 + \ldots$$

gültig für alle Werte von x.

Setzt man in 1)

$$\eta_1 = \zeta + \eta \, l x ,$$

so erhält man, unter ζ eine gewöhnliche Potenzreihe verstehend,

$$3) \qquad x \zeta'' + \zeta' + \zeta + 2 \eta' = 0 ,$$

woraus für die Koeffizienten von ζ folgt

$$\partial_1 + \partial_0 = 2 c_0 \quad ,$$

$$2^2 \partial_2 + \partial_1 = -\frac{2 \cdot 2}{2!^2} c_1 \quad ,$$

$$3^2 \partial_3 + \partial_2 = \frac{2 \cdot 3}{3!^2} c_2 \quad ,$$

$$4^2 \partial_4 + \partial_3 = -\frac{2 \cdot 4}{4!^2} c_3 \quad ,$$

$$\dots\dots\dots$$

Diese Gleichungen ergeben

$$\partial_k = (-1)^k \cdot \frac{1}{k!^2} \left(\partial_0 - 2 \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} \right] c_0 \right) \quad .$$

Daher ist, wenn man $c_0 = 1$ setzt,

$$\zeta = \partial_0 \left(1 - \frac{1}{1!^2} x + \frac{1}{2!^2} x^2 - \frac{1}{3!^2} x^3 + \dots \right)$$

$$- 2 \left(1 - \frac{1}{1!^2} x + \frac{1 + \frac{1}{2}}{2!^2} x^2 - \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{3!^2} x^3 + \dots \right) \quad .$$

Bei der Herstellung des zweiten Integrals η_1 kann ein Vielfaches von η weggelassen werden; man hat daher

$$\eta_1 = \left(1 - \frac{1}{1!^2} x + \frac{1}{2!^2} x^2 - \dots \right) lx - 2 \left(1 - \frac{1}{1!^2} x + \frac{1 + \frac{1}{2}}{2!^2} x^2 - \dots \right) \quad .$$

Die letzte Reihe hat Koeffizienten, die kleiner als die entsprechenden der Exponentialreihe sind, sie gilt daher ebenfalls unbeschränkt.

§ 5. Differentialgleichungen zwischen mehr als zwei Veränderlichen. Bestimmte Vereine.

1. Aus der Gleichung zwischen drei Veränderlichen

$$1) \qquad f(x, y, z) = c \quad ,$$

worin c eine willkürliche Konstante bezeichnet, folgt durch Differentiation

$$2) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0 \quad .$$

Diese Gleichung hat man sich durch eine der verschwindenden Größen dx, dy, dz dividiert zu denken, so daß an die Stelle verschwindender Faktoren Quotienten treten, die einen bestimmten Grenzwert haben.

Ist umgekehrt eine Gleichung gegeben

$$P dx + Q dy + R dz = 0 \quad ,$$

worin P, Q, R Funktionen von x, y, z bezeichnen, so fragt es sich, ob sie ein Integral von der Form

$$f(x, y, z) = c \quad ,$$

hat, und wie dieses gefunden werden kann.

2. Sollen alle Wertvereine von x, y, z, welche die Differentialgleichung erfüllen

$$1) \qquad P dx + Q dy + R dz = 0 \quad ,$$

der Gleichung genügen

$$2) \qquad f(x, y, z) = c \quad ,$$

so muß 1) mit der durch Differentiation aus 2) genommenen

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$$

übereinstimmen; es muß daher einen Faktor v geben, für welchen

$$3) \qquad vP = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad vQ = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad vR = \frac{\partial f}{\partial z} \quad .$$

Berechnet man $\partial^2 f : \partial x \partial y$ aus der ersten und zweiten Gleichung, $\partial^2 f : \partial y \partial z$ aus der zweiten und dritten, $\partial^2 f : \partial z \partial x$ aus der dritten und ersten und setzt die erhaltenen Werte einander gleich, so ergeben sich die Bedingungsgleichungen

$$v\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + P\frac{\partial v}{\partial y} - Q\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad ,$$

$$v\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\frac{\partial v}{\partial z} - R\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad ,$$

$$v\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\frac{\partial v}{\partial x} - P\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad .$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit R, die zweite mit P, die dritte mit Q und addiert, so erhält man nach geeigneter Umstellung folgende, v nicht enthaltende Bedingung

$$4) \qquad P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0 \quad .$$

Soll also die Gleichung $P dx + Q dy + R dz = 0$ durch eine einzige Gleichung $f(x, y, z) = c$ integrierbar sein, so müssen die Funktionen P, Q, R die Gleichung 4) identisch erfüllen.

3. Diese Bedingung ist nicht nur notwendig, sondern auch ausreichend. Wir weisen dies nach, indem wir zugleich zeigen, wie das Integral der vorgelegten Differentialgleichung gefunden werden kann.

Die Werte von x und y, die der Gleichung Nr. 2, 1) bei konstantem z genügen, erfüllen die Differentialgleichung

$$1) \qquad P dx + Q dy = 0 \quad ;$$

aus dem allgemeinen Integrale dieser Gleichung

$$2) \qquad V(x, y, z) = c$$

kann man das Integral der gegebenen Gleichung erhalten, indem man in 2) die Konstante c durch eine passend gewählte Funktion von z ersetzt. Nehmen wir an,

$$V = \varphi(z)$$

sei das Integral der Gleichung

$$3) \qquad P dx + Q dy + R dz = 0 \quad .$$

Durch Differentiation folgt aus

$$4) \qquad V - \varphi(z) = 0$$

die Gleichung

$$5) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \varphi'\right) dz = 0 \quad .$$

Da nun $V = c$ das allgemeine Integral von 1) ist, so gibt es einen Faktor v von der Beschaffenheit, daß

$$6)\qquad vP = \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad vQ = \frac{\partial V}{\partial y} \quad .$$

Multipliziert man 3) mit v und berücksichtigt 6), so folgt

$$7)\qquad \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + vR\,dz = 0 \quad .$$

Der Vergleich von 5) und 7) ergibt

$$8)\qquad \frac{\partial V}{\partial z} - vR = \frac{d\varphi(z)}{dz} \quad .$$

Da hier rechts eine Funktion von z allein steht, so muß dasselbe auch links der Fall sein.

Durch die Gleichung $V = \varphi(z)$ ist z als Funktion von V definiert; die Bedingung, daß

$$\frac{\partial V}{\partial z} - vR$$

eine Funktion von z allein sei, ist daher erfüllt, wenn dieser Ausdruck in Anbetracht der Veränderlichen x und y eine Funktion von V ist. Die ausreichende Bedingung hierzu ist bekanntlich

$$9)\qquad \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial z} - vR\right) - \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial z} - vR\right) = 0 \quad .$$

Von dieser Bedingung läßt sich leicht zeigen, daß sie mit Nr. 2, 4) identisch ist. Durch Ausführung der Differentiationen folgt zunächst aus 9)

$$10)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} - \dfrac{\partial V}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z} - v\left(\dfrac{\partial V}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial R}{\partial x}\right) \\ \qquad - R\left(\dfrac{\partial V}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 \quad . \end{cases}$$

Aus

$$\frac{\partial V}{\partial y} = vQ, \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = vP$$

folgt

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} = v\frac{\partial Q}{\partial z} + Q\frac{\partial v}{\partial z}, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z} = v\frac{\partial P}{\partial z} + P\frac{\partial v}{\partial z} \quad ;$$

daher ist

$$\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z} = v^2\left(P\frac{\partial Q}{\partial z} - Q\frac{\partial P}{\partial z}\right) \quad ,$$

$$v\left(\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial R}{\partial x}\right) = v^2\left(P\frac{\partial R}{\partial y} - Q\frac{\partial R}{\partial x}\right) \quad ,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = v\left(P\frac{\partial v}{\partial y} - Q\frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad .$$

Da v integrierender Faktor der Gleichung 1) ist, so ist

$$P\frac{\partial v}{\partial y} - Q\frac{\partial v}{\partial x} = v\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{xy}\right) \quad .$$

Setzt man dies in 10) ein und unterdrückt den Faktor v^2, so erhält man in der Tat Nr. 2, 4).

Um nun $\varphi(z)$ zu erhalten, hat man in 8) links x und y durch V zu verdrängen und V durch φ zu ersetzen; man erhält dann eine Differentialgleichung

erster Ordnung für φ. Durch das allgemeine Integral dieser Gleichung tritt in das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung eine willkürliche Konstante ein.

Beispiel.

$$a^2 x\,dx + b^2 y\,dy - c\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2 - 1}\,dz = 0 \quad .$$

Hier ist

$$v = 2\,, \qquad V = a^2x^2 + b^2y^2 \quad ;$$

daher ist

$$\frac{\partial V}{\partial z} - vR \equiv 2c\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2 - 1} \quad .$$

Dies ist eine Funktion von V, folglich läßt die gegebene Differentialgleichung eine einzelne Integralgleichung zu. Man hat weiter

$$\frac{d\varphi}{dz} = -2R = 2c\sqrt{\varphi - 1} \quad ;$$

hieraus folgt

$$cz = \int \frac{d\varphi}{2\sqrt{\varphi - 1}} = \sqrt{\varphi - 1} + c_1 \quad ,$$

wenn c_1 eine willkürliche Konstante ist. Dies ergibt

$$\varphi = (cz - c_1)^2 + 1 \quad .$$

Das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung ist sonach

$$a^2x^2 + b^2y^2 - (cz - c_1)^2 = 1 \text{ *)}.$$

4. Wenn in der Gleichung

$$1) \qquad P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

die Funktionen P, Q, R die Bedingung

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$$

nicht erfüllen, wenn es also keine Flächenfamilie $f(x, y, z, c) = 0$ gibt derart, daß jede unendlich kleine Verschiebung eines Punktes längs irgend einer dieser Flächen der Differentialgleichung genügt, so lassen sich doch auf jeder beliebigen Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ unzählige Linien so ziehen, daß jede unendlich kleine Verschiebung eines Punktes längs jeder solchen Kurve die Differentialgleichung erfüllt.

Aus der Gleichung $\varphi(x, y, z) = 0$ möge hervorgehen

$$2) \qquad z = f(x, y) \quad ;$$

hieraus folgt für jede Verschiebung entlang der Fläche φ

$$3) \qquad dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \quad .$$

Setzt man 2) und 3) in 1) ein, so bleibt eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x und y; das allgemeine Integral desselben sei

$$4) \qquad \psi(x, y, C) = 0 \quad ,$$

wobei C eine willkürliche Konstante bezeichnet; hierzu gehört eine Schar von Cylinderflächen, deren Mantellinien der Z-Achse parallel sind; der Schnitt jedes dieser Cylinder mit der Fläche $\varphi = 0$ befriedigt die Gleichung 1).

Man kann nun sagen, die Gleichung 1) sei durch den Verein der beiden Gleichungen 2) und 4) integriert.

---

*) Weitere Beispiele siehe BOOLE, A treatise etc., XII. Kap.

Man kann in diesem Falle die Integralgleichungen auch in folgender Weise darstellen. Ist

$$V(x, y, z) = c$$

das Integral von $P\,dx + Q\,dy = 0$ unter Voraussetzung eines konstanten z, so ist

$$5) \qquad V(x, y, z) = \varphi(z) \quad ,$$

worin φ eine ganz willkürliche Funktion von z bedeutet, ein Integral von 1) für alle Werte x, y, z, die der Gleichung genügen (Nr. 3, 8))

$$6) \qquad \frac{\partial V}{\partial z} - vR - \frac{d\varphi}{dz} = 0 \quad .$$

Somit ist die Gleichung durch zwei Gleichungen (5 und 6) integriert, die eine willkürliche Funktion (φ) enthalten.

5. Um die Bedingungen zu erhalten, unter denen die Differentialgleichung

$$1) \qquad P\,dx + Q\,dy + R\,dz + S\,dt = 0$$

durch eine einzige Gleichung

$$2) \qquad t = \varphi(x, y, z)$$

integriert werden kann, leiten wir aus 1) ab

$$3) \qquad dt = -\frac{P}{S}dx - \frac{Q}{S}dy - \frac{R}{S}dz \quad .$$

Die gesuchten Bedingungen ergeben sich zunächst in der Form

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{P}{S} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{Q}{S} \quad ,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial z}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{P}{S} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{R}{S} \quad ,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial z}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{Q}{S} = \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{R}{S} \quad .$$

Führt man die Differentiationen aus, und bezeichnet partiale Differentialquotienten nach x, y, z, t durch geeignete Zeiger, so erhält man, wenn man die partialen Differentialquotienten von t aus 3) entnimmt,

$$4) \qquad S(Q_x - P_y) + P(S_y - Q_t) + Q(P_t - S_x) = 0 \quad ,$$

$$5) \qquad S(P_z - R_x) + P(R_t - S_z) + R(S_x - P_t) = 0 \quad ,$$

$$6) \qquad S(Q_z - R_y) + Q(R_t - S_z) + R(S_y - Q_t) = 0 \quad .$$

Reduziert man 1) auf das Differential einer andern Veränderlichen, so erhält man außer den Gleichungen 4), 5), 6) noch

$$7) \qquad P(Q_z - R_y) + Q(R_x - P_z) + R(P_y - Q_x) = 0 \quad .$$

Wie man sich leicht überzeugt, ist diese Gleichung eine Folge der Gleichungen 4), 5), und 6), enthält also keine neue Bedingung für P, Q, R, S.

6. Wenn die Bedingungen Nr. 5, 4) bis 7) erfüllt sind, so wird der Gleichung

$$1) \qquad P\,dx + Q\,dy + R\,dz + S\,dt = 0$$

durch ein einziges Integral genügt. Nimmt man zunächst t als konstant an, so geht die Differentialgleichung über in

$$2) \qquad P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0 \quad .$$

Da Nr. 5, 7) erfüllt ist, so läßt diese Gleichung ein einziges Integral zu

3) $$f(x, y, z, t) = c \quad ,$$

wobei t als Parameter auftritt, sofern es in P, Q, R enthalten ist, und c die Integrationskonstante bezeichnet. Man kann nun c als Funktion von t so bestimmen, daß 3) der gegebenen Differentialgleichung genügt. Denn aus 3) folgt

4) $$f_x dx + f_y dy + f_z dz + f_t dt - \frac{dc}{dt} dt = 0 \quad .$$

Da nun 3) das Integral von 2) ist, so ist für einen bestimmten Faktor v

5) $$f_x = vP, \quad f_y = vQ, \quad f_z = vR \quad ;$$

ferner ist zufolge 1)

$$P dx + Q dy + R dz = -S dt \quad .$$

Führt man dies in 4) ein, so erhält man

$$-vS + f_t - \frac{dc}{dt} = 0 \quad .$$

Hieraus folgt

$$\frac{dc}{dt} = -vS + f_t \quad .$$

Soll nun c als Funktion von t allein bestimmbar sein, so muß die rechte Seite dieser Gleichung eine Funktion von t und c allein sein, sobald man in derselben z gemäß 3) durch x, y, c, t ersetzt. Dies tritt ein, wenn nach der Ersetzung die Differentialquotienten der rechten Seite, genommen nach x und y, verschwinden. Unter dieser Voraussetzung hat man daher

6) $$\frac{\partial}{\partial x}(vS - f_t) = 0 \quad ,$$

7) $$\frac{\partial}{\partial y}(vS - f_t) = 0 \quad .$$

Die Ausführung der Differentiation in 6) ergibt

8) $$v_x S + v S_x + (v_z S + v S_z) z_x - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial t} z_x = 0 \quad .$$

Nun ist zunächst

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} = vP_t + v_t P, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial t} = v R_t + v_t R \quad ,$$

$$z_x = -P : R \quad .$$

Führt man dies in 8) ein und multipliziert mit R, so erhält man

$$S(Rv_x - Pv_z) + v(RS_x - PS_z - RP_t + PR_t) = 0 \quad .$$

Aus

$$\frac{\partial v R}{\partial x} = \frac{\partial v P}{\partial z}$$

folgt

$$Rv_x - Pv_z = v(P_z - R_x) \quad ;$$

benutzt man dies, so erhält man schließlich

$$S(P_z - R_x) + P(R_t - S_z) + R(S_x - P_t) = 0 \quad ,$$

d. i. die Gleichung Nr. 5, 5). Als ausreichende Bedingung für 7) erhält man ebenso die Gleichung Nr. 5, 6).

Wenn daher die Bedingungen Nr. 5, 4) bis 7) erfüllt sind, so ermittle man das Integral

$$9) \qquad f(x, y, z, t) = c$$

der Differentialgleichung

$$P dx + Q dy + R dz = 0 \quad ,$$

und bestimme hierauf c als Funktion von z aus der Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dc}{dt} = -vS + f_t \quad ,$$

worin x, y, z gemäß 9) durch t verdrängt sind; führt man diese Funktion in 9) ein, so ist 9) das Integral der Gleichung

$$P dx + Q dy + R dz + S dt = 0 \quad .$$

7. Bestimmte Vereine von Differentialgleichungen. Unter einem bestimmten Vereine versteht man einen Verein von n Differentialgleichungen, die $n+1$ Veränderliche, sowie die Differentialquotienten von n derselben in Bezug auf eine — die unabhängige Veränderliche — enthalten.

Wir werden zeigen, wie ein solcher Verein auf einen Verein von n Differentialgleichungen zurückgeführt wird, deren jede außer der unabhängigen Veränderlichen nur eine abhängige und ihre Differentialquotienten enthält.

Sind sämtliche Gleichungen von der ersten Ordnung, so können aus ihnen die Differentialquotienten

$$\frac{dx_1}{dx}, \quad \frac{dx_2}{dx}, \quad \frac{dx_3}{dx}, \quad \ldots \quad \frac{dx_n}{dx}$$

der abhängigen Veränderlichen berechnet werden; man erhält

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{X_1}{X}, \quad \frac{dx_2}{dx} = \frac{X_2}{X}, \quad \ldots \quad \frac{dx_n}{dx} = \frac{X_n}{X} \quad ,$$

oder

$$1) \qquad dx_1 : dx_2 : dx_3 : \ldots : dx = X_1 : X_2 : X_3 : \ldots : X \quad ,$$

wo nun keine der n Veränderlichen vor der andern bevorzugt erscheint.

Nach Jacobi werden die Integralgleichungen dieses Vereins auf folgendem Wege erhalten:

Man differenziere die Gleichung

$$2) \qquad \frac{dx_1}{dx} = \frac{X_1}{X}$$

$(n-1)$-mal nach x und ersetze nach jeder Differentiation die Differentialquotienten $dx_k : dx$ durch $X_k : X$; alsdann erhält man mit 2) zusammen n Gleichungen, welche die n Differentialquotienten

$$\frac{dx_1}{dx}, \quad \frac{d^2 x_1}{dx^2}, \quad \frac{d^3 x_1}{dx^3}, \quad \ldots \quad \frac{d^n x_1}{dx^n}$$

durch $x, x_1, \ldots x_n$ ausdrücken. Entfernt man hieraus $x_2, x_3, \ldots x_n$, so bleibt eine Differentialgleichung n-ter Ordnung, die nur x_1 und x enthält,

$$\varphi\left(x, x_1, \frac{dx_1}{dx}, \ldots \frac{d^n x_1}{dx^n}\right) = 0 \quad .$$

Die n ersten Integrale dieser Gleichung seien

$$F_1\left(x, x_1, \frac{dx_1}{dx}, \ldots \frac{d^{n-1}x_1}{dx^{n-1}}\right) = C_1 \quad ,$$

$$F_2\left(x, x_1, \frac{dx_1}{dx}, \ldots \frac{d^{n-1}x_1}{dx^{n-1}}\right) = C_2 \quad ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_n\left(x, x_1, \frac{dx_1}{dx}, \ldots \frac{d^{n-1}x_1}{dx^{n-1}}\right) = C_n \quad .$$

Setzt man in diese Gleichungen die Werte der $(n-1)$ Differentialquotienten von x_1, ausgedrückt durch $x, x_1, \ldots x_n$, ein, so erhält man n Gleichungen mit n willkürlichen Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_n$, die Integralgleichungen der Aufgabe

8. Ehe wir die Betrachtung bestimmter Vereine fortsetzen, ergänzen wir, gestützt auf das in Nr. 7 Entwickelte, die in Nr. 1 bis 6 enthaltenen Untersuchungen, indem wir nachweisen:

Wenn die Bedingungen Nr. 5, 4) bis 7) nicht erfüllt sind, so wird der Differentialgleichung

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz + S\,dt = 0$$

durch den Verein zweier Gleichungen genügt, die eine willkürliche Funktion enthalten.

Werden die linken Seiten der Gleichungen Nr. 5, 4) bis 7) der Reihe nach mit $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{S}$ bezeichnet, so erkennt man die Identität

$$1) \qquad -P\mathfrak{P} + Q\mathfrak{Q} + R\mathfrak{R} + S\mathfrak{S} \equiv 0 \quad ;$$

daher wird der gegebenen Differentialgleichung durch die Proportion genügt

$$dx : dy : dz : dt = -\mathfrak{P} : \mathfrak{Q} : \mathfrak{R} : \mathfrak{S} \quad .$$

Diese Proportion ist gleichbedeutend mit dem Vereine

$$2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{\mathfrak{P}} = -\dfrac{dt}{\mathfrak{S}} \quad , \\[2mm] \dfrac{dy}{\mathfrak{Q}} = \dfrac{dt}{\mathfrak{S}} \quad , \\[2mm] \dfrac{dz}{\mathfrak{R}} = \dfrac{dt}{\mathfrak{S}} \quad . \end{cases}$$

Die Integrale dieser drei Gleichungen seien

$$3) \qquad \begin{cases} x = \varphi(t, a, b, c) \quad , \\ y = \psi(t, a, b, c) \quad , \\ z = \chi(t, a, b, c) \quad , \end{cases}$$

wobei a, b, c die Integrationskonstanten bezeichnen.

Durch 3) wird die gegebene Gleichung integriert; diese Lösung der Aufgabe ist aber nur eine partikuläre; wir werden zeigen, wie man von ihr zur allgemeinen Lösung übergehen kann, indem man statt der Konstanten a, b, c geeignet gewählte Funktionen der Veränderlichen setzt.

9. Differenziert man Nr. 8, 3) nach allen darin enthaltenen Größen, so erhält man

$$1) \qquad \begin{cases} dx = \varphi_t\,dt + \varphi_a\,da + \varphi_b\,db + \varphi_c\,dc \quad , \\ dy = \psi_t\,dt + \psi_a\,da + \psi_b\,db + \psi_c\,dc \quad , \\ dz = \chi_t\,dt + \chi_a\,da + \chi_b\,db + \chi_c\,dc \quad . \end{cases}$$

Führt man dies in die gegebene Differentialgleichung ein, so erhält man

$$2)\qquad (P\varphi_t + Q\psi_t + R\chi_t + S)\,dt + \alpha\,da + \beta\,db + \gamma\,dc = 0 \quad ,$$

wobei

$$3)\qquad \begin{cases} \alpha = P\varphi_a + Q\psi_a + R\chi_a \quad , \\ \beta = P\varphi_b + Q\psi_b + R\chi_b \quad , \\ \gamma = P\varphi_c + Q\psi_c + R\chi_c \quad . \end{cases}$$

Die Gleichungen Nr. 8, 3) genügen unter Voraussetzung konstanter a, b, c den Gleichungen Nr. 8, 2); folglich ist

$$4)\qquad \begin{cases} \varphi_t = -\dfrac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{S}}\,, \quad \psi_t = \dfrac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{S}}\,, \quad \chi_t = \dfrac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{S}} \quad , \\ P\varphi_t + Q\psi_t + R\chi_t + S = \dfrac{1}{\mathfrak{S}}(-P\mathfrak{P} + Q\mathfrak{Q} + R\mathfrak{R} + S\mathfrak{S}) = 0 \quad . \end{cases}$$

Die Gleichung 2) wird hiernach

$$5)\qquad \alpha\,da + \beta\,db + \gamma\,dc = 0 \quad .$$

Ersetzt man in P, Q, R die Veränderlichen x, y, z gemäß der Gleichungen Nr. 8, 3) durch t, a, b, c, so enthalten α, β, γ nur noch t; diese Veränderliche kommt in α, β, γ nur in einem gemeinsamen Faktor vor.

Wenn in P, Q, R, S die Veränderliche x, y, z durch t, a, b, c ersetzt sind, so deuten wir dies durch die Buchstaben P, Q, R, S an. Alsdann ist

$$6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\alpha}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}(\mathrm{P}\,\varphi_a + \mathrm{Q}\,\psi_a + \mathrm{R}\,\chi_a) \\ = \mathrm{P}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial a\,\partial t} + \mathrm{Q}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial a\,\partial t} + \mathrm{R}\dfrac{\partial^2\chi}{\partial a\,\partial t} \\ + (P_t + P_x\varphi_t + P_y\psi_t + P_z\chi_t)\,\varphi_a \\ + (Q_t + Q_x\varphi_t + Q_y\psi_t + Q_z\chi_t)\,\psi_a \\ + (R_t + R_x\varphi_t + R_y\psi_t + R_z\chi_t)\,\chi_a \quad . \end{cases}$$

Die Differentialgleichung

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz + S\,dt = 0$$

wird identisch erfüllt, wenn die Gleichungen gelten

$$x = \varphi\,, \qquad y = \psi\,, \qquad z = \chi \quad ,$$
$$dx : dy : dz : dt = \varphi_t : \psi_t : \chi_t : 1 \quad .$$

Wenn man aus diesen Gleichungen x, y, z durch t, a, b, c ausdrückt und in die Differentialgleichung setzt, so erhält man daher die Identität

$$\mathrm{P}\,\varphi_t + \mathrm{Q}\,\psi_t + \mathrm{R}\,\chi_t = -\mathrm{S} \quad .$$

Diese Gleichung ergibt

$$7)\qquad \begin{cases} \mathrm{P}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial a\,\partial t} + \mathrm{Q}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial a\,\partial t} + \mathrm{R}\dfrac{\partial^2\chi}{\partial a\,\partial t} = -\mathrm{S}_a - \mathrm{P}_a\varphi_t - Q_a\psi_t - \mathrm{R}_a\chi_t \\ = -\mathrm{S}_a - \varphi_t(P_x\varphi_a + P_y\psi_a + Q_z\chi_a) \\ \quad - \psi_t(Q_x\varphi_a + Q_y\psi_a + Q_z\chi_a) \\ \quad - \chi_t(R_x\varphi_a + R_y\psi_a + R_z\chi_a) \quad . \end{cases}$$

Durch Addition von 6) und 7) folgt

$$8)\quad \begin{cases} \frac{\partial a}{\partial t} = -\mathrm{S}_a + \varphi_a [P_t + \psi_t (P_y - Q_x) + \chi_t (P_z - R_x)] \\ \qquad + \psi_a [Q_t + \chi_t (Q_z - R_y) + \varphi_t (Q_x - P_y)] \\ \qquad + \chi_a [R_t + \varphi_t (R_x - P_z) + \psi_t (R_y - Q_z)] \quad . \end{cases}$$

Berücksichtigt man 4), sowie die Werte von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{S}$, so erhält man

$$P_t + \psi_t (P_y - Q_x) + \chi_t (P_z - R_x) = \frac{1}{\mathfrak{S}} [\mathfrak{S} P_t + \mathfrak{Q} (P_y - Q_x) + \mathfrak{R} (P_z - R_x)]$$

$$= \frac{1}{\mathfrak{S}} \{\mathfrak{S} P_t + (S_x - P_t) [R (P_y - Q_x) + Q (R_x - P_z)]$$

$$+ P [(R_t - R_z)(P_y - Q_x) + (S_y - Q_t)(P_z - R_x)]\} \quad .$$

Benutzt man hierin

$$R (P_y - Q_x) + Q (R_x - P_z) = \mathfrak{S} - P (Q_z - R_y) \quad ,$$

und setzt zur Abkürzung

$$(P_y - Q_x)(R_t - S_z) + (P_z - R_x)(S_y - Q_t) + (Q_z - R_y)(P_t - S_x) = \Delta \quad ,$$

so erhält man

$$P_t + \psi_t (P_y - Q_x) + \chi_t (P_z - R_x) = S_x + \frac{P}{\mathfrak{S}} \Delta \quad .$$

Ebenso folgt

$$Q_t + \chi_t (Q_z - R_y) + \varphi_t (Q_x - P_y) = S_y + \frac{Q}{\mathfrak{S}} \Delta \quad ,$$

$$R_t + \varphi_t (R_x - P_z) + \psi_t (R_y - Q_z) = S_z + \frac{R}{\mathfrak{S}} \Delta \quad .$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen ergibt sich aus 8)

$$9)\qquad \frac{\partial a}{\partial t} = -\mathrm{S}_a + S_x \varphi_a + S_y \psi_a + S_z \chi_a + \frac{\Delta}{\mathfrak{S}} a \quad .$$

Da nun

$$\mathrm{S}_a \equiv S_x \varphi_a + S_y \psi_a + S_z \chi_a \quad ,$$

wobei man ebenso wie in 9) nach erfolgter Differentiation x, y, z durch t, a, b, c zu ersetzen hat, so erhält man schließlich

$$\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\Delta}{\mathfrak{S}} \quad .$$

Integriert man diese Gleichungen nach t, so folgt

$$a = \mathfrak{A} e^{\int \frac{\Delta}{\mathfrak{S}} dt} \quad .$$

Hierbei ist $\mathfrak{A}$ die von t freie Integrationskonstante.

In derselben Weise ergibt sich

$$\beta = \mathfrak{B} e^{\int \frac{\Delta}{\mathfrak{S}} dt} \quad , \qquad \gamma = \mathfrak{C} e^{\int \frac{\Delta}{\mathfrak{S}} dt} \quad .$$

Setzt man diese Werte für a, β, γ in die Differentialgleichung 5) und unterdrückt den gemeinschaftlichen die Veränderliche t enthaltenden Faktor, so bleibt die Gleichung

$$10)\qquad \mathfrak{A}\, da + \mathfrak{B}\, db + \mathfrak{C}\, dc = 0 \quad ,$$

die nur a, b, c enthält.

Diese Gleichung läßt nicht ein einziges Integral zu; denn wenn dies der Fall wäre, so könnte man a, b, c aus den Gleichungen

$$x = \varphi(t, a, b, c) \quad ,$$
$$y = \psi(t, a, b, c) \quad ,$$
$$z = \chi(t, a, b, c) \quad ,$$

als Funktionen von x, y, z, t berechnen und in das Integral einsetzen; man hätte dann die gegebene Differentialgleichung durch ein einziges Integral integriert, entgegen der Voraussetzung, daß die Bedingungen Nr. 5, 4) bis 7) nicht erfüllt sind.

Hat man 10) durch zwei Gleichungen integriert, die eine willkürliche Funktion enthalten, und ersetzt darin a, b, c als Funktionen der Veränderlichen, so erhält man die Integralgleichungen der gegebenen Differentialgleichung*).

10. Die in Nr. 7 angegebenen allgemeinen Wege kann man in besondern Fällen durch einfachere, den Umständen angepaßte Wege ersetzen; es gelingt mitunter die Integration einer Differentialgleichung n-ter Ordnung durch Integrationen von Gleichungen niederer Ordnung zu ersetzen.

Die Differentialgleichungen

$$1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + cz + d \quad , \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 \quad , \\[2mm] \dfrac{dz}{dt} = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 \end{cases}$$

multiplizieren wir der Reihe nach mit 1, m, n und addieren; wir erhalten dadurch

$$2) \qquad \frac{dx + m\,dy + n\,dz}{dt} = Ax + By + Cz + D \quad ,$$

worin

$$A = a + m a_1 + n a_2 \,, \qquad B = b + m b_1 + n b_2 \quad ,$$
$$C = c + m c_1 + n c_2 \,, \qquad D = d + m d_1 + n d_2 \quad .$$

Wir bestimmen nun m und n so, daß

$$A : B : C = 1 : m : n \quad .$$

Alsdann gibt es eine Zahl λ, so daß

$$3) \qquad A = \lambda \,, \qquad B = m\lambda \,, \qquad C = n\lambda \quad .$$

Der Verein dieser drei Gleichungen wird durch das Verschwinden der Determinante bedingt

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & a_1 & a_2 \\ b & b_1 - \lambda & b_2 \\ c & c_1 & c_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Sind λ_1, λ_2, λ_3 die Wurzeln dieser kubischen Gleichung, so erhält man aus 3) drei zusammengehörige Wertepaare m_1, n_1; m_2, n_2; m_3, n_3. Jedes dieser Paare führen wir in 2) ein und erhalten z. B. für m_1, n_1

$$\frac{dx + m_1\,dy + n_1\,dz}{dt} = \lambda_1 \left(x + m_1 y + n_1 z + \frac{d + m_1 d_1 + n_1 d_2}{\lambda_1} \right) \quad .$$

---

*) Raabe, Über die Integration der Differentialgleichungen von der Form

$$dz = H\,dx + K\,dy + L\,dp + M\,dq + N\,dr \quad \text{u. s. w.}$$

Crelles Journal, Bd. 14, S. 123, 1825. Die allgemeine Auflösung des Problems gab Pfaff in den Denkschriften der Berliner Akademie der Wissenschaften aus den Jahren 1814 und 1815.

Hieraus folgt sofort die Integralgleichung

$$l\left(x + m_1 y + n_1 z + \frac{d + m_1 d_1 + n_1 d_2}{\lambda_1}\right) = \lambda_1 t + C_1 \quad .$$

Vertauscht man hier m_1, n_1, λ_1, C_1 mit m_2, n_2, λ_2, C_2, bezw. m_3, n_3, λ_3, C_3, so erhält man die drei Integralgleichungen des Problems.

Wenn zwei Wurzeln λ gleich sind, so erhält man auf diesem Wege nicht alle Integralgleichungen; man kann sich in diesem Falle der allgemeinen Methode bedienen.

11. Die Integration der Gleichungen

$$1)\qquad \frac{dx}{ax + by + cz + d} = \frac{dy}{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1} = \frac{dz}{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}$$

läßt sich auf Nr. 10, 1) zurückführen. Bezeichnet man die Nenner der Reihe nach mit M, M_1, M_2 und fügt eine neue Veränderliche t hinzu, die der Bedingung genügt

$$dx : dy : dz : dt = M : M_1 : M_2 : 1 \quad ,$$

so hat man für x, y, z, t dieselben Gleichungen wie in Nr. 10, 1). Hat man diese integriert, und entfernt dann t aus zwei Paaren der drei Integralgleichungen, so erhält man die beiden Integralgleichungen von 1).

Macht man in den Gleichungen

$$2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\xi}{a\xi + b\eta + c\zeta + d\tau} &= \frac{d\eta}{a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta + d_1 \tau} = \frac{d\zeta}{a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta + d_2 \tau} \\ &= \frac{d\tau}{a_3 \xi + b_3 \eta + c_3 \zeta + d_3 \tau} \end{aligned}\right.$$

die Ersetzungen

$$\xi = x\tau , \qquad \eta = y\tau , \qquad \zeta = z\tau \quad ,$$

so erhält man zunächst

$$3)\qquad \frac{\tau\, dx + x\, d\tau}{A} = \frac{\tau\, dy + y\, d\tau}{B} = \frac{\tau\, dz + z\, d\tau}{C} = \frac{d\tau}{D} \quad ,$$

wobei

$$A = ax + by + cz + d , \qquad B = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 \quad ,$$
$$C = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 , \qquad D = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 \quad .$$

Aus den Gleichungen 3) erhält man

$$4)\qquad \frac{dx}{A - xD} = \frac{dy}{B - yD} = \frac{dz}{C - zD} \quad .$$

Die Integralgleichungen dieses Vereins werden somit erhalten, indem man den Verein 2) integriert, ξ, η, ζ durch $x\tau$, $y\tau$, $z\tau$ ersetzt und τ entfernt.

12. Um die Gleichungen zu integrieren*)

$$\frac{dx}{dt} + Px + Qy = V \quad ,$$

$$\frac{dy}{dt} + P'x + Q'y = V' \quad ,$$

in denen P, P', Q, Q', V, V' nur die unabhängige Veränderliche t enthalten, multiplizieren wir die zweite mit einer noch unbestimmten Funktion z von t und addieren dann; dies ergibt

$$1)\qquad \frac{dx}{dt} + z\frac{dy}{dt} + (P + zP')x + (Q + zQ')y = V + zV' \quad .$$

*) Sturm, Cours d'Analyse, Nr. 633; Lacroix, Traité, Bd. II, S. 383.

Setzen wir nun $r = x + zy$, so ist

$$\frac{dx}{dt} + z\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} - y\frac{dz}{dt} ,$$

und aus 1) wird

$$2) \qquad \frac{dr}{dt} - y\frac{dz}{dt} + (P + zP')(r - zy) + (Q + zQ')y = V + zV' .$$

Bestimmen wir nun z so, daß

$$3) \qquad \frac{dz}{dt} + (P + zP')z - Q - zQ' = 0 ,$$

so geht die Gleichung 2) über in

$$4) \qquad \frac{dr}{dt} + (P + zP')r - V - zV' = 0 .$$

Die Gleichung 3) enthält nur z und t und ist erster Ordnung. Sind z_1 und z_2 zwei partikuläre Integrale dieser Gleichung, so setze man jedes derselben in 4) ein; man erhält dann zwei lineare Differentialgleichungen erster Ordnung für r, und gewinnt daraus zwei Integrale $r = r_1$ und $r = r_2$, jede mit einer willkürlichen Konstanten; hieraus ergeben sich schließlich die Integralgleichungen des Problems

$$x + z_1 y = r_1 , \quad x + z_2 y = r_2 .$$

Beispiel.

$$x' + 5x + y = t ,$$
$$y' - x + 3y = t^2 .$$

Die Gleichung für z ist

$$z' + 2z - z^2 - 1 = 0 ,$$

und ergibt das allgemeine Integral

$$z = \frac{1}{c - t} + 1 .$$

Für $c = \infty$ und $c = 0$ erhält man die partikulären Integrale

$$z_1 = 1 , \quad z_2 = \frac{t-1}{t} ;$$

daher ergeben sich für die zugehörigen r_1 und r_2,

$$r_1' + 4r_1 = t + t^2 ,$$
$$r_2' + \frac{4t+1}{t} r_2 = t^2 .$$

Die Integrale dieser Gleichungen sind

$$r_1 = e^{-4t}\left[C_1 + \int (t + t^2) e^{4t} dt\right] ,$$
$$r_2 = t^{-1} e^{-4t}\left(C_2 + \int t^3 e^{4t} dt\right) .$$

Die Endgleichungen sind

$$x + y = r_1 , \quad tx + (t-1)y = tr_2 ,$$

aus denen man noch, wenn erwünscht, jede der beiden abhängigen Veränderlichen x und y durch t allein ausdrücken kann.

13. Vereine von Differentialgleichungen höherer Ordnung werden durch einen sehr einfachen Kunstgriff auf Vereine erster Ordnung zurückgeführt.

Um die höhern Differentialquotienten z. B. der abhängigen Veränderlichen x in Bezug auf die unabhängige t zu beseitigen, fügt man neue Veränderliche $x_1, x_2, x_3, \ldots$ durch die Gleichungen erster Ordnung hinzu

$$1)\qquad \frac{dx}{dt} = x_1\,, \quad \frac{dx_1}{dt} \equiv \frac{d^2x}{dt^2} = x_2\,, \quad \frac{dx_2}{dt} \equiv \frac{d^3x}{dt^3} = x_3, \ldots$$

Statt der Differentialquotienten x'', x''', $\ldots x^{(n)}$ hat man in dem neuen Vereine, der aus den gegebenen, durch 1) umgeänderten Gleichungen und aus 1) besteht, die Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ und deren erste Differentialquotienten. In gleicher Weise beseitigt man die höhern Differentialquotienten der übrigen abhängigen Veränderlichen.

Hat man z. B. zwei Gleichungen zwischen x, y und t, und sind die höchsten Differentialquotienten, die in beiden Gleichungen vorkommen

$$\frac{d^m x}{dt^m} \quad \text{und} \quad \frac{d^n y}{dt^n}\,,$$

so erhält man auf dem angegebenen Wege

$$2 + (m-1) + (n-1) = m + n$$

Gleichungen erster Ordnung zwischen $(m + n + 1)$ Veränderlichen; hieraus erhält man $(m + n)$ Integralgleichungen, mit zusammen $(m + n)$ willkürlichen Konstanten. Entfernt man aus diesen Gleichungen die neu eingeführten Veränderlichen, deren Anzahl $(m + n - 2)$ ist, so ergeben sich zwei Gleichungen zwischen x, y und t, die Lösungen der Aufgabe.

Wie immer, wird man auch hier in jedem gegebenen Falle den allgemeinen Weg zu vermeiden und kürzere Wege zu entdecken suchen. Man wird sich bemühen, durch geschickte Verbindung der Differentialgleichungen neue Gleichungen zu erhalten, deren Integrale bekannt sind.

14. Wir geben hierzu ein Beispiel aus der theoretischen Mechanik. Die Theorie der Bewegung eines einzelnen Massenpunktes oder eines Vereins von Massenpunkten (z. B. eines starren Körpers) ist nur ein Teil der Theorie der Vereine von Differentialgleichungen zweiter Ordnung; und umgekehrt hat die Theorie dieser Vereine durch ihre Bedeutung für die theoretische Mechanik wesentlich an Ausbau gewonnen. Wir ziehen es vor, ohne auf die Feststellung der mechanischen Begriffe und die Begründung der Differentialgleichungen an dieser Stelle einzugehen, letzteren ihre mechanische Einkleidung vollständig zu belassen.

Wenn ein freibeweglicher Massenpunkt P, dessen Koordinaten x, y, z sind, von einem festen Punkte O, dem Nullpunkte der Koordinaten, angezogen oder abgestoßen wird, und zwar so, daß die Anziehungskraft nur von der Entfernung $OP = r$ abhängt, und wenn dieselbe beim Abstande r die Größe $f(r)$ hat, so gelten für die Koordinaten des Punktes die Differentialgleichungen

$$1)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = f(r)\cdot\frac{x}{r}\,,$$

$$2)\qquad \frac{d^2y}{dt^2} = f(r)\cdot\frac{y}{r}\,,$$

$$3)\qquad \frac{d^2z}{dt^2} = f(r)\cdot\frac{z}{r}\,.$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit dx, dy, dz, so erhält man, wenn man $dx:dt$, $dy:dt$, $dz:dt$, die Geschwindigkeitskomponenten des Punktes, mit x', y', z' bezeichnet,

$$\left(x'\frac{dx'}{dt} + y'\frac{dy'}{dt} + z'\frac{dz'}{dt}\right)dt = \frac{f(r)}{r}(x\,dx + y\,dy + z\,dz) \quad .$$

Die linke Seite ist das vollständige Differential von

$$\tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) \quad ;$$

die rechte Seite ist ebenfalls ein vollständiges, denn man hat

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad ,$$

also

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = r\,dr \quad .$$

Hieraus erhält man folgendes erste Integral

$$4) \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 2\int f(r)\,dr + h \quad ,$$

wobei h die willkürliche Konstante ist.

Bezeichnen v die Geschwindigkeit des Punktes und φ, ψ, χ die Winkel, die sie augenblicklich mit den Achsen bildet, so ist

$$x' = v\cos\varphi\,, \qquad y' = v\cos\psi\,, \qquad z' = v\cos\chi \quad ,$$

also

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = v^2 \quad ;$$

daher kann man 4) ersetzen durch

$$5) \qquad v^2 = 2\int f(r)\,dr + h \quad .$$

Nach welchem Gesetze daher auch die Einwirkung des Nullpunktes auf den bewegten Punkt P erfolgen, und in welcher Richtung und mit welcher Anfangsgeschwindigkeit derselbe seinen Lauf beginnen mag, immer ist die Geschwindigkeit nur eine Funktion des Polabstands r; wenn sich der Punkt im Laufe der Bewegung wiederholt in demselben Abstande von O befindet, so hat er in allen diesen Augenblicken dieselbe Geschwindigkeit.

Man kann noch auf anderem Wege zu ersten Integralen des Vereins gelangen. Multipliziert man 1) mit y, 2) mit x und subtrahiert, so ergibt sich

$$6) \qquad xy'' - yx'' = 0 \quad .$$

Da nun

$$\frac{d}{dt}(xy' - yx') = xy'' + x'y' - yx'' - y'x' = xy'' - yx'' \quad ,$$

so folgt aus 6) durch Integration

$$7) \qquad xy' - yx' = c \quad ;$$

ebenso erhält man die Integrale

$$8) \qquad yz' - zy' = c_1 \quad ,$$

$$9) \qquad zx' - xz' = c_2 \quad ,$$

wobei c, c_1, c_2 willkürliche Konstante sind.

Multipliziert man die Gleichungen 7), 8), 9) der Reihe nach z, x, y und addiert, so erhält man links identisch Null; daher folgt die Gleichung

$$c_1 x + c_2 y + cz = 0 \quad .$$

Dies ergibt: Die Bewegung erfolgt in einer Ebene, die durch die Anziehungsmitte geht.

Wählt man diese Ebene zur XY-Ebene, so bleiben nur die beiden Differentialgleichungen

$$10)\qquad x'' = f(r)\cdot\frac{x}{r}\,,\qquad y'' = f(r)\cdot\frac{y}{r}\,,$$

wobei

$$r^2 = x^2 + y^2\,,$$

und die beiden ersten Integrale

$$11)\qquad v^2 = 2\int f(r)\,dr + h\,,$$

$$12)\qquad xy' - yx' = c\,.$$

Die letzte Gleichung vereinfacht sich durch Einführung von Polarkoordinaten. Man hat

$$x = r\cos\varphi\,,\qquad x' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\varphi'$$

$$y = r\sin\varphi\,,\qquad y' = r'\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\varphi'\,.$$

Daher ist

$$v^2 = r'^2 + r^2\varphi'^2\,,$$

$$xy' - yx' = r^2\varphi'\,.$$

Ist df die verschwindend kleine Fläche, die der Polabstand r in der Zeit dt beschreibt, so ist $2\,df = r^2 d\varphi$; daher folgt aus 12)

$$\frac{df}{dt} = \frac{c}{2}\,,\qquad f = \frac{c}{2}\,t + C\,.$$

Die vom Polabstande des Punktes beschriebenen Flächen sind daher den hierbei verflossenen Zeiten verhältnisgleich.

Setzt man zur Abkürzung

$$\int f(r)\,dr = U\,,$$

und führt auch in 11) Polarkoordinaten ein, so entsteht

$$13)\qquad r'^2 + r^2\varphi'^2 = 2U + h\,.$$

Nach 12) hat man $r^2\varphi'^2 = c^2 : r^2$, daher folgt aus 12)

$$r'^2 = 2U + h - \frac{c^2}{r^2}\,;$$

hieraus ergibt sich

$$14)\qquad dt = \frac{dr}{\sqrt{2U + h - \left(\frac{c}{r}\right)^2}}\,,\qquad t = \int\frac{dr}{\sqrt{2U + h - \left(\frac{c}{r}\right)^2}} + \gamma_1\,,$$

und aus 14) und 12)

$$15)\qquad d\varphi = \frac{c\,dt}{r^2} = \frac{c\,dr}{r^2\sqrt{2U + h - \left(\frac{c}{r}\right)^2}}\,,\qquad \varphi = c\int\frac{dr}{r^2\sqrt{2U + h - \left(\frac{c}{r}\right)^2}} + \gamma_2\,.$$

Durch diese Gleichungen ist die Aufgabe vollständig gelöst; insbesondere gibt die letzte Gleichung die Bahn des Punktes. Die Konstanten h, c, γ_1 und γ_2 bestimmen sich in jedem gegebenen Falle aus der Anfangslage, der Anfangsgeschwindigkeit und der Anfangsrichtung des Punktes; setzt man nämlich fest, daß zur Zeit $t = 0$ die Größen r, φ, v die Werte r_0, φ_0, v_0 haben sollen, und daß zu dieser Zeit die Bahn mit r_0 den Winkel α bilden soll, so erhält man durch Einführung der Werte r_0 und v_0 in 11) und 14) die Konstanten h und γ_1.

Berechnet man aus der Bahngleichung 15) den Winkel σ der Bahntangente gegen den Polabstand, für welchen man hat

$$16) \qquad \operatorname{tang}\sigma = r : \frac{dr}{d\varphi} \quad ,$$

und setzt in 15) und 16) $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0$, $\sigma_0 = \alpha$, sowie den vorher gefundenen Wert von h, so erhält man c und γ_2 durch die Anfangszustände ausgedrückt.

§ 6. Partiale Differentialgleichungen erster Ordnung.

1. Unter einer partialen Differentialgleichung versteht man eine Gleichung zwischen unabhängigen Veränderlichen, abhängigen Veränderlichen und den partialen Differentialquotienten der letztern. Wir beschränken uns auf Gleichungen mit einer abhängigen Veränderlichen.

2. Wenn eine partiale Differentialgleichung nur partiale Differentialquotienten rücksichtlich einer unabhängigen Veränderlichen enthält, so bietet sie nichts wesentlich neues; sie ist zu integrieren, als ob die übrigen Veränderlichen Konstante wären; die Integrationskonstanten sind durch willkürliche Funktionen der übrigen unabhängigen Veränderlichen zu ersetzen.

Beispiele.

A) Die Gleichung

$$3ax^2 + 2byz\frac{\partial z}{\partial x} = c$$

liefert

$$ax^3 + byz^2 = cx + f(y) \quad ,$$

wobei die Funktion f unbestimmt bleibt.

B)
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 3y\frac{\partial z}{\partial x} + 2y^2 z = 0 \quad .$$

Setzt man hier $z = e^{mx}$, so erhält man die Gleichung

$$m^2 - 3ym + 2y^2 = 0 \quad ,$$

mit den Wurzeln $m_1 = y$ und $m_2 = 2y$; das Integral ist daher

$$z = f(y)\cdot e^{yx} + g(y)\cdot e^{2yx} \quad ;$$

es enthält zwei willkürliche Funktionen f und g.

3. Ehe wir an die Integration partialer Gleichungen der ersten Ordnung herantreten, werfen wir einen Blick auf ihre Erzeugung. Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, eine Gleichung zwischen drei Veränderlichen x, y, z, von denen wir x und y als unabhängige Veränderliche ansehen.

Eine partiale Differentialgleichung erster Ordnung entsteht durch Entfernung zweier willkürlichen Konstanten a, b aus einer Gleichung $f(x, y, z, a, b) = 0$ und ihren partialen Ableitungen.

Entfernt man a und b aus den Gleichungen

$$f(x, y, z, a, b) = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0 , \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad ,$$

so erhält man in der Tat eine Gleichung, die außer den Veränderlichen auch $\partial z : \partial x$ und $\partial z : \partial y$ enthält.

Enthält eine Gleichung $f = 0$ drei Konstante, die durch eine Gleichung $g(a, b, c) = 0$ verbunden sind, so erhält man eine partiale Differentialgleichung, indem man a, b, c aus den Gleichungen

$$f = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0\,, \quad g = 0$$

entfernt.

Beispiele: A) Eine Ebene, die einer gegebenen Richtung α, β, γ parallel ist, hat die Gleichung

$$f \equiv Ax + By + Cz - 1 = 0 \quad ,$$

wobei die Konstanten A, B, C die Bedingung erfüllen

$$g \equiv A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0 \quad .$$

Um die zugehörige partiale Differentialgleichung zu erhalten, entfernt man A, B, C aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz - 1 &= 0 \quad , \\ A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma &= 0 \quad , \\ A + Cp &= 0 \quad , \\ B + Cq &= 0 \quad , \end{aligned}$$

wenn zur Abkürzung

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}\,, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

gesetzt wird. Man erhält

$$\cos\alpha \cdot p + \cos\beta \cdot q - \cos\gamma = 0 \quad .$$

B) Eine Ebene, die einen gegebenen Punkt l, m, n enthält, hat die Gleichung

$$f \equiv Ax + By + Cz - 1 = 0 \quad ,$$

wobei für die Konstanten A, B, C die Gleichung besteht

$$g \equiv Al + Bm + Cn - 1 = 0 \quad .$$

Die Entfernung der Konstanten erfolgt aus diesen beiden Gleichungen und aus

$$A + Cp = 0\,, \quad B + Cp = 0 \quad .$$

Da

$$f - g \equiv A(x - l) + B(y - m) + C(z - n) = 0 \quad ,$$

so hat man in der Schlußgleichung des vorigen Beispiels $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ der Reihe nach durch $x - l$, $y - m$, $z - n$ zu ersetzen; man erhält

$$(x - l)p + (y - m)q - (z - n) = 0 \quad .$$

C) Für Ebenen, die eine Kugel berühren, deren Halbmesser e ist, und deren Mitte die Koordinaten a, b, c hat, erhält man

$$Ax + By + Cz - 1 = 0\,, \quad A + Cp = 0\,, \quad B + Cq = 0 \quad ;$$
$$Aa + Bb + Cc - 1 = e\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \quad .$$

Aus den ersten drei Gleichungen folgt

$$C = 1:(z - xp - yq)\,, \quad A = -p:(z - xp - yq)\,, \quad B = -q:(z - xp - yz) \quad .$$

Setzt man dies in die letzte ein, so entsteht

$$(x - a)p + (y - b)q - (z - c) = e\sqrt{1 + p^2 + q^2} \quad .$$

D) Die Gleichung einer Kugel

$$1)\qquad (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

enthält vier Konstante a, b, c, r. Liegt die Mitte auf einer gegebenen Geraden, so sind a, b, c durch zwei lineare Gleichungen verbunden

$$2)\qquad a=mc+n\,,\qquad b=\mu c+\nu\quad .$$

Durch Differentiation der Kugelgleichung folgt

$$3)\qquad \begin{cases} x-a+(z-c)p=0 \quad , \\ y-b+(z-c)q=0 \quad . \end{cases}$$

Setzt man hier für a und b die Werte aus 2) ein und entfernt dann c, so erhält man

$$(\mu z-y+\nu)p-(mz-x+n)q+\mu(x-n)-m(y-\nu)=0\quad .$$

4. Eine partiale Differentialgleichung erster Ordnung entsteht ferner, wenn man aus einer Gleichung

$$F[x,y,z,\varphi(\psi)]=0\quad ,$$

worin F und ψ bekannte Funktionen sind und φ eine willkürliche Funktion von ψ bezeichnet, sowie aus ihren partialen Ableitungen die willkürliche Funktion φ entfernt.

Durch Differentiation erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial \varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x}+\left(\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial \varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)p=0\quad ,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial \varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y}+\left(\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial \varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)q=0\quad ,$$

oder besser geordnet

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}p+\frac{\partial F}{\partial \varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\psi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial z}p\right)=0\quad ,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}q+\frac{\partial F}{\partial \varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\psi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial z}q\right)=0\quad .$$

Entfernt man aus beiden Gleichungen $\partial F:\partial\varphi$, so erhält man

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)q+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)p$$
$$+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}=0\quad ,$$

oder in Determinantenform

$$1)\qquad \begin{vmatrix} p & q & -1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix}=0\quad .$$

Es ist bemerkenswert, daß diese Gleichung in Bezug auf p und q linear ist.

5. Die willkürliche Funktion kann auch in andrer Verbindung auftreten. Aus der Gleichung

$$1)\qquad \Phi(f,g)=0\quad ,$$

worin f und g bekannte Funktionen von x, y und z sind, während Φ eine

willkürliche Funktion ist, folgt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p\right)+\frac{\partial \Phi}{\partial g}\left(\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial z}p\right)=0 \quad ,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f}\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q\right)+\frac{\partial \Phi}{\partial g}\left(\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}q\right)=0 \quad .$$

Die Entfernung von Φ ergibt

$$2) \qquad \begin{vmatrix} p & q & -1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Setzt man die gegebene Funktion g einer willkürlichen Funktion φ der gegebenen f gleich, so daß also $g=\varphi(f)$, so kommt man zu dem vorigen Falle zurück; denn aus $\Phi(f,g)=0$ folgt, daß g eine willkürliche Funktion von f ist.

6. Partiale Differentialgleichung der Cylinderflächen. Sind α, β, γ die Richtungswinkel der Mantellinien, so ist die Gleichung des Cylinders von der Form (2. Band, 4. Buch, § 6, 2))

$$\Phi(x\cos\gamma - z\cos\alpha\,,\quad y\cos\gamma - z\cos\beta)=0 \quad .$$

Setzt man in Nr. 5, 2)

$$f \equiv x\cos\gamma - z\cos\alpha\,, \qquad g \equiv y\cos\gamma - z\cos\beta \quad ,$$

so erhält man

$$\frac{1}{\cos\gamma}\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ \cos\gamma & 0 & -\cos\alpha \\ 0 & \cos\gamma & -\cos\beta \end{vmatrix} \equiv \cos\alpha\cdot p + \cos\beta\cdot q - \cos\gamma = 0 \quad .$$

7. Partiale Differentialgleichung der Kegelflächen. Es seien l, m, n die Koordinaten der Kegelspitze, so ist die allgemeine Form der Kegelgleichung (2. Band, 4. Buch, § 6, 3))

$$\Phi\left(\frac{lz-nx}{z-n}\,,\quad \frac{mz-ny}{z-n}\right)=0 \quad .$$

Setzt man in Nr. 5, 2)

$$f \equiv \frac{lz-nx}{z-n}\,, \quad g \equiv \frac{mz-ny}{z-n} \quad ,$$

also

$$\frac{\partial f}{\partial z} \equiv n\frac{x-l}{(z-n)^2}\,, \qquad \frac{\partial g}{\partial z} \equiv n\frac{y-m}{(z-n)^2} \quad ,$$

so entsteht

$$\frac{(z-n)^3}{n^2}\cdot\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ -\frac{n}{z-n} & 0 & \frac{n(x-l)}{(z-n)^2} \\ 0 & -\frac{n}{z-n} & \frac{n(y-m)}{(z-n)^2} \end{vmatrix} \equiv (x-l)p+(y-m)q-(z-n)=0 \;.$$

8. Partiale Differentialgleichung der Umdrehungsflächen. Wir nehmen der Einfachheit wegen an, daß die Achse der Fläche den Nullpunkt enthält. Beschreibt man um den Nullpunkt Kugeln, und senkrecht zur Umdrehungsachse Ebenen, und setzt irgend eine Abhängigkeit zwischen dem Kugelhalbmesser a

und dem Abstande b einer Lotebene zur Achse vom Nullpunkte voraus, so erfüllen die gemeinsamen Punkte der Kugeln und der zugehörigen Ebenen eine Umdrehungsfläche. Die Gleichung einer Kugel um den Nullpunkt ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad ,$$

und die Gleichung einer Lotebene zur Achse

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = b \quad ,$$

wenn α, β, γ die Richtungswinkel der Achse sind; daher ist die allgemeinste Form der Gleichung einer Umdrehungsfläche

$$\Phi(x^2 + y^2 + z^2 , \quad x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma) = 0 \quad .$$

Wir haben daher in Nr. 5, 2)

$$f \equiv x^2 + y^2 + z^2 , \quad g \equiv x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma$$

zu setzen und erhalten

$$\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ x & y & z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

9. Wenn eine Gleichung $f(x, y, z, a, b) = 0$ zwei willkürliche Konstante enthält, und wenn diese Gleichung im Verein mit

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p = 0 , \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q = 0$$

durch Entfernung von a und b auf die Gleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

führt, so wird $f = 0$ als vollständiges Integral der partialen Differentialgleichung erster Ordnung $F = 0$ bezeichnet.

Wir wollen nun zunächst sehen, ob ähnlich wie die singulären Integrale gewöhnlicher Differentialgleichungen so auch neue Lösungen der Gleichung $F = 0$ dadurch erhalten werden, daß man die Konstanten a und b durch passend gewählte Funktionen von x und y ersetzt.

Wir denken uns für diese Untersuchung das vollständige Integral auf z reduziert, also von der Form

$$1) \qquad z = f(x, y, a, b) \quad .$$

Sind a und b veränderlich, so erhält man

$$2) \qquad \begin{cases} p = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial a} \cdot \dfrac{\partial a}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial b} \cdot \dfrac{\partial b}{\partial x} \quad , \\[2ex] q = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial a} \cdot \dfrac{\partial a}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial b} \cdot \dfrac{\partial b}{\partial y} \quad . \end{cases}$$

Sollen diese Gleichungen mit denen übereinstimmen, die aus 1) unter Voraussetzung konstanter a und b hervorgehen, so müssen a und b den Bedingungen genügen

$$3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a} \dfrac{\partial a}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial b} \dfrac{\partial b}{\partial x} = 0 \quad , \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial a} \dfrac{\partial a}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial b} \dfrac{\partial b}{\partial y} = 0 \quad . \end{cases}$$

Hieraus erhält man

$$4) \qquad \frac{\partial f}{\partial a} \cdot D = 0 , \quad \frac{\partial f}{\partial b} \cdot D = 0 \quad ,$$

wobei

$$D \equiv \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial x} \quad .$$

Um den Gleichungen 3) zu genügen, hat man zu setzen: entweder

$$5) \qquad \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial y} = 0 \quad ;$$

oder

$$6) \qquad D = 0 \quad ,$$

wobei die Gleichungen 3) sich auf eine beschränken, die mit 6) zusammen besteht; oder

$$7) \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0 \quad .$$

Die Annahme 5) führt auf konstante Werte von a und b, also auf das vollständige Integral zurück.

Wenn die Bedingung $D = 0$ erfüllt ist, so ist b eine Funktion von a; setzen wir $b = \varphi(a)$, so ist

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \varphi'(a) \cdot \frac{\partial a}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial b}{\partial y} = \varphi'(a)\frac{\partial a}{\partial y} \quad ,$$

daher gehen beide Gleichungen 3) in die Gleichung über

$$8) \qquad \frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b} \cdot \varphi'(a) = 0 \quad ,$$

in welcher b durch $\varphi(a)$ zu ersetzen ist.

Die Entfernung von a aus den Gleichungen 8) und 1) kann nur in seltenen Fällen ohne eine bestimmte Annahme über die willkürliche Funktion φ erfolgen.

Das Integral der partialen Differentialgleichung, das aus dem Verein der Gleichungen $b = \varphi(a)$ und 8) besteht, und durch das Auftreten einer willkürlichen Funktion φ charakterisiert ist, heißt das allgemeine Integral der Gleichung.

Durch Entfernung von a und b aus den Gleichungen 1) und 7) erhält man ein singuläres Integral.

Beispiel. Nach Nr. 6 hat die Gleichung

$$9) \qquad \cos\alpha \cdot p + \cos\beta \cdot q - \cos\gamma = 0$$

das vollständige Integral

$$10) \qquad Ax + By + Cz - 1 = 0 \quad ,$$

wobei die Konstanten A, B, C durch die Gleichung verbunden sind

$$11) \qquad A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0 \quad .$$

Durch Entfernung von C aus 10) und 11) folgt

$$12) \qquad (Ax + By)\cos\gamma - (A\cos\alpha + B\cos\beta)z - \cos\gamma = 0 \quad ,$$

also ist

$$z = \frac{Ax + By - 1}{A\cos\alpha + B\cos\beta} \cdot \cos\gamma \quad .$$

Setzt man hier

$$\frac{1}{A\cos\alpha + B\cos\beta} = a\,, \quad \frac{A}{A\cos\alpha + B\cos\beta} = b \quad ,$$

so erhält man

$$\frac{B}{A\cos\alpha + B\cos\beta} = \frac{1 - b\cos\alpha}{\cos\beta} \quad ,$$

und daher

$$\frac{1}{\cos\gamma} \cdot z = -a + bx + \frac{1 - b\cos\alpha}{\cos\beta}y \quad .$$

Für die Gleichung 8) erhält man hier

$$-1+\frac{x\cos\beta-y\cos\alpha}{\cos\beta}\varphi'(a)=0 \quad .$$

Denkt man sich für φ irgend eine Funktion gesetzt und die Gleichung nach a aufgelöst, so erhält man jedenfalls a in der Form

$$a=\psi(x\cos\beta-y\cos\alpha) \quad ,$$

wo nun ψ ebenso willkürlich ist wie φ; setzt man dies in $\varphi(a)$ ein, so erfolgt für b

$$b=\chi(x\cos\beta-y\cos\alpha) \quad ,$$

wobei aber χ durch ψ bestimmt ist. Beide Werte für a und b setzen wir in das vollständige Integral und erhalten

$$\frac{z}{\cos\gamma}=-\psi+\frac{1}{\cos\beta}(x\cos\beta-y\cos\alpha)\chi+\frac{y}{\cos\beta} \quad .$$

Die beiden ersten Glieder der rechten Seite sind zusammen eine willkürliche Funktion von $(x\cos\beta-y\cos\alpha)$; daher hat man

$$13) \qquad z\cos\beta-y\cos\gamma=f(x\cos\beta-y\cos\alpha) \quad ,$$

wobei f eine willkürliche Funktion bezeichnet. Aus

$$x\cos\beta-y\cos\alpha\equiv\frac{1}{\cos\gamma}[(x\cos\gamma-z\cos\alpha)\cos\beta+(z\cos\beta-y\cos\gamma)\cos\alpha]$$

erkennt man, daß man 13) ersetzen kann durch

$$\Phi(x\cos\gamma-z\cos\alpha,\, z\cos\beta-y\cos\gamma)=0 \quad ,$$

wobei Φ eine willkürliche Funktion ist, in Übereinstimmung mit Nr. 6.

Da in unserem Beispiele

$$\frac{\partial z}{\partial a}=-\cos\gamma \quad ,$$

so kann es kein singuläres Integral geben.

10. Wenn eine Gleichung $z=g(x,y)$ die partiale Differentialgleichung erster Ordnung $F(x,y,z,p,q)=0$ befriedigt, und nicht durch besondere Werte für a und b aus einem vollständigen Integrale $z=f(x,y,a,b)$ hervorgeht, so gehört diese Gleichung zu dem vollständigen Integrale entweder als allgemeines oder als singuläres Integral.

Denn wenn man $f(x,y,a,b)$ nicht durch besondere Werte der Konstanten a und b in $g(x,y)$ verwandeln kann, so kann man doch jedenfalls für a und b solche Funktionen von x und y setzen, daß $f(x,y,a,b)\equiv g(x,y)$ wird.

Aus den Untersuchungen in Nr. 5 folgt hieraus sofort, daß $g(x,y)$ entweder ein zu f gehöriges allgemeines oder singuläres Integral ist.

Ein vollständiges Integral, das dazu gehörige allgemeine, sowie das zugehörige singuläre Integral bilden also einen vollständigen Lösungsverein einer partialen Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen.

11. Wir wenden uns nun zur Integration der linearen partialen Differentialgleichungen erster Ordnung; und zwar zunächst zu Gleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen. Unter einer linearen Gleichung versteht man eine solche, in welcher die partialen Differentialquotienten der abhängigen Veränderlichen nur in der ersten Potenz vorkommen; bei drei Veränderlichen also eine Gleichung von der Form

$$1) \qquad P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}=R \quad ,$$

wobei P, Q, R konstant oder Funktionen von x, y, z sind.

Die Integration dieser Gleichung hängt aufs engste mit der Integration des Vereins zusammen

$$2)\qquad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \quad .$$

Hat man nämlich ein Integral $f(x, y, z) = a$ dieses Vereins gefunden, wobei a eine willkürliche Konstante bezeichnet, so ist für alle Werte, die dieser Gleichung genügen

$$3)\qquad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0 \quad .$$

Da nun f ein Integral von 2) ist, so erfüllen die x, y, z, dx, dy, dz, die der Gleichung 3) genügen, auch die Gleichungen 2), man kann daher in 3) die Differentiale dx, dy, dz der Reihe nach durch die Funktionen P, Q, R, ersetzen, denen sie nach 2) verhältnisgleich sind; folglich hat man

$$4)\qquad P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad .$$

Da nun

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z} \quad ,$$

so kann man 4) ersetzen durch

$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} - R = 0 \quad .$$

Hieraus folgt, daß $f(x, y, z) = a$ ein partikuläres Integral von 1) ist.

Dieselbe Schlußweise kann auch rückwärts durchlaufen werden: Ist $f(x, y, z) = a$ ein Integral der Gleichung $Pp + Qq - R = 0$, so ist es auch ein Integral des Vereins 2).

Sind $f(x, y, z) = a$ und $g(x, y, z) = b$ zwei Integrale des Vereins 2), so ist das allgemeine Integral der Gleichung 1)

$$\Phi(f, g) = 0 \quad ,$$

wobei Φ eine willkürliche Funktion bezeichnet.

Um dies zu beweisen, haben wir zu zeigen, daß Φ der Differentialgleichung genügt

$$5)\qquad P\frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q\frac{\partial \Phi}{\partial y} + R\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad ,$$

die an die Stelle von 1) tritt, wenn z durch die Gleichung $\Phi = 0$ als unentwickelte Funktion von y und x bestimmt ist. Nun ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \quad ,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \quad ,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} \quad ,$$

folglich hat man

$$P\frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q\frac{\partial \Phi}{\partial y} + R\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial f}\left(P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial g}\left(P\frac{\partial g}{\partial x} + Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\frac{\partial g}{\partial z}\right) \quad .$$

Da nun nach der Voraussetzung die beiden rechts stehenden Klammern verschwinden, so folgt, daß die Gleichung 5) erfüllt ist.

Wir haben somit folgende Regel: Um die Gleichung zu integrieren

$$Pp + Qq = R \quad ,$$

bilde man den Verein gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \quad ;$$

sind $f(x, y, z) = a$ und $g(x, y, z) = b$ zwei Integrale dieses Vereins, so ist

$$\Phi(f, g) = 0$$

das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung.

12. Sind $f(x, y, z) = a$, $g(x, y, z) = b$, und $h(x, y, z) = c$ partikuläre Integrale von

$$Pp + Qq = R \quad ,$$

so ist h eine Funktion von f und g.

Nach der Voraussetzung gelten die Gleichungen

$$P\frac{\partial h}{\partial x} + Q\frac{\partial h}{\partial y} + R\frac{\partial h}{\partial z} = 0 \quad ,$$

$$P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad ,$$

$$P\frac{\partial g}{\partial x} + Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\frac{\partial g}{\partial z} = 0 \quad ;$$

daher verschwindet ihre Determinante

$$1) \qquad \Delta \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

folglich ist h eine Funktion von f und g (2. Band, 4. Buch, § 4, Nr. 5).

Die Gleichung $h(f, g) = c$ fällt unter $\Phi(f, g) = 0$; es ist also jede Lösung der partialen linearen Differentialgleichung in der Form $\Phi(f, g) = 0$ enthalten.

13. Beispiele. A) Um die Gleichung zu integrieren

$$\cos\alpha \cdot p + \cos\beta \cdot q - \cos\gamma = 0$$

bilde man

$$dx : dy : dz = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma \quad .$$

Zwei Integralgleichungen desselben sind

$$x\cos\gamma - z\cos\alpha = c_1 \, , \qquad y\cos\gamma - z\cos\beta = c_2 \quad ;$$

daher ist das allgemeine Integral der partialen Gleichung

$$\Phi(x\cos\gamma - z\cos\alpha \; , \; y\cos\gamma - z\cos\beta) = 0 \quad .$$

B) $$(x - l)p + (y - m)q - (z - n) = 0 \quad .$$

Hierzu gehört der Verein

$$dx : dy : dz = (x - l) : (y - m) : (z - n) \quad ,$$

mit den Integralgleichungen

$$\frac{x - l}{z - n} = c_1 \, , \qquad \frac{y - m}{z - n} = c_2 \quad .$$

Das allgemeine Integral ist daher

$$\Psi\left(\frac{x-l}{z-n}, \frac{y-m}{z-n}\right) = 0 \quad .$$

Aus den Identitäten

$$n\frac{x-l}{z-n} - l = \frac{nx-lz}{z-n}, \quad n\frac{y-m}{z-n} - m = \frac{ny-mz}{z-n}$$

folgt, daß man dafür auch schreiben kann

$$\Phi\left(\frac{nx-lz}{z-n}, \frac{ny-mz}{z-n}\right) = 0 \quad ,$$

in Übereinstimmung mit Nr. 7.

C) Integration von

$$\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ x & y & z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Der Verein ist hier

$$\frac{dx}{y\cos\gamma - z\cos\beta} = \frac{dy}{z\cos\alpha - x\cos\gamma} = \frac{dz}{x\cos\beta - y\cos\alpha} \quad .$$

Bezeichnet man den gemeinsamen Wert dieser drei Verhältnisse mit dt, so erhält man

$$dx = (y\cos\gamma - z\cos\beta)\,dt \quad ,$$
$$dy = (z\cos\alpha - x\cos\gamma)\,dt \quad ,$$
$$dz = (x\cos\beta - y\cos\alpha)\,dt \quad .$$

Multipliziert man diese Gleichungen zunächst nacheinander mit x, y, z, dann mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, und addiert, so erhält man

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0\,, \qquad \cos\alpha\cdot dx + \cos\beta\cdot dy + \cos\gamma\cdot dz = 0 \quad ;$$

hieraus folgen die beiden Integrale

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_1\,, \qquad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = c_2 \quad .$$

Das allgemeine Integral der partialen Differentialgleichung ist daher

$$\Phi(x^2 + y^2 + z^2,\ x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) = 0 \quad .$$

14. Um die lineare partiale Differentialgleichung mit mehr als drei Veränderlichen zu integrieren

$$1) \qquad X_1\frac{\partial x}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial x}{\partial x_2} + \ldots + X_n\frac{\partial x}{\partial x_n} = X \quad ,$$

bilde man den Verein gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$2) \qquad dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots : X_n \quad .$$

Sind die Integralgleichungen dieses Vereins

$$3) \qquad \begin{cases} f_1(x, x_1, \ldots x_n) = c_1 \quad , \\ f_2(x, x_1, \ldots x_n) = c_2 \quad , \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_n(x, x_1, \ldots x_n) = c_n \quad , \end{cases}$$

so ist das allgemeine Integral der partialen Differentialgleichung

$$4) \qquad \Phi(f_1, f_2, f_3, \ldots f_n) = 0 \quad .$$

Beweis. Durch Differentiation gewinnt man aus 3)

$$5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial f_i}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial f_i}{\partial x_n} dx_n + \dfrac{\partial f_i}{\partial x} dx = 0 \quad , \\ i = 1,\ 2,\ \ldots\ n \quad . \end{cases}$$

Setzt man für $dx_1, \ldots dx_n$, dx nach 2) die verhältnisgleichen Werte $X_1 \ldots X_n$, X ein, so entsteht

$$6)\quad X_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial f_i}{\partial x_n} + X \frac{\partial f_i}{\partial x} = 0 \quad .$$

Um nun zu sehen, ob 4) die Gleichung 1) integriert, ziehen wir aus 4) die Werte

$$\frac{\partial x}{\partial x_k} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} : \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad ,$$

und setzen sie in 1) ein; dadurch entsteht

$$7)\quad X_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} + X \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad ;$$

soll 1) durch 4) integriert werden, so muß diese Gleichung identisch sein. Nun ist nach 4)

$$8)\quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = \frac{\partial \Phi}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial f_n} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \quad .$$

Setzt man dies in 7) ein, so entsteht

$$\sum_1^n{}_i \frac{\partial \Phi}{\partial f_i} \left(X_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial f_i}{\partial x_n} + X \frac{\partial f_i}{\partial x} \right) = 0 \quad .$$

Da nun links nach 4) der Klammerinhalt für jeden Wert $i = 1, 2, 3, \ldots n$ verschwindet, so ist diese Gleichung identisch erfüllt, w. z. b. w.

Wir wollen die Ausführung eines Beispiels unterlassen; es genüge, darauf hinzuweisen, daß jeder integrable Verein

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots : X_n$$

sogleich eine integrable lineare partiale Differentialgleichung liefert.

15. Integration nicht linearer partialer Differentialgleichungen erster Ordnung.

Die Differentialgleichung sei

$$1)\qquad F(x, y, z, p, q) = 0 \quad .$$

Die Größe p ist eine Funktion von x und y; sie kann indes auch als Funktion von x, y und z aufgefaßt werden, wobei z als unbekannte Funktion von x und y zu betrachten ist; q wird durch 1) als Funktion von x, y, z, p definiert.

Sucht man nun unter diesen Voraussetzungen p und q als Funktionen von x, y, z so zu bestimmen, daß

$$2)\qquad \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) \quad ,$$

wobei durch die Klammern angedeutet wird, daß die Differentialquotienten unter der Voraussetzung gebildet sind, daß z durch x und y ersetzt ist, so wird der Ausdruck

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

integrierbar und liefert durch Integration z als Funktion von x und y. Nun ist

$$3)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} + q\frac{\partial p}{\partial z} \ , \\ \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z}p + \frac{\partial q}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z}p\right) \ . \end{cases}$$

Setzt man dies in 2) ein, so entsteht

$$4)\quad -\frac{\partial q}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \left(q - \frac{\partial q}{\partial p}p\right)\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z}p \ .$$

Ersetzt man hierin q aus 1) durch p, so enthält diese Gleichung nur x, y, z, p, ist also eine lineare partiale Differentialgleichung für p als abhängige und x, y, z als unabhängige Veränderliche. Gelingt es, ein partikuläres Integral herzustellen, durch welches p von x, y, z abhängig gemacht wird und das eine willkürliche Konstante a enthält, so hat man dies in 1) einzusetzen, und erhält dann aus 1) q durch x, y, z, a ausgedrückt. Beide Werte hat man in

$$z = p\,dx + q\,dy$$

einzusetzen und dann zu integrieren. Das Integral enthält außer a noch eine willkürliche Konstante, ist also ein vollständiges Integral; in bekannter Weise kann man dann das zugehörige allgemeine und das singuläre Integral herstellen.

16. Beispiele. A) Aus der Gleichung

$$pq - z = 0$$

folgt

$$q = \frac{z}{p} \ ,$$

daher ist

$$-\frac{\partial q}{\partial p} = \frac{z}{p^2} \ , \quad q - \frac{\partial q}{\partial p}p = \frac{2z}{p} \ , \quad \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial z}p = 1 \ .$$

Die partiale Differentialgleichung für p ergibt sich zu

$$\frac{z}{p^2}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{2z}{p}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} = 1 \ ,$$

und hat die partikuläre Lösung

$$p = y + a \ .$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung, so folgt

$$q = \frac{z}{y + a} \ .$$

Wenn man diese Werte für p und q in $z = p\,dx + q\,dy$ einsetzt, so erhält man

$$dz = (y + a)\,dx + \frac{z}{y + a}\,dy \ .$$

Hiernach ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + a \ ,$$

$$z = (y + a)\,x + f(y) \ ,$$

wobei $f(y)$ eine unbestimmte Funktion von y bezeichnet. Führt man diesen Wert von z ein in

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y + a} \ ,$$

so ergibt sich

$$f'(y) = \frac{f(y)}{y+a} \quad ,$$

woraus durch Integration hervorgeht

$$f(y) = b(y+a) \quad .$$

Das vollständige Integral der partialen Differentialgleichung ist daher

$$z = (y+a)(x+b) \quad ;$$

das allgemeine Integral geht durch Entfernung von a aus den Gleichungen hervor

$$z = (y+a)(x+\varphi[a])$$

$$x + \varphi(a) + (y+a)\varphi'(a) = 0 \quad ,$$

worin φ eine willkürliche Funktion bezeichnet.

B) $$px + qy + pq - z = 0 \quad .$$

Hieraus folgt

$$q = \frac{z - px}{y+p}, \quad \frac{\partial q}{\partial p} = -\frac{xy+z}{(y+p)^2} \quad ,$$

$$q - \frac{\partial q}{\partial p}p = \frac{zy + 2zp - xp^2}{(y+p)^2}, \quad \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z}p = 0 \quad .$$

Die partiale Differentialgleichung für p ist

$$\frac{xy+z}{(y+p)^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{zy + 2zp - xp^2}{(y+p)^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad .$$

Ihr wird durch die Annahme $p = a$ genügt; hieraus folgt

$$q = \frac{z - ax}{y+a} \quad .$$

und aus beiden Werten

$$dz = a\,dx + \frac{z - ax}{y+a}dy \quad .$$

Nach dieser Gleichung ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a, \quad \text{also} \quad z = ax + f(y) \quad ,$$

wobei f eine noch unbestimmte Funktion bezeichnet. Hieraus folgt

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(y) \quad ;$$

und daher zur Bestimmung von f

$$f'(y) = \frac{(ax+f) - ax}{y+a} = \frac{f}{y+a} \quad ,$$

also

$$f = b(y+a) \quad .$$

Daher ergibt sich das vollständige Integral

$$z = ax + by + ab \quad .$$

Das allgemeine Integral besteht aus den beiden Gleichungen

$$z = ax + (y+a)\varphi(a) \quad ,$$

$$x + \varphi(a) + (y+a)\varphi'(a) = 0 \quad ,$$

worin φ willkürlich ist.

Für ein singuläres Integral hat man die Gleichungen

$$x + b = 0, \quad y + a = 0 \quad ;$$

werden die hieraus folgenden Werte von a und b in das vollständige Integral eingesetzt, so erhält man das singuläre Integral

$$z = -xy \quad ,$$

das, wie man sich leicht überzeugt, der gegebenen Differentialgleichung genügt.

Das singuläre Integral stellt ein hyperbolisches Paraboloid dar; das vollständige für bestimmte Werte von a und b eine Tangentenebene dieser Fläche; das allgemeine irgend eine abwickelbare Fläche, die der singulären Lösung umgeschrieben ist, deren Tangentenebenen also eine Auswahl aus den dem vollständigen Integrale entspringenden bilden.

17. Die Integration einer nicht linearen partialen Differentialgleichung mit drei Veränderlichen kann auch mit der Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung von der Form

$$1) \qquad P\,dx + Q\,dy + R\,dz + S\,dp = 0$$

in Zusammenhang gebracht werden.

Der gegebenen Differentialgleichung entnimmt man den Wert von q und setzt ihn in

$$2) \qquad dz = p\,dx + q\,dy \quad .$$

Die Gleichung 2) geht hierdurch in eine Gleichung von der Form 1) über. Man integriert diese durch zwei Gleichungen, die eine willkürliche Funktion enthalten und entfernt dann p aus diesen Gleichungen.

Beispiel. Die Differentialgleichung

$$pq - z = 0$$

gibt

$$p^2\,dx + z\,dy - p\,dz = 0 \quad .$$

Daher ist, wenn man in § 5, Nr. 8 t durch p ersetzt,

$$\begin{array}{llll} P = p^2\,, & Q = z\,, & R = p\,, & S = 0\,, \\ P_x = 0\,, & Q_x = 0\,, & R_x = 0\,, & S_x = 0\,, \\ P_y = 0\,, & Q_y = 0\,, & R_y = 0\,, & S_y = 0\,, \\ P_z = 0\,, & Q_z = 1\,, & R_z = 0\,, & S_z = 0\,, \\ P_p = 2p\,, & Q_p = 0\,, & R_p = -1\,, & S_p = 0\,. \end{array}$$

Hieraus ergibt sich

$$\mathfrak{P} = -z\,, \quad \mathfrak{Q} = p^2\,, \quad \mathfrak{R} = 2pz\,, \quad \mathfrak{S} = p^2 \quad .$$

Der Verein von Differentialgleichungen § 5, Nr. 8, 2) ist daher

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{p^2} = \frac{dz}{2pz} = \frac{dp}{p^2} \quad .$$

Die Integralgleichungen hierzu sind

$$z = ap^2\,, \quad x = ap + b\,, \quad y = p + c \quad ,$$

aus denen folgt

$$\alpha = 0\,, \quad \beta = p^2\,, \quad \gamma = ap^2 \quad .$$

Unterdrückt man den Faktor p^2, so erhält man daher für a, b, c die Differentialgleichung (§ 5, Nr. 8, 9) und 10))

$$db + a\,dc = 0 \quad .$$

Sie wird durch den Verein integriert

$$b + ac = \varphi(a) \quad ,$$

$$c = \varphi'(a) \quad .$$

Ersetzt man hierin a, b, c durch die Veränderlichen, so erhält man

$$x + zy - \frac{2z}{p} = \varphi\left(\frac{z}{p^2}\right) \quad ,$$

$$y - p = \varphi'\left(\frac{z}{p^2}\right) \quad .$$

Durch Entfernung von p aus beiden Gleichungen ergibt sich das allgemeine Integral der gegebenen partialen Differentialgleichung.

Denselben Gedankengang kann man befolgen, um eine nichtlineare partiale Differentialgleichung mit mehr als drei Veränderlichen zu integrieren. Man wird von einer partialen Differentialgleichung mit n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_n$ und der abhängigen x auf eine Differentialgleichung von der Form geführt

$$dx = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + p_3\,dx_3 + \dots + p_n\,dx_n \quad ,$$

wobei $p_i \equiv \partial x : \partial x_i$, und für einen dieser Differentialquotienten sein aus der Differentialgleichung folgender Wert zu setzen ist*).

§ 7. Partiale Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

1. In der Differentialgleichung

$$1) \qquad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

setzen wir

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q \quad .$$

Hierdurch geht sie über in

$$2) \qquad \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \quad .$$

Da nun

$$3) \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} \quad ,$$

so erhält man anstatt 2)

$$4) \qquad \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \quad .$$

Hieraus folgt (2. Band, 4. Buch, § 4, Nr. 5), daß q eine Funktion von p ist; und umgekehrt, sobald dies der Fall ist, ist 3) und daher auch 1) erfüllt. Wir setzen daher

$$5) \qquad q = \varphi(p) \quad ,$$

wobei φ eine willkürliche Funktion bezeichnet. Durch Differentiation nach x erhält man hieraus

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \varphi'(p)\frac{\partial p}{\partial x} \quad ,$$

folglich nach 3)

$$6) \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \varphi'(p)\frac{\partial p}{\partial x} \quad .$$

---

*) Eine Zusammenstellung der Integrationsmethoden für partiale Differentialgleichungen erster Ordnung mit ausführlichen Literaturnachweisen enthält MANSION, Théorie des équations aux derivées partielles du premier ordre. Paris, 1875.

Dies ist eine lineare partiale Differentialgleichung erster Ordnung für p. Der Vergleich mit § 6, Nr. 11, 1) ergibt

$$P = \varphi'(p)\,, \quad Q = -1\,, \quad R = 0 \quad .$$

Folglich ist der Verein gewöhnlicher Differentialgleichungen zu integrieren

$$dx + \varphi'(p)\,dy = 0\,, \quad dp = 0 \quad .$$

Aus der letzten Gleichung folgt das Integral

$$p = a \quad ,$$

und mit Hilfe dessen aus der ersten

$$x + \varphi'(p)y = b \quad ,$$

wobei a und b willkürliche Konstante bezeichnen. Das Integral von 6) ist daher

$$7) \qquad x + \varphi'(p) \cdot y = \psi(p) \quad ,$$

wobei ψ eine willkürliche Funktion ist. Ersetzt man in dieser Gleichung

$$\varphi'(p)\,dp = dq \quad ,$$

so erhält man

$$8) \qquad x\,dp + y\,dq = \psi(p)\,dp \quad .$$

Da nun

$$d(xp + yq - z) = x\,dp + p\,dx + y\,dq + q\,dy - \frac{\partial z}{\partial x}dx - \frac{\partial z}{\partial y}dy \quad ,$$
$$= x\,dp + y\,dq \quad ,$$

so folgt aus 8) durch Integration

$$9) \qquad xp + yq - z = \int \psi(p)\,dp \quad .$$

Setzt man

$$\int \psi(p)\,dp = \chi(p) \quad ,$$

wobei χ ebenso willkürlich ist, wie ψ, so erhält man das Integral der vorgelegten Differentialgleichung durch Entfernung von p und q aus den drei Gleichungen

$$10) \qquad \begin{cases} q = \varphi(p) \quad , \\ xp + yq - z = \chi(p) \quad , \\ x + \varphi'(p)y = \chi'(p) \quad . \end{cases}$$

Das Integral enthält zwei willkürliche Funktionen.

Es läßt sich leicht nachweisen, daß es eine abwickelbare Fläche darstellt. Denn aus der Gleichung der Tangentenebene

$$T \equiv \frac{\partial z}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(\eta - y) - (\zeta - z) = 0$$

folgen die Koordinaten von T

$$u = \frac{p}{xp + yq - z}\,, \quad v = \frac{q}{xp + yq - z}\,, \quad w = \frac{1}{xp + yq - z} \quad .$$

Daher ist

$$p = \frac{u}{w}\,, \quad q = \frac{v}{w}\,, \quad xp + yq - z = \frac{1}{w} \quad .$$

Setzt man dies in die ersten beiden Gleichungen 10), so erhält man für die Ebenenkoordinaten der eine Integralfläche berührenden Tangentenebenen die beiden voneinander unabhängigen Gleichungen

$$11) \qquad \frac{v}{w} = \varphi\left(\frac{u}{w}\right) \quad ,$$

$$12) \qquad \frac{1}{u} = \chi\left(\frac{u}{w}\right) \quad .$$

Die Tangentenebenen der den willkürlichen Funktionen φ und χ zugehörigen Integralfläche berühren daher die beiden Flächen 11) und 12) (2. Band, 3. Buch, § 10, Nr. 1 u. f.).

2. Um u als Funktion der unabhängigen Veränderlichen x und t so zu bestimmen, daß

$$1)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ *)},$$

setzen wir

$$2)\qquad u = F(w)$$

wobei F eine willkürliche, w eine noch zu bestimmende Funktion von x und t bezeichnet. Setzt man 2) in 1), so erhält man

$$F''(w)\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + F'(w)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 F''(w)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + a^2 F'(w)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad .$$

Dieser Gleichung wird unabhängig von der willkürlichen Funktion F genügt, wenn man w so bestimmt, daß

$$3)\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad ,$$

$$4)\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad ,$$

$$5)\qquad \frac{\partial w}{\partial t} = \pm a \frac{\partial w}{\partial x} \quad .$$

Aus 3) folgt

$$w = \mu t + \nu \quad ,$$

wobei μ und ν die Veränderliche x enthalten können.

Setzt man dies in 4) ein, so ergibt sich

$$\mu'' t + \nu'' = 0 \quad ,$$

woraus folgt

$$\mu'' = \nu'' = 0 \quad ;$$

also ist

$$\mu = \alpha x + \beta , \qquad \nu = \gamma x + \delta \quad ,$$

wobei α, β, γ, δ Konstante bezeichnen. Hiernach ist

$$w = \alpha x t + \beta t + \gamma x + \delta \quad .$$

Setzt man dies in 5), so erhält man

$$\alpha x + \beta = \pm a(\alpha t + \gamma) \quad .$$

Da diese Gleichung unabhängig von x und t erfüllt sein soll, so folgt

$$\alpha = 0 , \qquad \beta = \pm a \gamma \; . \; .$$

Man erhält daher

$$w = \beta(x \pm a t) + \delta \quad .$$

Man kann wegen der Unbestimmtheit der Funktion F den Faktor β und das Glied δ in w unterdrücken. Bedenkt man ferner, daß, wenn

$$u = u_0 \quad \text{und} \quad u = u_1$$

partikuläre Lösungen von 1) sind, alsdann auch 1) durch

$$u = u_0 + u_1$$

*) In der mathematischen Physik wird gezeigt, daß dies die Differentialgleichung ist, welche die Gestalt einer schwingenden elastischen Linie bestimmt, wobei x die Abscisse, u die Ordinate eines Punktes der Linie und t die Zeit bezeichnet.

genügt wird, so erkennt man, daß das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung durch die Gleichung dargestellt wird

$$u = F(x + a t) + G(x - a t) \quad .$$

Man kann die willkürlichen Funktionen F und G immer so bestimmen, daß für $t = 0$ die Funktionen u und $\partial u : \partial t$ sich in gegebene Funktionen von x verwandeln*).

Verlangt man, daß

$$u = f(x) \,, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = F(x) \,, \quad \text{für} \quad t = 0 \quad ,$$

so kann man zunächst u_0 so bestimmen, daß es der erstern, und u_1 so, daß es der andern dieser beiden Bedingungen genügt, und daß

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = 0 \,, \quad u_1 = 0 \,, \quad \text{für} \quad t = 0 \quad .$$

Man sieht sofort, daß man für u_0 zu nehmen hat

$$u_0 = \tfrac{1}{2}\,[f(x + a t) + f(x - a t)] \quad .$$

Denn es ist

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \tfrac{1}{2}\,a\,[f'(x + a t) - f'(x - a t)] \quad ,$$

für $t = 0$ hat man daher

$$u_0 = f(x) \,, \quad \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0 \quad .$$

Ebenso erkennt man sogleich, daß die für u_1 gegebenen Bedingungen von der Funktion erfüllt werden

$$u_1 = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} F(\lambda)\,d\lambda \quad .$$

Durch Addition von u_0 und u_1 erhält man das allgemeine, den gegebenen Bedingungen genügende Integral

$$u = \tfrac{1}{2}[f(x + a t) + f(x - a t)] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} F(\lambda)\,d\lambda \quad .$$

4. Die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad ,$$

geht aus der soeben integrierten hervor, wenn man in der letztern t, x, a der Reihe nach durch x, y, i ersetzt; das allgemeine Integral derselben ist daher

$$u = F(x + i y) + G(x - i y) \quad .$$

5. In die Differentialgleichung

$$1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad **)$$

setzen wir versuchsweise

$$u = e^{\alpha x + \beta t} \quad ;$$

wir erhalten für α und β die Bedingung

$$\beta = a^2 \alpha^2 \quad .$$

---

*) Das ist so, daß für den Anfang der Bewegung die Form der gespannten Linie sowie die Anfangsgeschwindigkeiten aller ihrer Punkte gegebene Werte haben.

**) Von dieser Gleichung hängt die Temperatur u der Punkte eines Körpers ab, wenn vorausgesetzt wird, daß dieselbe sich nur parallel der X-Achse ändert; t ist die Zeit.

Daher hat 1) das partikuläre Integral

$$u = e^{\alpha x + a^2 \alpha^2 t} \quad .$$

Ersetzen wir hierin α durch $\pm i\alpha$, so entstehen die beiden Lösungen

$$e^{-a^2\alpha^2 t + i\cdot\alpha x}\,, \qquad e^{-a^2\alpha^2 t - i\cdot\alpha x} \quad .$$

Man erhält hieraus neue Lösungen, wenn man diese Größen mit beliebigen Faktoren multipliziert und addiert. Nimmt man die Faktoren $\frac{1}{2}e^{-i\cdot\alpha\lambda}$ und $\frac{1}{2}e^{i\cdot\alpha\lambda}$, so erhält man

$$e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha(x-\lambda) \quad .$$

Erteilt man hierin α und λ der Reihe nach alle möglichen Werte, multipliziert jedes so entstehende partikuläre Integral mit einer von x und t unabhängigen Größe μ und addiert alle diese doppelt unendlich vielen Produkte, so ist diese Summe ein Integral der vorgelegten Differentialgleichung. Um eine unendlich große Summe zu vermeiden, nehmen wir μ unendlich klein, und setzen

$$\mu = A\,\psi(\lambda)\,d\alpha\,d\lambda \quad .$$

Alsdann geht die Summe in ein Doppelintegral über, und man erhält

$$2) \qquad u = A\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha(x-\lambda)\,\psi(\lambda)\,d\alpha\,d\lambda \quad .$$

Für die untere Grenze der Integration nach α ist 0 und nicht $-\infty$ gewählt worden, weil die zu integrierende Funktion eine gerade Funktion für α ist; A bezeichnet eine willkürliche Konstante.

Man kann die willkürliche Funktion $\psi(\lambda)$ so bestimmen, daß u für $t=0$ sich in eine gegebene Funktion verwandelt. Nach Buch 1, § 11 Nr. 17, 4) ist

$$3) \qquad F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty F(\lambda)\cos\alpha(x-\lambda)\,d\alpha\,d\lambda \quad .$$

Setzt man in 2) $t=0$, $u=F(x)$, so erhält man

$$F(x) = A\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \cos\alpha(x-\lambda)\,\psi(\lambda)\,d\alpha\,d\lambda \quad .$$

Dies wird mit 3) für $t=0$ identisch, wenn

$$A = \frac{1}{\pi}\,, \qquad \psi(\lambda) = F(\lambda) \quad .$$

Die Funktion u, die der Differentialgleichung genügt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

und für $t=0$ in die Funktion übergeht

$$u = F(x) \quad ,$$

ist daher

$$u = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha(x-\lambda)\cdot F(\lambda)\cdot d\alpha\,d\lambda \;{}^{*)}\,.$$

*) Weiteres findet man in Riemanns Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen, herausgegeben von Hattendorf, Braunschweig 1869.

Viertes Buch.

Ausgleichungsrechnung

bearbeitet von

Dr. Richard Heger,

a. o. Honorarprofessor an der Kgl. Sächs. Techn. Hochschule
und Gymnasialoberlehrer in Dresden.

Ausgleichungsrechnung.

§ 1. Einleitung.

1. Zu zwei gegebenen realen Zahlen a und b kann man die Zahl μ suchen, die a und b möglichst nahe liegt. Als Lösung dieser Aufgabe betrachten wir das arithmetische Mittel von a und b

$$1) \qquad \mu = \tfrac{1}{2}(a + b) \quad ,$$

weil dasselbe um Differenzen von gleichem absoluten Werte von a und b abweicht. Ebenso wird das arithmetische Mittel μ von n gegebenen Zahlen a_1, $a_2, \ldots a_n$ allgemein als die Zahl betrachtet, die den Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_n$ möglichst nahe liegt, denn bei der Gleichung

$$2) \qquad \mu = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

sind die gegebenen Zahlen gleichmäßig beteiligt und für den Fall $n = 2$ kommt man auf 1) zurück.

Sollen die gegebenen Zahlen einen verschieden großen Einfluß auf die Zahl μ haben, so kann man denselben derart abschätzen, daß man sich in den Zahlpunkten $a_1, a_2, a_3 \ldots$ der Reihe nach $p_1, p_2, p_3 \ldots$ Zahlpunkte von gleichem Einflusse vereinigt denkt; alsdann erhält man

$$3) \qquad \mu = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3 + \cdots}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots} \quad .$$

Wirken an einem Hebel gleiche Gewichte in den Abständen $a_1, a_2, a_3 \ldots$ vom Unterstützungspunkte, so können dieselben durch ein Gewicht von n facher Größe ersetzt werden, das am Hebelarme 2) wirkt. Sind die Gewichte ungleich $p_1, p_2, p_3 \ldots$, so werden sie durch ein Gewicht ersetzt, das ihrer Summe gleich ist und den Hebelarm 3) hat.

In Rücksicht auf diese mechanische Anwendung bezeichnet man die Faktoren $p_1, p_2, p_3 \ldots$ als die Gewichte der Zahlen $a_1, a_2, a_3 \ldots$

2. Um die Gerade

$$y = ax + b$$

zu bestimmen, die n willkürlich gegebenen Punkten $P_1, P_2, \ldots P_n$ möglichst nahe liegt, bilden wir die Differenzen λ_1, λ_2 der zu den Abscissen $x_1, x_2 \ldots$ der gegebenen Punkte gehörigen Ordinaten der Geraden und der Ordinaten $y_1, y_2 \ldots$

Die Forderung, daß die Gerade den Punkten möglichst nahe liegen soll, wird ihren mathematischen Ausdruck darin finden, daß eine bestimmte Funktion F der Differenzen $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$, die zur Abschätzung der Abweichung der Geraden von $P_1, P_2 \ldots$ dient, einen möglichst kleinen Wert erreichen soll. Wenn, wie wir zunächst voraussetzen, die Punkte alle dasselbe Gewicht haben, so wird

für F eine symmetrische Funktion der λ zu wählen sein. Nehmen wir ferner den Grundsatz an, daß nur der absolute Wert, nicht das Vorzeichen der λ entscheidend sein soll, so darf F nur gerade Potenzen der λ enthalten.

Die Bedingungen für das Minimum von

$$F(\lambda_1, \lambda_2 \ldots), \qquad \lambda_r \equiv a x_r + b - y_r$$

sind

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0 \quad ,$$

d. i.

$$1) \qquad \sum \frac{\partial F}{\partial \lambda_r} \cdot x_r = 0, \quad \sum \frac{\partial F}{\partial \lambda_r} = 0 \quad .$$

Wir stellen nun noch die Forderung, daß die Koeffizienten a und b durch die Gleichungen 1) linear bestimmt sein sollen.

Hieraus folgt, daß $\partial F : \partial \lambda_r$ eine lineare Funktion der λ_r sein muß.

Wir erhalten daher für F eine symmetrische quadratische Funktion der λ_r, die nur die Quadrate der λ_r enthält. Da ein gemeinsamer Faktor oder ein von den λ_r unabhängiges Glied ohne Einfluß auf den Eintritt eines Minimums sind, so ergibt sich für F die Funktion

$$2) \qquad F \equiv \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \ldots + \lambda_n^2 \quad .$$

Bezeichnen wir λ_r als die Abweichung der Geraden vom Punkte P_r, so liegt hiernach diejenige Gerade den Punkten $P_1, P_2, \ldots P_n$ möglichst nahe, für welche die Summe der Quadrate der Abweichungen von den Punkten $P_1, P_2 \ldots$ ein Minimum wird.

Aus 2) folgt

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial \lambda_r} = \lambda_r = a x_r + b - y_r \quad .$$

Setzt man zur Abkürzung

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + p_n q_n \equiv [p q] \quad ,$$
$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n \equiv [p] \quad ,$$

so ergeben sich zur Bestimmung von a und b die Gleichungen

$$3) \qquad [x x] a + [x] b = [x y] \quad ,$$

$$4) \qquad [x] a + n b = [y] \quad .$$

Aus 4) folgt, daß die durch 3) und 4) bestimmte Gerade den Punkt enthält, der die Koordinaten hat

$$x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots), \quad y = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \ldots) \quad ;$$

dies ist der Schwerpunkt der gegebenen Punkte.

3. Zur Bestimmung der Ebene T, die n gegebenen Punkten P_1, $P_2, \ldots P_n$ möglichst nahe liegt, genügen die zur Lösung der vorigen Aufgabe getroffenen Bestimmungen. Die Ebene T wird durch die Forderung bestimmt

$$1) \qquad \begin{cases} F \equiv \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 = \text{Minimum}, \\ \lambda_r \equiv a x_r + b y_r + c - z_r \quad , \end{cases}$$

wenn T die Gleichung hat

$$z = a x + b y + c \quad .$$

Hieraus folgen die Gleichungen

$$\frac{1}{2}\sum \frac{\partial F}{\partial \lambda_r} \cdot \frac{\partial \lambda_r}{\partial a} = \sum \lambda_r x_r = 0 \quad ,$$

$$\frac{1}{2}\sum \frac{\partial F}{\partial \lambda_r} \cdot \frac{\partial \lambda_r}{\partial b} = \sum \lambda_r y_r = 0 \quad ,$$

$$\frac{1}{2}\sum \frac{\partial F}{\partial \lambda_r} \cdot \frac{\partial \lambda_r}{\partial c} = \sum \lambda_r = 0 \quad .$$

Zur Bestimmung von a, b, c hat man daher den linearen Verein

$$[xx]a + [xy]b + [x]c = [xz] \quad ,$$

$$[xy]a + [yy]b + [y]c = [yz] \quad ,$$

$$[x]a + [y]b + nc = [z] \quad .$$

Die letzte Gleichung zeigt, daß T den Schwerpunkt von $P_1, P_2, \ldots P_n$ enthält.

4. Die lineare Funktion

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_{m-1} x_{m-1} + a_m \tag{1}$$

kann für die gegebenen Wertvereine

$$\left\{\begin{array}{llll} x_{11}, & x_{21}, & x_{31}, & \ldots \\ x_{12}, & x_{22}, & x_{32}, & \ldots \\ x_{13}, & x_{23}, & x_{33}, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{1n}, & x_{2n}, & x_{3n}, & \ldots \\ & n > m & & \end{array}\right. \tag{2}$$

im allgemeinen nicht die gegebenen Werte

$$y_1, y_2, y_3, \ldots y_n \tag{3}$$

annehmen. Die Funktion 1), welche für den Verein 2) solche Werte annimmt, die den Zahlen 3) möglichst nahe liegen, kann durch geeignete Erweiterung der in Nr. 2 durchgeführten Betrachtungen ohne neue Annahmen bestimmt werden, nämlich aus der Forderung

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \ldots + \lambda_n^2 = \text{Minimum} \quad , \\ \lambda_r \equiv a_1 x_{1r} + a_2 x_{2r} + \ldots + a_{m-1} x_{m-1,r} + a_m - y_r \quad . \end{array}\right. \tag{4}$$

Aus 4) ergibt sich zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots a_m$

$$\left\{\begin{array}{l} [x_1 x_1] a_1 + [x_1 x_2] a_2 + \ldots + [x_1 x_{m-1}] a_{m-1} + [x_1] a_m = [x_1 y] \quad , \\ [x_1 x_2] a_1 + [x_2 x_2] a_2 + \ldots + [x_2 x_{m-1}] a_{m-1} + [x_2] a_m = [x_2 y] \quad , \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ [x_1 x_{m-1}] a_1 + [x_2 x_{m-1}] a_2 + \ldots + [x_{m-1} x_{m-1}] a_{m-1} + [x_{m-1}] a_m = [x_{m-1} y] \quad , \\ [x_1] a_1 + [x_2] a_2 + \ldots + [x_{m-1}] a_{m-1} + n a_m = [y] \quad . \end{array}\right. \tag{5}$$

Zufolge der letzten dieser Gleichungen wird die Gleichung

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{m-1} x_{m-1} + a_m = y$$

befriedigt, wenn man statt x_1, x_2, x_3, $\ldots$ y die Werte

$$\frac{1}{n}(x_{11} + x_{12} + \ldots), \quad \frac{1}{n}(x_{12} + x_{22} + \ldots), \quad \ldots \quad \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \ldots) \quad ,$$

d. i. die arithmetischen Mittel der für die x_1, x_2, $\ldots$ y gegebenen Zahlen setzt.

5. Durch $(m + 1)$ Punkte ist eine Kurve C von der Gleichung

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$$

unzweideutig bestimmt. Sind n Punkte gegeben und ist $n > m + 1$, so kann man nach der Kurve C fragen, der die gegebenen Punkte möglichst nahe liegen.

Da die Kurvengleichung die zu bestimmenden Konstanten $a_0, a_1, \ldots a_m$ linear enthält, so wird man die bisher angewandte Methode auch auf den vorliegenden Fall ausdehnen, und die Kurve als Lösung der Aufgabe betrachten, für welche

$$1) \quad \begin{cases} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \ldots + \lambda_n^2 = \text{Minimum} \quad , \\ \lambda_r \equiv a_0 + a_1 x_r + a_2 x_r^2 + \ldots + a_m x_r^m - y_r \quad . \end{cases}$$

Setzt man die Differentialquotienten von 1) in Bezug auf $a_0, a_1, a_2, \ldots a_m$ gleich Null, so erhält man zur Bestimmung der a_k den Verein

$$\begin{gathered} n a_0 + [x] a_1 + [x^2] a_2 + \ldots + [x^m] a_m = [y] \quad , \\ [x] a_0 + [x^2] a_1 + [x^3] a_2 + \ldots + [x^{m+1}] a_m = [xy] \quad , \\ [x^2] a_0 + [x^3] a_1 + [x^4] a_2 + \ldots + [x^{m+2}] a_m = [x^2 y] \quad , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [x^m] a_0 + [x^{m+1}] a_1 + [x^{m+2}] a_2 + \ldots + [x^{2m}] a_m = [x^m y] \quad . \end{gathered}$$

6. Die periodische Kurve C

$$\begin{aligned} y = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_m \cos mx \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_m \sin mx \end{aligned}$$

ist durch $2m + 1$ Punkte bestimmt.

Sind n Punkte gegeben $(n > 2m + 1)$ und bestimmt man eine diesen Punkten möglichst gut sich anschließende Kurve C wieder durch die Bedingung

$$\begin{gathered} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \ldots + \lambda_n^2 = \text{Minimum} \quad , \\ \lambda_r \equiv a_0 + a_1 \cos x_r + \ldots + b_1 \sin x_r \ldots - y_r \quad , \end{gathered}$$

so erhält man für die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots b_1, \ldots$ die Gleichungen

$$1) \quad \begin{cases} [\cos px] a_0 + [\cos x \cos px] a_1 + [\cos 2x \cos px] a_2 + \ldots + [\cos mx \cos px] a_m \\ \qquad + [\sin x \cos px] b_1 + [\sin 2x \cos px] b_2 + \ldots + [\sin mx \cos px] b_m \\ \qquad = [y \cos px] \quad , \\ [\sin px] a_0 + [\cos x \sin px] a_1 + [\cos 2x \sin px] a_2 + \ldots + [\cos mx \sin px] a_m \\ \qquad + [\sin x \sin px] b_1 + [\sin 2x \sin px] b_2 + \ldots + [\sin mx \sin px] b_m \\ \qquad = [y \sin px] \quad , \\ \qquad p = 0, 1, 2, 3, \ldots m \quad . \end{cases}$$

Diese Gleichungen lassen in einem besondern Falle eine einfache Lösung zu. Sind nämlich die x so gewählt, daß

$$x_{r+1} = r\varphi \, , \quad \varphi = 2\pi : n \quad ,$$

so erhalten die Gleichungen Koeffizienten von der Form

$$\begin{gathered} [\cos px \cos qx] \\ = 1 + \cos p\varphi \cos q\varphi + \cos 2p\varphi \cos 2q\varphi + \ldots + \cos(n-1)p\varphi \cos(n-1)q\varphi \quad , \\ [\cos px \sin qx] \\ = \cos p\varphi \sin q\varphi + \cos 2p\varphi \sin 2q\varphi + \ldots + \cos(n-1)p\varphi \sin(n-1)q\varphi \quad , \\ [\sin px \sin qx] \\ = \sin p\varphi \sin q\varphi + \sin 2p\varphi \sin 2q\varphi + \ldots + \sin(n-1)p\varphi \sin(n-1)q\varphi \quad . \end{gathered}$$

In diesen Reihen setzen wir

$$\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]\,, \quad \sin\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]\,,$$
$$\cos\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]\quad,$$

und erhalten

$$2)\quad \begin{cases} [\cos px\cos qx] = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{0}^{n-1}\cos k(p-q)\varphi + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{0}^{n-1}\cos k(p+q)\varphi\quad, \\ [\cos px\sin qx] = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{1}^{n-1}\sin k(p+q)\varphi - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{1}^{n-1}\sin k(p-q)\varphi\quad, \\ [\sin px\sin qx] = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{0}^{n-1}\cos k(p-q)\varphi - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{0}^{n-1}\cos k(p+q)\varphi\quad. \end{cases}$$

Setzt man in

$$(1-z^n):(1-z) = 1+z+z^2+z^3+\ldots+z^{n-1}$$

für z die komplexe Zahl

$$z = \cos(p\pm q)\varphi + i\sin(p\pm q)\varphi\quad,$$

so ist, wenn die ganzen Zahlen p und q nicht gleich sind, $1-z$ von Null verschieden und $z^n = 1$: daher ist

$$1+z+z^2+\ldots+z^{n-1} = 0\quad.$$

Die Sonderung des Realen und Imaginären gibt

$$3)\qquad \sum_{0}^{n-1}\cos k(p\pm q)\varphi = 0\,,\quad \sum_{1}^{n-1}\sin k(p\pm q)\varphi = 0\quad.$$

Für den Fall $p = q$ erhält man aus 2) unter Rücksicht auf 3)

$$4)\qquad [\cos^2 px] = \tfrac{1}{2}n\,,\quad [\sin^2 px] = \tfrac{1}{2}n\quad.$$

Mit Hilfe von 2), 3), 4) ergeben die Gleichungen 1) die Auflösungen

$$a_0 = \frac{1}{n}[y]\,,\quad a_k = \frac{2}{n}[y\cos kx]\,,\quad b_k = \frac{2}{n}[y\sin kx]\ ^{*}).$$

7. Die Methode der kleinsten Quadrate (Quadratsummen), die wir in den Abschnitten Nr. 2 bis 6 angewandt haben, läßt sich auch in den Fällen Nr. 1 verwenden. Wird zu den gegebenen Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_n$ eine Zahl μ so bestimmt, daß

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2+\ldots+\lambda_n^2 = \text{Minimum}\quad,$$
$$\lambda_r = \mu - a_r\quad,$$

so folgt zur Bestimmung von μ die Gleichung

$$(\mu-a_1)+(\mu-a_2)+(\mu-a_3)+\ldots+(\mu-a_n) = 0\quad,$$

aus welcher man erhält

$$\mu = \frac{1}{n}(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)\quad.$$

---

*) Weitere Ausführungen, auch in Bezug auf Kurven von gegebenem Charakter, die zwischen gegebenen Abscissen einer gegebenen Kurve möglichst nahe liegen, sowie historische und kritische Bemerkungen über die verschiedenen Methoden, die Ausgleichungsrechnung zu begründen, findet man bei Henke, Die Methode der kleinsten Quadrate. Inauguraldissertation. Leipzig 1868, 2. Auflage, 1894.

§ 2. Beobachtungsfehler.

1. Bei keiner Messung kann man mit Sicherheit behaupten, daß das durch sie gewonnene Resultat vollkommen genau sei. Auch das sorgfältigst gearbeitete Instrument hat Fehler; auch der vortrefflichste Beobachter, dessen Sinne und Urteil aufs beste beanlagt und geschult sind, gelangt an Grenzen, an welchen sein Urteil anfängt, unsicher zu werden.

Die Fehler einer Messung teilt man ein in konstante und in zufällige Fehler. Unter konstanten Fehlern versteht man Fehler, die durch solche Abweichungen vom idealen Baue des Instruments herrühren, die während einer hinlänglich großen Zeit sich nicht merklich ändern, sowie die von der Individualität des Beobachters abhängigen Fehler, sofern sie sich immer in einem bestimmten Sinne geltend machen. Alle übrigen Fehler, die von den wechselnden äußern Umständen (Handhabung, gegenseitiger Lage der Teile des Instruments, Temperatur der Luft, Bestrahlung durch die Sonne u. s. w.) in einer Weise abhängen, daß sich die Bestimmung ihres Einflusses der Beurteilung entzieht, werden als zufällige bezeichnet.

Die konstanten Instrumentfehler, sowie die konstanten Fehler des Beobachters müssen zunächst möglichst scharf bestimmt werden; dies erfolgt durch Messungen, die genaue Prüfungen der Resultate zulassen: diese Messungen werden unter möglichst günstigen Umständen und mit der größten Sorgfalt ausgeführt, so daß man sicher sein kann, daß dabei die zufälligen Fehler auf ein Minimum herabgedrückt sind. Die zufälligen Instrumentfehler, sowie die zufälligen Fehler des Beobachters fassen wir unter der Bezeichnung zufällige Messungsfehler zusammen.

Wir nehmen in allen folgenden Betrachtungen an, daß die bestimmbaren konstanten Fehler ermittelt und die Beobachtungsresultate dementsprechend verbessert worden sind; so daß nur noch die Ausgleichung der zufälligen Messungsfehler erübrigt.

2. Hat man eine Größe direkt wiederholt gemessen, oder hat man zur Bestimmung mehrerer Unbekannten mehr Gleichungen durch Messung bestimmt, als zur Ermittlung der Unbekannten nötig sind, so werden die für eine Unbekannte direkt erhaltenen Werte, bezw. die für mehrere Unbekannte aus verschiedenen Kombinationen der Gleichungen abgeleiteten Werte zufolge der zufälligen Messungsfehler nicht vollständig übereinstimmen; es kommt nun darauf an, für die Unbekannten solche Werte zu ermitteln, die sich den Messungsresultaten möglichst gut anschließen.

Die Berechnung dieser Werte führt den Namen Ausgleichungsrechnung.

Dieselben Gründe, die uns bei den Aufgaben des vorigen Abschnitts auf die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate geführt haben, sind auch für die Ausgleichungsrechnung maßgebend*): wir stellen daher als Grundlage der Ausgleichungsrechnung den Satz auf: Die ausgeglichenen Werte der Unbekannten sind so zu wählen, daß die Summe der Quadrate der Abweichungen möglichst klein wird, wobei wir unter Abweichung den Unterschied des Wertes einer Funktion, den sie für die durch die Ausgleichung gefundenen Werte der Unbekannten annimmt, und des durch Beobachtung gefundenen Betrags der Funktion verstehen.

§ 3. Ausgleichung direkter Beobachtungen.

1. Hat man durch n direkte Messungen für dieselbe unbekannte Größe die mit den zufälligen Fehlern behafteten Bestimmungen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ erhalten. und hat man keine Veranlassung, diesen Beobachtungen ungleiche Gewichte

*) Diese Begründung der Ausgleichungsrechnung gab Henke, a. a. O.

zuzuerkennen, so ist der ausgeglichene Wert der Unbekannten (§ 1, 1)

$$x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) \quad .$$

Die Abweichungen sind

$$\lambda_1 = x - x_1 \,, \qquad \lambda_2 = x - x_2 \,, \; \ldots$$

Unter der mittleren Abweichung λ versteht man die Zahl, deren Quadrat das arithmetische Mittel der Quadrate der einzelnen Abweichungen ist. Hiernach ist

$$\lambda^2 = \frac{1}{n}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2) \quad .$$

Die mittlere Abweichung dient dazu, die Übereinstimmung der Beobachtungen $x_1, x_2, \ldots$ abzuschätzen; je kleiner λ bei verschiedenen Beobachtungsreihen für dieselbe Unbekannte sich ergibt, um so größere Übereinstimmung zeigen die Beobachtungen der betreffenden Reihe.

2. Beispiel.

Für die geographische Breite der Ofener Sternwarte fand Littrow folgende 10 Resultate*)

Nr.	x_k	λ_k	λ_k^2
1	47° 29′ 11″,5	+ 0,5	0,25
2	12″,2	− 0,2	0,04
3	12″,8	− 0,8	0,64
4	11″,2	+ 0,8	0,64
5	11″,7	+ 0,3	0,09
6	12″,3	− 0,3	0,09
7	11″,5	+ 0,5	0,25
8	11″,9	+ 0,1	0,01
9	12″,4	− 0,4	0,16
10	12″,5	− 0,5	0,25
$x =$ 47° 29′ 12″,0			

Da die x_k nur in den Sekunden-Einern abweichen, so genügt es, zur Berechnung von x die Einer und Zehntel zu addieren (die Summe beträgt 20) und den zehnten Teil der Summe zu 47° 29′ 10″ zu addieren.

Aus der letzten Spalte folgt

$$[\lambda^2] = 2{,}42 \quad .$$

Daher ist

$$\lambda = \sqrt{2{,}42 : 10} = \pm 0{,}49 \quad .$$

3. Wenn man Grund hat, einzelne Beobachtungen einer Reihe für wesentlich zuverlässiger (oder minder zuverlässig) zu halten als die andern, so drückt man diesen Unterschied dadurch aus, daß man den Beobachtungen ungleiche Gewichte beilegt.

Haben die Beobachtungen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ der Reihe nach die Gewichte $p_1, p_2, p_3, \ldots$, so ist der ausgeglichene Wert

$$x = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \cdots}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots} \quad .$$

*) Liagre, Calcul des probabilités et théorie des erreurs, Brüssel 1852. S. 204.

Die aus der Gleichung

$$\lambda^2 = \frac{p_1 \lambda_1^2 + p_2 \lambda_2^2 + p_3 \lambda_3^2 + \cdots}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots}$$

bestimmte Zahl bezeichnet man in diesem Falle als die mittlere Abweichung der Gewichtseinheit.

4. Beispiel.

Bei einem Repetitionstheodoliten ist außer dem Fernrohre auch der horizontale Teilkreis um eine vertikale Achse drehbar; man kann daher das Fernrohr für sich allein um die Vertikale drehen, während der Teilkreis feststeht, kann aber auch den Teilkreis in fester Verbindung mit dem Fernrohre drehen. Um den Winkel zwischen den Vertikalebenen zweier Objekte A und B zu bestimmen, richtet man das Fernrohr auf A und liest die Stellung des Nonius ab; dreht dann auf B, verbindet das Fernrohr mit dem Teilkreise und dreht beide zusammen zurück, bis ersteres auf A gerichtet ist u. s. f. Nachdem die Drehung des Fernrohrs von A nach B genügend oft wiederholt worden ist, liest man die Stellung des Nonius ab und addiert zur Ablesung die Anzahl ganzer Umdrehungen, die der Nonius während der Beobachtungen auf dem horizontalen Teilkreise zurückgelegt hat. Zieht man von der so gewonnenen Zahl die erste Stellung des Nonius ab und teilt den Unterschied durch die Zahl p, welche angibt, wie oft das Fernrohr von A nach B gedreht worden ist, so erhält man den gesuchten Winkel. Durch eine größere Anzahl von Repetitionen entfernt man fast ganz den Einfluß des Teilungsfehlers des Instruments, so daß nur noch der Einfluß der Visurfehler übrig bleibt: man kann einen durch p Repetitionen gemessenen Winkel als das arithmetische Mittel aus p Einzelmessungen betrachten und setzt daher das Gewicht desselben der Zahl p verhältnisgleich.

Man hat einen Winkel vierzehnmal durch Repetition gemessen und betrachtet die Repetitionszahlen p als die Gewichte der Beobachtungen; die Zahlen p, die Messungsresultate, den ausgeglichenen Wert des Winkels, die damit berechneten λ_k, λ_k^2 und $p_k \lambda_k^2$ sind in folgender Tafel zusammengestellt; die mit $p_k x_k$ überschriebene Spalte enthält der Kürze wegen nur die Sekunden von x_k mit p_k multipliziert.

Nr.	p_k	x_k	$p_k x_k$	λ_k	λ_k^2	$p_k \lambda_k^2$
1	5	17° 56′ 45″,00	225,00	− 5,22	27,248	136,24
2	4	31,25	125,00	+ 8,53	72,761	291,04
3	5	42,50	212,50	− 2,72	7,398	36,99
4	3	45,00	135,00	− 5,22	27,248	81,74
5	3	37,50	112,50	+ 2,28	5,198	15,59
6	3	38,33	115,00	+ 1,45	2,103	6,31
7	3	27,50	82,50	+ 12,28	150,798	452,39
8	3	43,33	130,00	− 3,55	12,603	37,81
9	4	40,63	162,50	− 0,85	0,723	2,89
10	2	36,25	72,50	+ 3,53	12,461	24,92
11	3	42,50	127,50	− 2,72	7,398	22,19
12	3	39,17	117,50	+ 0,61	0,372	1,12
13	2	45,00	90,00	− 5,22	27,248	54,49
14	3	40,83	122,50	− 1,05	1,103	3,31
	46		1830,00			1167,03

Die letzte Zeile enthält die Summen

$$[p]\,,\quad [px]\,,\quad (p\lambda^2]\quad .$$

Aus ihnen ergibt sich

$$x = 17^0\,56' + \frac{1830'',00}{46} = 17^0\,56'\,39'',78 \quad ,$$

$$\lambda = \pm\, 5'',037 \quad .$$

5. Man habe durch direkte Messungen und Ausgleichung für k Zahlen die ausgeglichenen Werte X_1, X_2, X_3, ... und die zugehörigen mittleren Abweichungen Λ_1, Λ_2, Λ_3, .., erhalten; setzt man eine Größe X mit Hilfe der X_1, X_2, ... und gegebener Koeffizienten a_1, a_2, ... in der Weise linear zusammen

$$X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + \dots \quad ,$$

so fragt es sich, wie groß die mittlere Abweichung Δ dieser linearen Funktion ist, wenn man unter einer einzelnen Abweichung den Unterschied der mit Hilfe der ausgeglichenen Werte hergestellten Zahl X und der mit Hilfe irgend einer Kombination der Beobachtungswerte hergestellten bezeichnet.

Ist $\lambda_{1\alpha}$, $\lambda_{2\beta}$, $\lambda_{3\gamma}$, ... eine Kombination einzelner Abweichungen der X_1, X_2, X_3, ..., so ist die dazu gehörige einzelne Abweichung der linearen Funktion

$$\Delta_{\alpha\beta\gamma\dots} = a_1\lambda_{1\alpha} + a_2\lambda_{2\beta} + a_3\lambda_{3\gamma} + \dots$$

Hieraus folgt

$$\Delta^2_{\alpha\beta\gamma\dots} = a_1^2\lambda_{1\alpha}^2 + a_2^2\lambda_{2\beta}^2 + a_3^2\lambda_{3\gamma}^2 + \dots$$
$$+ 2\,a_1 a_2 \lambda_{1\alpha}\lambda_{2\beta} + 2\,a_1 a_3 \lambda_{1\alpha}\lambda_{3\gamma} + \dots$$

Wir ersetzen hierin $\lambda_{1\alpha}$, $\lambda_{2\beta}$, ... der Reihe nach durch jede Kombination der einzelnen Abweichungen und nehmen das arithmetische Mittel aller so entstehenden Werte $\Delta^2_{\alpha\beta\gamma\dots}$.

Sind n_1, n_2, n_3, ... Beobachtungen zur Bestimmung von X_1, X_2, X_3, ... gemacht worden, so ist die Anzahl aller Kombinationen

$$m = n_1\, n_2\, n_3 \dots n_k \quad .$$

Für das arithmetische Mittel Δ^2 hat man

$$m\,\Delta^2 = a_1^2 \cdot \frac{m}{n_1}\,\Sigma\lambda_{1\alpha}^2 + a_2^2\,\frac{m}{n_2}\,\Sigma\lambda_{2\beta}^2 + \dots$$

$$+ 2\,a_1 a_2 \cdot \frac{m}{n_1 n_2}\,\Sigma\lambda_{1\alpha}\,\Sigma\lambda_{2\beta} + 2\,a_1 a_3 \cdot \frac{m}{n_1 n_3}\,\Sigma\lambda_{1\alpha}\,\Sigma\lambda_{3\gamma} + \dots$$

Aus dem Begriffe des arithmetischen Mittels folgt, daß die algebraische Summe der Abweichungen aller einzelnen Beobachtungen vom Mittel verschwindet, also ist

$$\Sigma\lambda_{1\alpha} = \Sigma\lambda_{2\beta} = \Sigma\lambda_{3\gamma} = \dots = 0 \quad .$$

Berücksichtigt man noch, daß

$$\Sigma\lambda_{1\alpha}^2 = n_1\,\Lambda_1^2\,, \qquad \Sigma\lambda_{2\alpha}^2 = n_2\,\Lambda_2^2 \dots \quad ,$$

so ergibt sich schließlich

$$\Delta^2 = a_1^2\,\Lambda_1^2 + a_2^2\,\Lambda_2^2 + a_3^2\,\Delta_3^2 + \dots$$

6. Ist X keine lineare Funktion der X_k, so kann man unter den Voraussetzungen, daß der TAYLORsche Satz auf X für die Werte der X_k, welche innerhalb der durch Beobachtung gewonnenen Zahlen liegen, anwendbar ist, und

daß man nur die erste Potenz der Abweichungen zu berücksichtigen braucht, setzen

$$\Delta_{\alpha\beta\gamma\ldots} = a_1 \lambda_{1\alpha} + a_2 \lambda_{2\beta} + a_3 \lambda_{3\gamma} + \ldots$$

wobei

$$a_i = \frac{\partial X}{\partial X_i} ,$$

wenn man in diesen Differentialquotienten für X_1, X_2, ... die ausgeglichenen Werte setzt.

7. Beispiel. Man hat in einem Dreiecke ABC die Seiten $BC = a$ und die Winkel $CBA = \beta$ und $BCA = \gamma$ bestimmt; diese Werte seien mit den mittleren Abweichungen Λ_a, Λ_β, Λ_γ behaftet. Für den dritten Winkel α, den Halbmesser r des eingeschriebenen Kreises und die beiden andern Seiten b und c hat man

$$\alpha = 180^0 - \beta - \gamma ,$$

$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha} , \quad b = 2 r \sin \beta , \quad c = 2 r \sin \gamma .$$

Die mittlere Abweichung von α ist

$$\Lambda_\alpha = \sqrt{\Lambda_\beta^2 + \Lambda_\gamma^2} .$$

Da man hat

$$\frac{\partial r}{\partial a} = \frac{1}{2 \sin \alpha} , \quad \frac{\partial r}{\partial \alpha} = - \frac{a \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} ,$$

so ist

$$\Lambda_r = \frac{1}{2 \sin^2 \alpha} \sqrt{\sin^2 \alpha \cdot \Lambda_a^2 + a^2 \cos^2 \alpha \cdot \Lambda_\alpha^2} .$$

Ferner ergeben sich

$$\Lambda_b = 2 \sqrt{\sin^2 \beta \cdot \Lambda_r^2 + r^2 \cos^2 \beta \cdot \Lambda_\beta^2} ,$$

$$\Lambda_c = 2 \sqrt{\sin^2 \gamma \cdot \Lambda_r^2 + r^2 \cos^2 \gamma \cdot \Lambda_\gamma^2} .$$

§ 4. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.

1. Für die gegebenen Koeffizienten

$$\begin{matrix} a_1 , & b_1 , & c_1 , & \ldots \\ a_2 , & b_2 , & c_2 , & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n , & b_n , & c_n , & \ldots \end{matrix}$$

habe man die Werte

$$u_1 , \quad u_2 , \quad u_3 , \quad \ldots \quad u_n$$

der linearen Funktionen

$$\begin{matrix} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n x + b_n y + c_n z + \ldots \end{matrix}$$

beobachtet; allen Beobachtungen sei dasselbe Gewicht zuerkannt. Die Anzahl der Unbekannten x, y, z, ... sei kleiner als n. Die ausgeglichenen

Werte der Unbekannten erhält man durch die Bedingung (§ 1, Nr. 4),

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \dots + \lambda_n^2 = \text{Minimum} \quad ,$$

$$\lambda_r = a_r x + b_r y + c_r z + \dots - u_r \quad ,$$

aus dem linearen Vereine

$$1) \quad \begin{cases} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + \dots = [a\,u] & , \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z + \dots = [b\,u] & , \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z + \dots = [c\,u] & , \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \end{cases}$$

Diese Gleichungen werden nach GAUSS als die Normalgleichungen bezeichnet. In der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,b] & [a\,c] & [a\,d] & \dots \\ [a\,b] & [b\,b] & [b\,c] & [b\,d] & \dots \\ [a\,c] & [b\,c] & [c\,c] & [c\,d] & \dots \\ [a\,d] & [b\,d] & [c\,d] & [d\,d] & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

haben symmetrisch zur Hauptdiagonale stehende Glieder denselben Koeffizienten. Bezeichnet man den Koeffizienten des k-ten Gliedes der i-ten Zeile mit α_{ik}, so folgen aus 1) die ausgeglichenen Werte

$$2) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{D}([a\,u]\,\alpha_{11} + [b\,u]\,\alpha_{21} + [c\,u]\,\alpha_{31} + \dots) & , \\ y = \frac{1}{D}([a\,u]\,\alpha_{12} + [b\,u]\,\alpha_{22} + [c\,u]\,\alpha_{32} + \dots) & , \\ z = \frac{1}{D}([a\,u]\,\alpha_{13} + [b\,u]\,\alpha_{23} + [c\,u]\,\alpha_{33} + \dots) & , \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \end{cases}$$

2. Mit Hilfe der soeben berechneten Werte erhält man für die Abweichung einer Beobachtung

$$\lambda_r = a_r x + b_r y + c_r z + \dots - u_r \quad .$$

Für die mittlere Abweichung hat man

$$\lambda^2 = \frac{1}{n}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \dots + \lambda_n^2) \quad .$$

Um die Schärfe der Bestimmung jeder einzelnen Unbekannten abzuschätzen, kann man an jeder Beobachtung u_r eine Verbesserung anbringen, die dem absoluten Werte nach der mittleren Abweichung λ gleich ist, und die hierzu gehörigen verbesserten $x, y, z, \dots$ nach Nr. 1, 2) berechnen. Da man keine Veranlassung hat, positive Verbesserungen vor den negativen auszuzeichnen, so wird man alle möglichen Vorzeichenkombinationen für λ wählen, und aus den sich ergebenden Verbesserungen der Unbekannten mittlere Abweichungen $\lambda_x, \lambda_y, \dots$ berechnen.

In der Gleichung

$$x = \frac{1}{D}([a\,u']\,\alpha_{11} + [b\,u']\,\alpha_{21} + \dots)$$

ist u'_r das Mittel aus $u'_r + \lambda$ und $u'_r - \lambda$; zur Bestimmung von λ_x kann man

daher die Gleichung für $\varDelta$ § 3, Nr. 5 benutzen. Setzt man in derselben

$$\varDelta_1 = \varDelta_2 = \varDelta_3 = \ldots = \lambda \quad ,$$

so erhält man

1) $$D^2 \cdot \lambda_x^2 = \lambda^2 [(a_1 \alpha_{11} + b_1 \alpha_{12} + \ldots)^2 + (a_2 \alpha_{11} + b_2 \alpha_{12} + \ldots)^2 + \ldots] \quad .$$

Setzt man

2) $$a_i \alpha_{11} + b_i \alpha_{12} + \ldots = A_i \quad ,$$

multipliziert die hieraus für $i = 1, 2, 3, \ldots$ hervorgehenden Gleichungen der Reihe nach mit $A_1, A_2, A_3, \ldots$, und addiert, so erhält man

3) $$[a A] \alpha_{11} + [b A] \alpha_{12} + \ldots = [A A] \quad .$$

Multipliziert man die Gleichungen 2) mit a_i und addiert, so entsteht

$$[a a] \alpha_{11} + [a b] \alpha_{12} + \ldots = [a A] \quad .$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist die Determinante D; daher folgt

$$[a A] = D \quad .$$

Multipliziert man dagegen 2) mit b_i, bezw. c_i, d_i, ..., so erhält man

$$[a b] \alpha_{11} + [b b] \alpha_{12} + \ldots = [b A] \quad ,$$
$$[a c] \alpha_{11} + [b c] \alpha_{12} + \ldots = [c A] \quad ,$$
$$[a d] \alpha_{11} + [b d] \alpha_{12} + \ldots = [d A] \quad ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen verschwinden identisch. Folglich ergibt sich aus 3)

$$[A A] = D \cdot \alpha_{11} \quad .$$

Daher hat man schließlich

$$\lambda_x^2 = \lambda^2 \cdot \frac{\alpha_{11}}{D} \quad ,$$

und ebenso

4) $$\begin{cases} \lambda_y^2 = \lambda^2 \cdot \dfrac{\alpha_{22}}{D} \quad , \\ \lambda_z^2 = \lambda^2 \cdot \dfrac{\alpha_{33}}{D} \quad , \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Je schärfer die Bestimmung einer Unbekannten, je kleiner also die auf sie gemäß dieser Gleichungen entfallende mittlere Abweichung ist, ein um so größeres Gewicht hat man derselben beizulegen.

Wir bezeichnen das reziproke Quadrat der mittleren Abweichung direkt als Gewicht der Unbekannten und haben daher für die Gewichte $p_x, p_y, p_z, \ldots$

5) $$p_x = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{D}{\alpha_{11}} \,, \qquad p_y = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{D}{\alpha_{22}} \,, \quad \ldots$$

6) $$p_x : p_y : p_z : \ldots = \frac{1}{\alpha_{11}} : \frac{1}{\alpha_{22}} : \frac{1}{\alpha_{33}} : \ldots$$

3. Numerische Aufstellung und Auflösung der Normalgleichungen.

Zur Berechnung der Koeffizienten der Normalgleichungen bedient man sich mit Vorteil genügend ausführlicher Quadrattafeln. Aus ihnen entnimmt man zunächst die Glieder der Summen

$$[a a] \,, \quad [b b] \,, \quad [c c] \,, \quad \ldots$$

Um auch die übrigen Summen

$$[ab]\,,\quad [ac]\,,\quad [bc]\,,\quad \ldots$$

zu erhalten, kann man von einer der Gleichungen Gebrauch machen

$$ab = \tfrac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2]\quad,$$
$$ab = \tfrac{1}{2}[(a+b)^2 - a^2 - b^2]\quad,$$
$$ab = \tfrac{1}{2}[a^2 + b^2 - (a-b)^2]\quad.$$

Wenn man die Normalgleichungen auflösen und zugleich die Gewichte der einzelnen Unbekannten bestimmen will, so wird man am zweckmäßigsten das folgende Verfahren zur Auflösung eines allgemeinen linearen Vereins einschlagen. Der Verein sei

$$\begin{aligned}
(11\cdot 1)x_1 + (12\cdot 1)x_2 + (13\cdot 1)x_3 + \ldots + (1n\cdot 1)x_n &= (1u\cdot 1)\quad,\\
(21\cdot 1)x_1 + (22\cdot 1)x_2 + (23\cdot 1)x_3 + \ldots + (2n\cdot 1)x_n &= (2u\cdot 1)\quad,\\
(31\cdot 1)x_1 + (32\cdot 1)x_2 + (33\cdot 1)x_3 + \ldots + (3n\cdot 1)x_n &= (3u\cdot 1)\quad,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\\
(n1\cdot 1)x_1 + (n2\cdot 1)x_2 + (n3\cdot 1)x_3 + \ldots + (nn\cdot 1)x_n &= (nu\cdot 1)\quad.
\end{aligned}$$

Hierin sind die Koeffizienten der Einfachheit wegen durch in Klammern geschlossene Ziffernzusammenstellungen angedeutet; $(ik\cdot 1)$ bedeutet den Koeffizienten von x_k in der i-ten Gleichung des 1. Vereins; letztere Unterscheidung ist notwendig, weil noch mehrere Vereine behufs der Auflösung des gegebenen aufgestellt werden; $(iu\cdot 1)$ bedeutet die rechte Seite der i-ten Gleichung des 1. Vereins.

Aus der Tafel

$$1)\quad \begin{cases}
(11\cdot 1) & (12\cdot 1) & (13\cdot 1) & \ldots & (1n\cdot 1) & (1u\cdot 1)\quad,\\
(21\cdot 1) & (22\cdot 1) & (23\cdot 1) & \ldots & (2n\cdot 1) & (2u\cdot 1)\quad,\\
(31\cdot 1) & (32\cdot 1) & (33\cdot 1) & \ldots & (3n\cdot 1) & (3u\cdot 1)\quad,\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
(n1\cdot 1) & (n2\cdot 1) & (n3\cdot 1) & \ldots & (nn\cdot 1) & (nu\cdot 1)
\end{cases}$$

berechnen wir eine neue Tafel,

$$2)\quad \begin{cases}
(22\cdot 2) & (23\cdot 2) & \ldots & (2n\cdot 2) & (2u\cdot 2)\quad,\\
(32\cdot 2) & (33\cdot 2) & \ldots & (3n\cdot 2) & (3u\cdot 2)\quad,\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
(n2\cdot 2) & (n3\cdot 2) & \ldots & (nn\cdot 2) & (nu\cdot 2)\quad,
\end{cases}$$

wobei

$$3)\quad \begin{cases}
(ik\cdot 2) = (ik\cdot 1) - \dfrac{(i1\cdot 1)}{(11\cdot 1)}\cdot(1k\cdot 1)\quad,\\[2ex]
(iu\cdot 2) = (iu\cdot 1) - \dfrac{(i1\cdot 1)}{(11\cdot 1)}\cdot(1u\cdot 1)\quad.
\end{cases}$$

Während wir die $(ik\cdot 2)$ vollständig berechnen, wollen wir die $(iu\cdot 2)$ als lineare Funktionen der $(iu\cdot 1)$ dargestellt lassen. Die Tafel 2) gehört zu dem Vereine, der durch Entfernung von x_1 aus der ersten Gleichung in Verbindung mit der zweiten, dritten u. s. w. hervorgeht.

In derselben Weise, wie man von 1) zu 2) übergeht, gelangt man von 2) zu einer neuen Koeffiziententafel 3), von dieser zu einer vierten Tafel u. s. w. Wie man sofort sieht, erhält man durch genügend häufige Wiederholung dieses Verfahrens schließlich die Gleichung

$$4)\qquad (nn\cdot n)\,x_n = (nu\cdot n)\quad.$$

Hierbei ist die rechte Seite eine lineare Funktion der $(iu \cdot 1)$, in welcher $(nu \cdot 1)$ den Koeffizienten 1) hat. Vergleicht man die aus 4) hervorgehende Auflösung

$$5) \qquad x_n = \frac{(nu \cdot 1) + \ldots}{(nn \cdot n)}$$

mit

$$x_n = \frac{a_{nn} \cdot (nu \cdot 1) + \ldots}{D} \quad ,$$

wobei D die Determinante des Vereins 1) und a_{nn} den Koeffizienten von $(nn \cdot 1)$ in dieser Determinante bezeichnet, so ergibt sich

$$6) \qquad (nn \cdot n) = \frac{D}{a_{nn}} \quad .$$

Dividiert man die Glieder der ersten Zeile der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} (11 \cdot 1) & (12 \cdot 1) & \ldots & (1n \cdot 1) \\ (21 \cdot 1) & (22 \cdot 1) & \ldots & (1n \cdot 1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (n1 \cdot 1) & (n2 \cdot 1) & \ldots & (nn \cdot 1) \end{vmatrix}$$

durch $(11 \cdot 1)$, multipliziert dann die Zeilen der Reihe nach mit

$$(21 \cdot 1), \quad (31 \cdot 1), \quad \ldots \quad (n1 \cdot 1)$$

und subtrahiert diese Zeilen von Produkten der Reihe nach von der 2., 3., ... n-ten Zeile, so erhält man

$$\frac{D}{(11 \cdot 1)} = \begin{vmatrix} (22 \cdot 2) & (23 \cdot 2) & \ldots & (2n \cdot 2) \\ (32 \cdot 2) & (33 \cdot 2) & \ldots & (3n \cdot 2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (n2 \cdot 2) & (n3 \cdot 2) & \ldots & (nn \cdot 2) \end{vmatrix} \quad .$$

Dividiert man hier wieder die Elemente der ersten Zeile mit dem ersten Elemente, multipliziert dann mit den Anfangselementen der 2., 3., ... Zeile und subtrahiert diese Produkte nacheinander von den Elementen der 2., 3., ... Zeile, so entsteht

$$\frac{D}{(11 \cdot 1)(22 \cdot 2)} = \begin{vmatrix} (33 \cdot 3) & (34 \cdot 3) & \ldots \\ (43 \cdot 3) & (44 \cdot 3) & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad .$$

Wenn man dieses Verfahren genügend oft wiederholt, so erhält man

$$\frac{D}{(11 \cdot 1)(22 \cdot 2)(33 \cdot 3) \ldots (n-1, n-1 \cdot n-1)} = (nn \cdot n) \quad ;$$

also ist

$$7) \qquad D = (11 \cdot 1)(22 \cdot 2)(33 \cdot 3) \ldots (nn \cdot n) \quad ,$$

und daher mit Rücksicht auf 6)

$$8) \qquad a_{nn} = (11 \cdot 1)(22 \cdot 2)(33 \cdot 3) \ldots (n-1, n-1 \cdot n-1) \quad .$$

Ohne von dem numerischen Werte der $(iu \cdot 1)$ Gebrauch zu machen, setzt man 5) in die erste Gleichung des $(n-1)$-ten Vereins; diese Gleichung enthält außer x_n noch x_{n-1}: nach der Ersetzung erhält man x_{n-1} als lineare Funktion der $(iu \cdot 1)$.

In die erste Gleichung des $(n-2)$-ten Systems setzt man nun die aufgefundenen Werte von x_n und x_{n-1} u. s. f., bis man endlich alle x als lineare Funktionen der $(iu \cdot 1)$ ausgedrückt hat.

Multipliziert man die Koeffizienten, welche $(iu \cdot 1)$ in diesen Funktionen haben, mit der unter 7) gefundenen Determinante D, so erhält man die Koeffizienten a_{ik}, welche die Elemente $(ik \cdot 1)$ in D haben.

Handelt es sich um die Auflösung von Normalgleichungen, so sind die Koeffizienten der $(iu \cdot i)$ den Gewichten p_i der Unbekannten verhältnisgleich; die in Nr. 2 definierten Gewichte werden aus den Koeffizienten der $(iu \cdot i)$ durch Division durch das Quadrat der mittleren Abweichung λ erhalten.

Setzt man schließlich für die $(iu \cdot 1)$ die Werte in die für x_k gefundenen Ausdrücke, so hat man die Auflösung des gegebenen Vereins beendet.

Kommt es nur auf diese Auflösung an, und nicht auf die Bestimmung der a_{ik}, so kann man bereits vom Beginne der Rechnung an von den numerischen Werten der $(iu \cdot 1)$ Gebrauch machen.

4. Wenn die Beobachtungen ungleiche Gewichte haben, $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$, so hat man die Summe

$$p_1 \lambda_1^2 + p_2 \lambda_2^2 + p_3 \lambda_3^2 + \cdots + p_n \lambda_n^2$$

zu einem Minimum zu machen. Aus dieser Bedingung ergeben sich die Normalgleichungen für den Fall ungleicher Gewichte zu

$$1) \quad \begin{cases} [paa]x + [pab]y + [pac]z + \ldots = [pua] \quad , \\ [pab]x + [pbb]y + [pbc]z + \ldots = [pub] \quad , \\ [pac]x + [pbc]y + [pcc]z + \ldots = [puc] \quad , \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

wobei z. B.

$$[pac] = p_1 a_1 c_1 + p_2 a_2 c_2 + p_3 a_3 c_3 + \ldots$$

Hat man diese Gleichungen nach Nr. 3 aufgelöst und mit Hilfe dieser Auflösungen die Abweichungen der einzelnen Beobachtungen bestimmt, so erhält man aus der Gleichung

$$\lambda^2 = \frac{p_1 \lambda_1^2 + p_2 \lambda_2^2 + p_3 \lambda_3^2 + \cdots}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots}$$

die mittlere Abweichung λ der Gewichtseinheit.

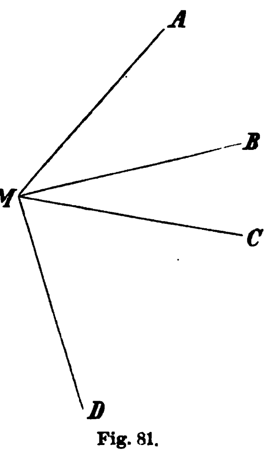


Fig. 81.

Um die mittleren Abweichungen $\lambda_x, \lambda_y, \ldots$ der ausgeglichenen Werte der Unbekannten zu erhalten, hat man den vorliegenden Fall dadurch mit dem Falle gleicher Gewichte in Übereinstimmung zu bringen, daß man annimmt, man habe anstatt lauter verschiedener Bestimmungen Gruppen von der Reihe nach $p_1, p_2, p_3, \ldots$ identischen Bestimmungen erhalten. Alsdann kann man sofort die Gleichungen Nr. 2, 4) benutzen, indem man für D die Determinante des Vereins 1) und für a_{ii} den Koeffizienten des i-ten Diagonalgliedes dieser Determinante setzt.



5. Beispiel.

Zwischen den vom Punkte M (Fig. 81) ausgehenden Strahlen MA, MB, MC, MD wurden folgende Winkel gemessen

$w_1 = A, B = 48^0\,17'\,1'',4$ mit dem Gewichte $p_1 = 30$;
$w_2 = A, C = 96\;\;52\;\;16,8$ „ „ „ $p_2 = 20$;
$w_3 = A, D = 152\;\;54\;\;6,8$ „ „ „ $p_3 = 26$;
$w_4 = B, C = 48\;\;35\;\;14,3$ „ „ „ $p_4 = 25$;
$w_5 = B, D = 104\;\;37\;\;7,8$ „ „ „ $p_5 = 28$;
$w_6 = C, D = 56\;\;1\;\;48,9$ „ „ „ $p_6 = 44$.

Werden die drei ersten Winkel mit ξ, η, ζ bezeichnet, so sind die sechs beobachteten Größen durch sechs lineare Gleichungen

$$a_k \xi + b_k \eta + c_k \zeta = w_k$$

verbunden, wobei a_k, b_k, c_k die Werte haben

1)

Nr.	1	2	3	4	5	6
a_k	1	0	0	−1	−1	0
b_k	0	1	0	1	0	−1
c_k	0	0	1	0	1	1

Nimmt man als Unbekannte die Unterschiede

$$\xi - w_1 = x\,, \qquad \eta - w_2 = y\,, \qquad \zeta - w_3 = z \quad ,$$

so erhält man Gleichungen von der Form

$$a_k x + b_k y + c_k z = u_k \quad ,$$

wobei die a_k, b_k, c_k die Werte 1) haben, während die u_k sind

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0 \quad ;$$

$$u_4 = +1{,}1\,; \qquad u_5 = -2{,}4\,; \qquad u_6 = +1{,}1 \quad .$$

Die zur Aufstellung der Normalgleichungen nötigen Zahlen sind

Nr.	a	b	c	u	paa	pab	pac	pbb	pbc	pcc	pau	pbu	pcu
1	+1	.	.	.	30	.	.	.	.	.	.	.	.
2	.	+1	.	.	.	.	.	20	.	.	.	.	.
3	.	.	+1	.	.	.	.	.	.	26	.	.	.
4	−1	+1	.	−1,1	25	−25	.	25	.	.	27,5	−27,5	.
5	−1	.	+1	+2,4	28	.	−28	.	.	28	−67,2	.	67,2
6	.	−1	+1	−1,1	.	.	.	44	−44	44	.	48,4	−48,4
				Summen	83	−25	−28	89	−44	98	−39,7	20,9	18,8

Daher sind die Normalgleichungen

$$\begin{aligned} 83\,x - 25\,y - 28\,z &= -39{,}7 \\ -25\,x + 89\,y - 44\,z &= 20{,}9 \\ -28\,x - 44\,y + 98\,z &= 18{,}8 \quad . \end{aligned}$$

Bezeichnet man die rechten Seiten mit $(1\,u \cdot 1)$, $(2\,u \cdot 1)$, $(3\,u \cdot 1)$, so erhält man durch Entfernung von x

$$\begin{aligned} 81{,}5\,y - 52{,}4\,z &= 0{,}300\,(1\,u \cdot 1) + (2\,u \cdot 1) \quad , \\ -52{,}4\,y + 88{,}6\,z &= 0{,}336\,(1\,u \cdot 1) + (3\,u \cdot 1) \quad ; \end{aligned}$$

die Entfernung von y ergibt

$$\begin{aligned} 54{,}8\,z &= 0{,}529\,(1\,u \cdot 1) + 0{,}644\,(2\,u \cdot 1) + (3\,u \cdot 1) \\ z &= 0{,}00966\,(1\,u \cdot 1) + 0{,}01175\,(2\,u \cdot 1) + 0{,}01825\,(3\,u \cdot 1) \quad . \end{aligned}$$

Hieraus folgt weiter

$$\begin{aligned} y &= 0{,}00993\,(1\,u \cdot 1) + 0{,}0199\ \ (2\,u \cdot 1) + 0{,}0118\ \ (3\,u \cdot 1) \quad , \\ x &= 0{,}0184\ \ (1\,u \cdot 1) + 0{,}00997\,(2\,u \cdot 1) + 0{,}00972\,(2\,u \cdot 1) \quad . \end{aligned}$$

Für die Gewichte hat man daher

$$p_x : p_y : p_z = \frac{1}{184} : \frac{1}{199} : \frac{1}{183}$$

sie sind also nahezu gleich. Setzt man für $(1u \cdot 1)$, $(2u \cdot 1)$, $(3u \cdot 1)$ die Werte ein, so ergibt sich

$$x = -0{,}340\ , \quad y = 0{,}244\ , \quad z = 0{,}193\ ,$$

oder, auf Hundertstelsekunden abgerundet

$$x = -0{,}34\ , \quad y = 0{,}24\ , \quad z = 0{,}19\ .$$

Die ausgeglichenen Werte der sechs Winkel sind daher

$$\begin{aligned}
A,\,B &= 48^0\,17'\,1'',06\ , \\
A,\,C &= 96\ \ 52\ \ 17{,}04\ , \\
A,\,D &= 152\ \ 54\ \ 6{,}99\ , \\
B,\,C &= 48\ \ 35\ \ 15{,}98\ , \\
B,\,D &= 104\ \ 37\ \ 5{,}93\ , \\
C,\,D &= 56\ \ 1\ \ 49{,}95\ ^{*}).
\end{aligned}$$

6. Einige Schriftsteller empfehlen zur Erleichterung der Berechnung der Koeffizienten der Normalgleichungen den gegebenen auszugleichenden Verein

$$1)\qquad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots = u_1\ , \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots = u_2\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

durch den folgenden zu ersetzen

$$2)\qquad \begin{cases} \frac{a_1}{u_1} x + \frac{b_1}{u_1} y + \frac{c_1}{u_1} z + \ldots = 1\ , \\ \frac{a_2}{u_2} x + \frac{b_2}{u_2} y + \frac{c_2}{u_2} z + \ldots = 1\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Haben die Beobachtungen die Gewichte $p_1, p_2, \ldots p_n$, so ist die Bedingung zur Bestimmung der Unbekannten aus 2)

$$p_1 \left(\frac{a_1}{u_1} x + \ldots - 1\right)^2 + p_2 \left(\frac{a_2}{u_2} x + \ldots - 1\right)^2 + \ldots = \text{Minimum.}$$

Hierfür kann man setzen

$$3)\qquad \frac{p_1}{u_1^2} \cdot (a_1 x + \ldots - u_1)^2 + \frac{p_2}{u_2^2} \cdot (a_2 x + \ldots - 1)^2 + \ldots = \text{Minimum.}$$

Die Bedingung für die Ausgleichung von 1) ist

$$4)\qquad p_1 (a_1 x + \ldots - u_1)^2 + p_2 (a_2 x + \ldots - u_2)^2 + \ldots = \text{Minimum.}$$

Vergleicht man 3) und 4), so erkennt man, daß die Ersetzung von 1) durch 2) gleichbedeutend damit ist, den Beobachtungen anstatt der gegebenen Gewichte

$$p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$$

die Gewichte zuzuschreiben

$$\frac{p_1}{u_1^2}, \quad \frac{p_2}{u_2^2}, \quad \frac{p_3}{u_3^2}, \quad \ldots \quad \frac{p_n}{u_n^2}\ .$$

---

*) MEYER, Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung, deutsch von CZUBER, Leipzig 1859, S. 305.

Hieraus folgt, daß es nicht statthaft ist, den Verein 1) durch 2) zu ersetzen; sowie, daß es überhaupt nicht statthaft ist, die durch die Beobachtungen gegebenen Gleichungen mit ungleichen Zahlen zu multiplizieren.

Wenn man indes bedenkt, daß die Bestimmung der Gewichte niemals eine scharfe ist, sondern immer nur auf mehr oder minder unsicheren Abschätzungen beruht, so kann man, wenn man im Interesse einer Abkürzung der Zahlenrechnung es für sehr wünschenswert halten sollte, die gegebenen Gleichungen 1) unbedenklich mit Zahlen multiplizieren, deren Verhältnisse nicht viel von der Einheit abweichen; insbesondere kann man 2) für 1) setzen, wenn $u_k : u_i$ für jedes k und i nahezu $= 1$ ist.

7. Wenn die Funktionen

$$\varphi_1(x, y, z, \ldots)\,, \quad \varphi_2(x, y, z, \ldots)\,, \quad \varphi_3(x, y, z, \ldots)\quad ,$$

deren Werte

$$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

man beobachtet hat, nicht linear sind, so wähle man aus den Gleichungen

$$\varphi_i(x, y, z, \ldots) = u_i$$

so viele aus, als Unbekannte vorhanden sind und löse sie auf. Es wird dabei genügen, solche Annäherungswerte für die Unbekannten zu erhalten, für welche die Abweichungen der berechneten u_i von den beobachteten nicht mehr betragen wie die bei der Ausgleichung zu erwartende Abweichung dieser Größen. Die so für x, y, z, ... gefundenen Zahlen können als die angenähert richtigen Werte gelten.

An denselben hat man geeignete Verbesserungen ξ, η, ζ, ... anzubringen, um die ausgeglichenen Lösungen x', y', z', ... zu erhalten. Unter den Voraussetzungen, daß innerhalb des Betrages dieser Verbesserungen der TAYLORsche Lehrsatz auf alle Funktionen φ anwendbar ist, und daß die ξ, η, ζ, ... so klein sind, daß man nur die erste Potenz dieser Verbesserungen zu berücksichtigen hat, ersetzt man jede Funktion φ durch

$$\varphi = \varphi(x, y, z, \ldots) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\xi + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\eta + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\zeta + \cdots$$

Hierin hat man rechts für x, y, z, ... die Annäherungswerte zu setzen.

Man erhält auf diese Weise für ξ, η, ζ, ... die linearen Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\xi + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\eta + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\zeta + \cdots = u_1 - \varphi_1\quad ,$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\xi + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\eta + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\zeta + \cdots = u_2 - \varphi_2\quad ,$$

. . . .

aus denen man zur Bestimmung der ξ, η, ζ, ... die Normalgleichungen ableitet.

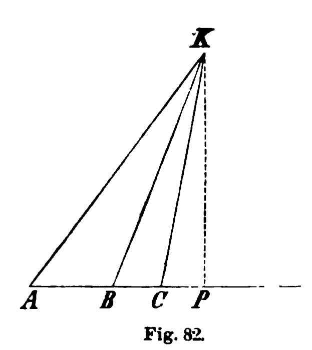


Fig. 82.

8. Beispiel.

Um die Lage des Punktes K gegen die Grundlinie AC zu bestimmen (Fig. 82), mißt man die Strecken AB und BC, sowie die Winkel PCK, PBK, PAK.

Ist

$$\operatorname{tang} PCK = u_1\,, \quad \operatorname{tang} PBK = u_2\,, \quad \operatorname{tang} PAK = u_3\quad ,$$

$$KP \perp AC\,, \quad AC = d_1\,, \quad AB = d_2\,, \quad AP = x\,, \quad PK = y\quad ,$$

so hat man zwischen den gesuchten und den beobachteten Größen die Gleichungen

$$u_1 = \frac{y}{x - d_1} \quad ,$$

$$u_2 = \frac{y}{x - d_2} \quad ,$$

$$u_3 = \frac{y}{x} \quad ,$$

also eine überzählige Gleichung.

Sind x', y' Näherungswerte der Unbekannten, so erhält man für die daran anzubringenden Verbesserungen ξ, η die Gleichungen

$$-\frac{y'}{(x'-d_1)^2}\cdot\xi + \frac{1}{x'-d_1}\cdot\eta = u_1 - \frac{y'}{x'-d_1}$$

$$-\frac{y'}{(x'-d_2)^2}\cdot\xi + \frac{1}{x'-d_1}\cdot\eta = u_2 - \frac{y'}{x'-d_2}$$

$$-\frac{y'}{x'^2}\cdot\xi + \frac{1}{x'}\cdot\eta = u_3 - \frac{y'}{x'} \quad ;$$

nachdem man alle neun Koeffizienten dieses Vereins berechnet hat, leitet man die Normalgleichungen ab.

§ 5. Ausgleichung direkter und vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen.

1. Hat man durch einfache Messung für die Winkel x, y, z eines ebenen Dreiecks die Werte ξ, η, ζ gefunden, so wird die Summe $\xi+\eta+\zeta$ nicht genau 180^0 betragen. Die Verbesserungen, welche man an den gemessenen Werten anbringen muß, um die genaue Winkelsumme herzustellen, bestimmen sich nach der Methode der kleinsten Quadrate in folgender Weise.

Sind x, y, z die verbesserten Winkel, so sind $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\zeta$ die Abweichungen. Die Summe der Quadrate derselben muß ein Minimum werden unter der Bedingung

$$f \equiv x + y + z - 180^0 = 0 \quad .$$

Daher hat man (2. Band, 4. Buch, § 14, Nr. 14) das Minimum der Funktion

$$F \equiv (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 + 2kf$$

zu bestimmen. Hierzu ergeben sich die Gleichungen

$$x - \xi + k = 0 \quad ,$$
$$y - \eta + k = 0 \quad ,$$
$$z - \zeta + k = 0 \quad ,$$
$$x + y + z = 180^0 \quad .$$

Subtrahiert man die letzte von der Summe der andern, so folgt

$$k = \tfrac{1}{3}(\xi + \eta + \zeta - 180^0) \quad .$$

Hieraus folgen die gesuchten Winkel

$$1) \quad \begin{cases} x = \xi - \tfrac{1}{3}(\xi+\eta+\zeta-180^0) \quad , \\ y = \eta - \tfrac{1}{3}(\xi+\eta+\zeta-180^0) \quad , \\ z = \zeta - \tfrac{1}{3}(\xi+\eta+\zeta-180^0) \quad . \end{cases}$$

Der Überschuß der gemessenen Winkelsumme über der theoretischen ist daher in drei gleiche Teile zu teilen und jeder der gemessenen Winkel um diesen Teil zu vermindern.

Kleinere Dreiecke auf der Erdoberfläche kann man als ebene und ihre Winkelsumme daher als nicht verschieden von 180⁰ betrachten. Bei größern Dreiecken, wie sie bei Landesvermessungen vorkommen, bestimmt man den sphärischen Exzeß ε in Sekunden mit hinlänglicher Genauigkeit, indem man den Flächeninhalt Δ nach den Formeln für ebene Dreiecke ermittelt, und alsdann von der Formel Gebrauch macht

$$\varepsilon = \frac{F}{R^2} \cdot 206\,265 \quad .$$

Hierin ist R der Halbmesser der Kugel, für mittlere geographische Breiten und für Meter ist daher

$$\log R = 0{,}804\,84 \quad .$$

Bei der Ausgleichung der Winkel eines sphärischen Dreiecks hat man in 1) statt 180^0 zu setzen $180^0 + \varepsilon$.

2. Hat man für jeden der Winkel eines ebenen Dreiecks n Messungen

$$\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n ; \quad \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots \mathfrak{y}_n ; \quad \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}_n$$

gemacht, die gleiches Gewicht haben, so werden die ausgeglichenen Winkel aus den Bedingungen erhalten

$$\sum_1^m [(x - \mathfrak{x}_i)^2 + (y - \mathfrak{y}_i)^2 + (z - \mathfrak{z}_i)^2] + 2\,k\,(x + y + z - 180^0) = \text{Minimum.}$$

Hieraus folgen die Gleichungen

$$x - \xi + \frac{1}{n}\,k = 0 \quad ,$$

$$y - \eta + \frac{1}{n}\,k = 0 \quad ,$$

$$z - \zeta + \frac{1}{n}\,k = 0 \quad ,$$

$$x + y + z = 180^0 \quad ,$$

wobei mit ξ, η, ζ die arithmetischen Mittel der für x, y, z beobachteten Winkel bezeichnet worden sind. Man erhält dieselben Lösungen, wie aus 1), wenn in 1) k durch $k : n$ ersetzt wird.

3. Hat man für x, y, z der Reihe nach m, n, r Beobachtungen gemacht, alle von demselben Gewichte, so erhält man zur Bestimmung der ausgeglichenen Werte die Bedingung

$$\sum_1^m (x - \mathfrak{x}_i)^2 + \sum_1^n (y - \mathfrak{y}_i)^2 + \sum_1^r (z - \mathfrak{z}_i)^2 + 2\,k(x + y + z - 180^0) = \text{Minimum.}$$

Bezeichnet man wieder mit ξ, η, ζ die arithmetischen Mittel der für x, y, z durch Messung gefundenen Winkel und mit $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{r}$ die Reziproken von m, n, r so folgen zur Bestimmung der ausgeglichenen Werte die Gleichungen

$$x - \xi + \mathfrak{m}\,k = 0 \quad ,$$

$$y - \eta + \mathfrak{n}\,k = 0 \quad ,$$

$$z - \zeta + \mathfrak{r}\,k = 0 \quad ,$$

$$x + y + z = 180^0 \quad .$$

Aus denselben erhält man, wenn man

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{n} + \mathfrak{r} = \mathfrak{s} \quad \text{und} \quad \xi + \eta + \zeta - 180^0 = d$$

setzt, die Lösungen

$$x = \xi - \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{s}} \cdot d , \quad y = \eta - \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{s}} \cdot d ,$$

$$z = \zeta - \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{s}} \cdot d .$$

4. Sind x, y, z Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, so ist

$$1) \qquad x^2 - y^2 - z^2 = 0 .$$

Die arithmetischen Mittel ξ, η, ζ kann man als Annäherungen betrachten, so daß man nur die erste Potenz der Verbesserungen zu beachten braucht; für dieselben folgt aus 1)

$$2\,\xi\lambda - 2\,\eta\mu - 2\,\zeta\nu = -\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 .$$

Die Unbekannten λ, μ, ν bestimmen sich aus der Bedingung

$$\sum_1^m (\xi + \lambda - \mathfrak{x}_i)^2 + \sum_1^n (\eta + \mu - \mathfrak{y}_i)^2 + \sum_1^r (\zeta + \nu - \mathfrak{z}_i)^2$$
$$+ 2\,k(2\,\xi\lambda - 2\,\eta\mu - 2\,\zeta\nu + \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2) = \text{Minimum.}$$

Man erhält die Gleichungen

$$\lambda + 2\,\mathfrak{m} \cdot k\xi = 0 ,$$
$$\mu - 2\,\mathfrak{n} \cdot k\eta = 0 ,$$
$$\nu - 2\,\mathfrak{r} \cdot k\zeta = 0 ,$$
$$2\,\xi\lambda - 2\,\eta\mu - 2\,\zeta\nu = -\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 .$$

Hieraus folgt

$$4\,k(\mathfrak{m}\,\xi^2 + \mathfrak{n}\,\eta^2 + \mathfrak{r}\,\zeta^2) = \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2 .$$

Setzt man

$$\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2 = 2\,d , \qquad \mathfrak{m}\,\xi^2 + \mathfrak{n}\,\eta^2 + \mathfrak{r}\,\zeta^2 = \mathfrak{s} ,$$

so ergeben sich die ausgeglichenen Werte

$$x = \xi + \lambda = \xi\left(1 - \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{s}}\,d\right) ,$$

$$y = \eta + \mu = \eta\left(1 + \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{s}}\,d\right) ,$$

$$z = \zeta + \nu = \zeta\left(1 + \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{s}}\,d\right) .$$

5. Nach diesen Beispielen wenden wir uns zu einem allgemeineren Falle. Sind für die Unbekannten x_1, x_2, x_3 durch direkte Beobachtung die Werte $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ mit den Gewichten p_1, p_2, p_3, ... gefunden worden und werden die x durch q lineare Bedingungen verbunden

$$1) \qquad \begin{cases} f_1 \equiv a_{11}\,x_1 + a_{21}\,x_2 + a_{31}\,x_3 + \ldots - b_1 = 0 , \\ f_2 \equiv a_{12}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{32}\,x_3 + \ldots - b_2 = 0 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

so hat man zur Bestimmung der Unbekannten

$$p_1\,(x_1 - \xi_1)^2 + p_2\,(x_2 - \xi_2)^2 + \ldots + 2\,k_1 f_1 + 2\,k_2 f_2 + \ldots = \text{Minimum} .$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen

$$2)\quad \begin{cases} p_1 x_1 - p_1 \xi_1 + [k a_1] = 0 \quad , \\ p_2 x_2 - p_2 \xi_2 + [k a_2] = 0 \quad , \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

Die unbekannten Größen k_1, k_2, ... bezeichnet man nach GAUSS als Korrelaten.

Aus 2) berechnet man die Größen x_1, x_2, ... und setzt sie in 1) ein. Dadurch erhält man q lineare Gleichungen zur Bestimmung der Korrelaten. Nach Auflösung dieses Vereins erhält man aus 2) die Unbekannten.

6. Sind einige unter den Bedingungsgleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$, ... nicht linear, so betrachtet man die beobachteten Werte der Unbekannten als Annäherungen und bestimmt deren Verbesserungen; unter der Voraussetzung, daß nur erste Potenzen der Verbesserungen zu berücksichtigen sind und daß innerhalb der Werte der Verbesserungen die Funktionen und ihre ersten Differentialquotienten endlich und stetig sind, ersetzt man φ durch

$$\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \lambda_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \lambda_2 + \ldots = 0 \quad ,$$

worin die Unbekannten x_1, x_2, ... durch die beobachteten Werte zu ersetzen sind. Hierdurch kommt man auf den Fall linearer Bedingungsgleichungen zurück (vgl. das Beispiel in Nr. 4).

7. Beispiel.

A) Zur Bestimmung der Fläche eines Dreiecks hat man dessen Seiten x', y', z', sowie die zugehörigen Höhen u', v', w' gemessen, und die Werte erhalten

$$x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ w \quad .$$

Die zu bestimmenden Größen sind durch die beiden Gleichungen verbunden

$$1)\quad \begin{cases} x'u' - y'v' = 0 \quad , \\ x'u' - z'w' = 0 \quad , \end{cases}$$

Bezeichnet man die an x, y, ... anzubringenden Verbesserungen mit

$$\mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{z},\ \mathfrak{u},\ \mathfrak{v},\ \mathfrak{w} \quad ,$$

so hat man die aus 1) folgenden Gleichungen

$$2)\quad \begin{cases} f \equiv u\mathfrak{x} + x\mathfrak{u} - v\mathfrak{y} - y\mathfrak{v} + xu - yv = 0 \quad , \\ \varphi \equiv u\mathfrak{x} + x\mathfrak{u} - w\mathfrak{z} - z\mathfrak{w} + xu - zw = 0 \quad . \end{cases}$$

Zur Bestimmung der Verbesserungen, sowie der Korrelaten k_1 und k_2, folgen aus der Bedingung

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 + \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2 + 2k_1 f + 2k_2 \varphi = \text{Minimum}$$

die Gleichungen

$$3)\quad \begin{cases} \mathfrak{x} + u(k_1 + k_2) = 0 \quad , \\ \mathfrak{y} - v k_1 = 0 \quad , \\ \mathfrak{z} - w k_2 = 0 \quad , \\ \mathfrak{u} + x(k_1 + k_2) = 0 \quad , \\ \mathfrak{v} - y k_1 = 0 \quad , \\ \mathfrak{w} - z k_2 = 0 \end{cases}$$

Die aus diesen Gleichungen folgenden Werte von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ setzt man in 2) ein; dadurch erhält man

$$(u^2 + x^2 + v^2 + y^2)\,k_1 + (u^2 + x^2)\,k_2 = x\,u - y\,v \quad ,$$
$$(u^2 + x^2)\,k_1 + (u^2 + x^2 + w^2 + z^2)\,k_2 = x\,u - z\,w \quad .$$

Hieraus berechnet man die Korrelaten k_1, k_2; setzt man die gefundenen Werte in 3) ein, so erhält man $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$.

Mit Hilfe derselben ergeben sich die ausgeglichenen Werte

$$x' = x + \mathfrak{x}\,, \quad y' = y + \mathfrak{y}\,, \quad z' = z + \mathfrak{z} \quad ,$$
$$u' = u + \mathfrak{u}\,, \quad v' = v + \mathfrak{v}\,, \quad w' = w + \mathfrak{w} \quad .$$

Die aus ihnen berechneten Produkte

$$x'u', \quad y'v', \quad z'w'$$

stimmen bis auf Größen erster Ordnung überein.

B) In einem Dreiecke hat man für die Seiten x', y', z' und die gegenüberliegenden Winkel u', v', w' durch direkte Beobachtungen von gleichem Gewichte die Größen x, y, z, u, v, w gefunden.

Zwischen den zu bestimmenden Größen bestehen die Gleichungen

$$4) \quad \begin{cases} u' + v' + w' - 180^0 = 0 \quad , \\ x' \cos v' + y' \cos u' - z' = 0 \quad , \\ x' \cos w' + z' \cos u' - y' = 0 \quad , \end{cases}$$

von denen nur die erste linear ist. Bezeichnet man die an den beobachteten Größen anzubringenden Verbesserungen der Reihe nach wieder mit

$$\mathfrak{x}, \ \mathfrak{y}, \ \mathfrak{z}, \ \mathfrak{u}, \ \mathfrak{w}, \ \mathfrak{v} \quad ,$$

und setzt

$$u + v + w - 180^0 = a \quad ,$$
$$x \cos v + y \cos u - z = b \quad ,$$
$$x \cos w + z \cos u - y = c \quad ,$$

so erhält man für die Verbesserungen die Bedingungsgleichungen

$$5) \quad \begin{cases} f \equiv \mathfrak{u} + \mathfrak{v} + \mathfrak{w} + a = 0 \quad , \\ \varphi \equiv \cos v \cdot \mathfrak{x} - x \sin v \cdot \mathfrak{v} + \cos u \cdot \mathfrak{y} - y \sin u \cdot \mathfrak{u} - \mathfrak{z} + b = 0 \quad , \\ \psi \equiv \cos w \cdot \mathfrak{x} - x \sin w \cdot \mathfrak{w} + \cos u \cdot \mathfrak{z} - z \sin u \cdot \mathfrak{u} - \mathfrak{y} + c = 0 \quad . \end{cases}$$

Aus der Bedingung

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 + \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2 + 2\,k_1 f + 2\,k_2\,\varphi + 2\,k_3\,\psi = \text{Minimum}$$

folgen die Gleichungen

$$6) \quad \begin{cases} \mathfrak{x} + k_2 \cos v + k_3 \cos w = 0 \quad , \\ \mathfrak{y} + k_2 \cos u - k_3 = 0 \quad , \\ \mathfrak{z} - k_2 + k_3 \cos u = 0 \quad , \\ \mathfrak{u} + k_1 - k_2 \cdot y \sin u - k_3 \cdot z \sin u = 0 \quad , \\ \mathfrak{v} + k_1 - k_2 \cdot x \sin v = 0 \quad , \\ \mathfrak{w} + k_1 - k_3 \cdot x \sin w = 0 \quad . \end{cases}$$

Setzt man die aus 6) folgenden Werte der Verbesserungen in 5) ein, so ergeben sich drei lineare Gleichungen für die Korrelaten k_1, k_2, k_3 und nach Auflösung derselben aus 6) die Unbekannten.

8. Hat man zur Bestimmung der Unbekannten

$$x, y, z, \ldots$$

die Werte

$$u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$$

der Funktionen

$$\varphi_1(x, y, z, \ldots) \quad ,$$
$$\varphi_2(x, y, z, \ldots) \quad ,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\varphi_n(x, y, z, \ldots)$$

beobachtet, und bestehen zwischen den u die Bedingungsgleichungen

$$f(u_1, u_2, u_3, \ldots) = 0 \quad ,$$
$$g(u_1, u_2, u_3, \ldots) = 0 \quad ,$$
$$h(u_1, u_2, u_3, \ldots) = 0 \quad ,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

so hat man zunächst die Beobachtungen der u nach dem bisher Mitgeteilten auszugleichen und mit Benutzung dieser ausgeglichenen Werte das in § 4 angegebene Verfahren einzuhalten.

9. Sind zur Bestimmung der Unbekannten

$$x, y, z, \ldots$$

die Werte

$$u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$$

der linearen Funktionen

$$1) \qquad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n x + b_n y + c_n z + \ldots \end{cases}$$

beobachtet worden, haben diese Beobachtungen die Gewichte

$$p_1, p_2, p_3, \ldots p_n \quad ,$$

und bestehen zwischen den Unbekannten die linearen Gleichungen

$$2) \qquad \begin{cases} f_1 \equiv \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \ldots = 0 \quad , \\ f_2 \equiv \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \ldots = 0 \quad , \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

so haben die Unbekannten die Werte, für die

$$3) \qquad \begin{cases} p_1 \lambda_1^2 + p_2 \lambda_2^2 + p_3 \lambda_3^2 + \ldots + 2 k_1 f_1 + 2 k_2 f_2 + \ldots = \text{Minimum} \quad , \\ \lambda_r = a_r x + b_r y + \ldots - u_r \quad . \end{cases}$$

Aus 3) folgen für $x, y, z, \ldots$ und für die unbekannten Korrelaten die Gleichungen

$$[p a a] x + [p a b] y + [p a c] z + \ldots + [\alpha k] = [p u a] \quad ,$$
$$[p a b] x + [p b b] y + [p b c] z + \ldots + [\beta k] = [p u b] \quad ,$$
$$[p a c] x + [p b c] y + [p c c] z + \ldots + [\gamma k] = [p u c] \quad ,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Die Anzahl dieser Gleichungen ist gleich der Anzahl der Unbekannten $x, y, z, \ldots$; im Verein mit den Bedingungsgleichungen, deren Anzahl mit der der Korrelaten $k_1, k_2, \ldots$ übereinstimmt, genügen sie zur Ermittlung aller darin vorkommenden unbekannten Größen.

10. Sind einige der Funktionen $u_1, u_2, u_3, \ldots f_1, f_2, \ldots$ nicht linear, so wählt man aus den Beobachtungen und den Bedingungsgleichungen so viele aus, als Unbekannte $x, y, z, \ldots$ zu bestimmen sind. Man wird dabei darauf achten, daß die Bestimmung der Unbekannten möglichst geringe Schwierigkeiten macht. Man berechnet nun $x, y, z, \ldots$ aus den ausgewählten Gleichungen durch ein geeignetes Annäherungsverfahren bis zu einem genügenden Genauigkeitsgrade, und ersetzt dann mit Hilfe des TAYLORschen Satzes die durch Beobachtung gefundenen Gleichungen sowie die Bedingungsgleichungen durch lineare Gleichungen für die an den berechneten Näherungswerten anzubringenden Verbesserungen.

---

11. Die in den vorstehenden Abschnitten mitgeteilte Darstellung der Grundlinien der Ausgleichungsrechnung weicht von der üblichen Darstellungsweise insofern ab, als die meisten Schriftsteller nach GAUSS und LAPLACE die Ausgleichungsrechnung mit Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen verbinden.

Statt der von uns zugrunde gelegten Forderung: Die Unbekannten so zu bestimmen, daß mit den Beobachtungen eine möglichst gute Übereinstimmung erzielt und die Ausgleichung lediglich durch Auflösung linearer Gleichungen bewirkt wird, — geht man alsdann von der Forderung aus: Die **wahrscheinlichsten** Werte der Unbekannten zu bestimmen. Um derselben zu genügen, muß man wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, bei einer Beobachtung einen Fehler von gegebener Größe zu machen, oder wenigstens, wie sich die Wahrscheinlichkeiten gegebener Fehler zueinander verhalten.

Eine aus allgemeinen Betrachtungen fließende, von nicht zu bestreitenden und auf alle vorkommenden Fälle passenden Voraussetzungen ausgehende Erledigung dieser Frage ist bis jetzt nicht gegeben worden und wird wohl nicht möglich sein; die wertvolle Arbeit HAGENS*) geht von Voraussetzungen über die Zusammensetzung von Fehlern aus unzählig vielen unbemerkbar kleinen Fehlern aus, die kaum jemals genau und in sehr vielen Fällen nicht einmal angenähert zutreffen.

Den entgegengesetzten Weg hat GAUSS, der Erfinder der Methode der kleinsten Quadrate**) eingeschlagen, GAUSS geht von der Annahme aus, daß bei direkten Beobachtungen von gleicher Genauigkeit das arithmetische Mittel unbestreitbar der wahrscheinlichste Wert der Unbekannten sei: er zeigt, daß diese Annahme genügt, um das Gesetz der Fehlerwahrscheinlichkeit zu bestimmen, und findet für die Wahrscheinlichkeit $w\,dx$, einen Fehler vom Betrage x zu begehen, den Ausdruck

$$w\,dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 x^2}\,dx \quad ,$$

wobei h eine von den besondern Verhältnissen der Beobachtung abhängige, von x aber unabhängige Zahl bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit $W dx_1\,dx_2\,dx_3 \ldots$ daß bei einer Reihe von Beobachtungen die Fehler $x_1, x_2, x_3, \ldots$ zusammentreffen, ist das Produkt der für das Eintreffen von $x_1, x_2, x_3, \ldots$ einzeln geltenden Wahrscheinlichkeiten, also ist

$$W dx_1\,dx_2\,dx_3 \ldots = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots)}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 \ldots$$

W wird ein Minimum, wenn

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots = \text{Minimum}.$$

*) HAGEN, Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1837.
**) GAUSS, Theorie motus corporum coelestium, Hamburg 1809.

Hiergegen kann eingewendet werden, daß man von alters her zwar das arithmetische Mittel an die Stelle gleich guter voneinander abweichender Messungen derselben Größe gesetzt hat, gewiß aber ohne je dabei daran zu denken, daß man dadurch einen wahrscheinlichsten Wert gewinnen wollte, sondern wegen der Einfachheit der Rechnung. Man hat daher kein Recht, von der unbestrittenen Anwendung des arithmetischen Mittels aus einen Schluß auf das Gesetz der Fehlerwahrscheinlichkeit zu machen.

Zur Bestimmung der Fehlerwahrscheinlichkeit w hat man auch folgenden Weg eingeschlagen.

Unter allen Fehlern ist gewiß der Fehler $x = 0$ der wahrscheinlichste, die Funktion w hat daher für $x = 0$ ein Maximum.

Man darf ferner annehmen, daß entgegengesetzt gleiche Fehler gleich wahrscheinlich sind; hieraus folgt, daß w eine gerade Funktion ist. Für Fehler, die verhältnismäßig sehr klein sind, ist die Wahrscheinlichkeit nahezu $= 1$. Von einer gewissen, von den Besonderheiten jeder Beobachtungsreihe abhängigen Größe x an nimmt die Wahrscheinlichkeit rasch ab und verschwindet für Fehler, die eine gewisse Grenze überschreiten.

Die Wahrscheinlichkeit, irgend einen Fehler zu begehen, ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} w\,dx \quad ;$$

da es nun gewiß ist, irgend einen Fehler (0 mit eingerechnet) zu machen, so folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} w\,dx = 1 \quad .$$

Diese Bedingungen genügen noch nicht, um die unbekannte Funktion w vollständig zu definieren. Da man mehr Eigenschaften nicht anzugeben vermag, so ergreift man das Auskunftsmittel, für w unter den bekannten Funktionen, welche den Bedingungen genügen, die einfachste auszuwählen. Als solche empfiehlt sich

$$w = A\,e^{-h^2 x^2} \quad ;$$

sie hat für $x = 0$ das Maximum $w = A$; sie ist eine gerade Funktion; die Kurve, deren Abscissen und Ordinaten x und w sind, hat die Wendepunkte

$$x = \pm \frac{h}{\sqrt{2}}, \quad w = \frac{A}{\sqrt{e}} \quad ,$$

und nähert sich von da an asymptotisch sehr rasch der Abscissenachse. Aus der Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} A\,e^{-h^2 x^2}\,dx = 1$$

folgt

$$A = 1 : \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 x^2}\,dx \quad .$$

Da nun*)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h} \quad ,$$

---

*) Zur Bestimmung des Integrals

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

bildet man nach CAUCHY

$$U = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \quad .$$

so ergibt sich

$$w = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \quad .$$

Diese induktive Methode zur Bestimmung von w verdient vor jeder andern jedenfalls den Vorzug; die Willkür, welche bei der Bestimmung von w waltet, tritt bei derselben ganz unverhüllt hervor.

Gegen alle Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen in der Ausgleichungsrechnung ist der Einwand zu erheben, daß es sich bei fast allen Fällen der Ausgleichungsrechnung nur um eine verhältnismäßig kleine Anzahl von Beobachtungen handelt, und daß es bedenklich ist, auf eine Gruppe von wenig Fällen Folgerungen aus den für große Zahlen geltenden Sätzen anzuwenden.

Die Ausführung der Integrationen ergibt

$$V = J^2 \quad .$$

Führt man Polarkoordinaten ein, so erhält man

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot r \, d\varphi \, dr \quad .$$

Da nun

$$\int e^{-r^2} \cdot r \, dr = -\tfrac{1}{2} e^{-r^2} + \text{Konst.} \quad ,$$

so ist

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot r \, dr = \tfrac{1}{2} \quad ,$$

und daher

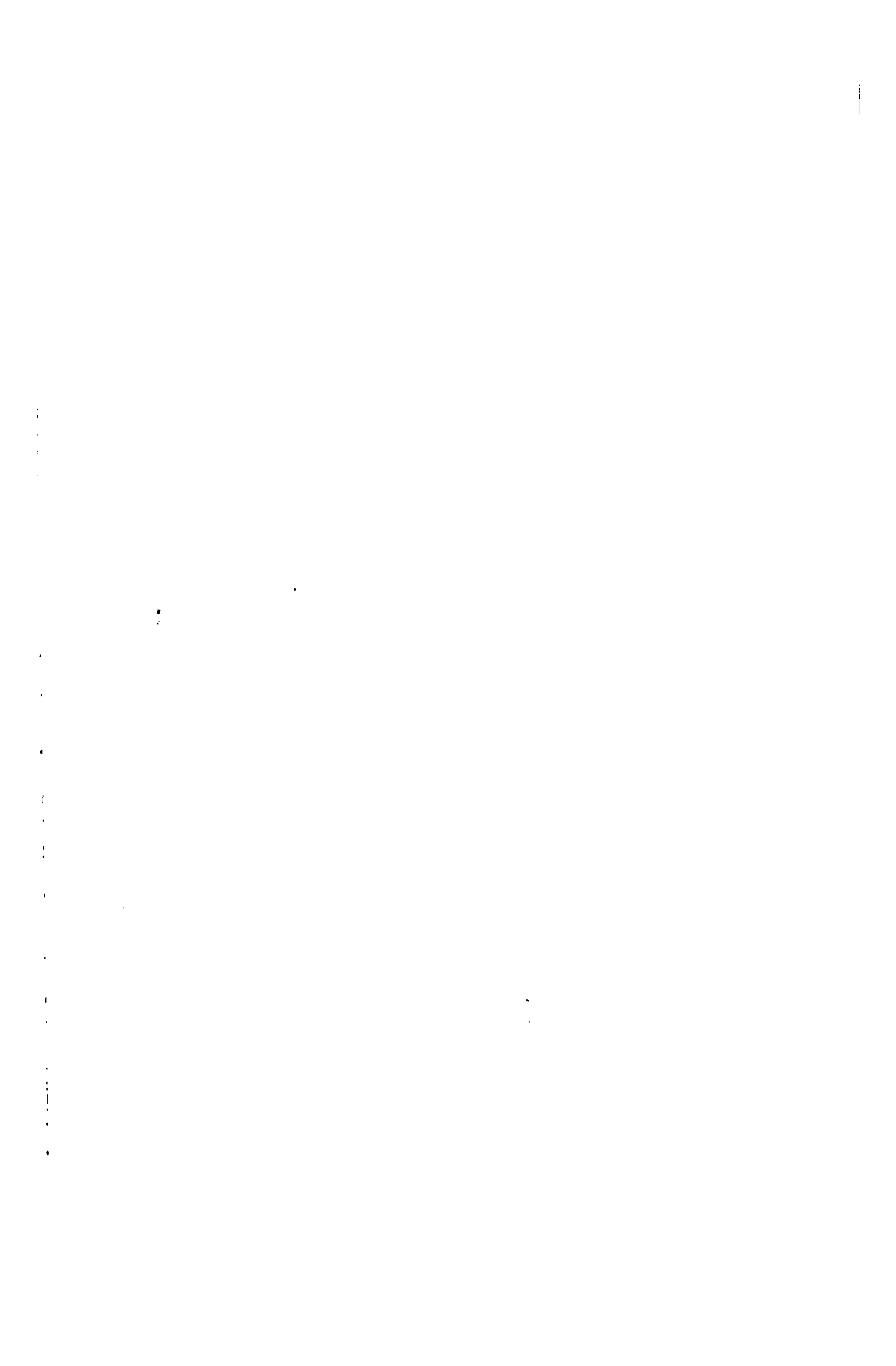
$$V = \frac{\pi}{4} \quad .$$

Hieraus folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = 2 J = \sqrt{\pi} \quad .$$

Ersetzt man x durch hx, so ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h} \quad .$$



Fünftes Buch.

Mathematische Grundlagen des Versicherungswesens

bearbeitet von

Dr. Richard Heger,
a. o. Honorarprofessor an der Kgl. Sächs. Techn. Hochschule
und Gymnasialoberlehrer in Dresden.

Mathematische Grundlagen des Versicherungswesens.

§ 1. Absterbeordnung.

1. Unter allen unserer Beobachtung zugänglichen Ereignissen sehen wir mit Recht diejenigen als von einer unübersehbaren größten Mannigfaltigkeit von Ursachen bedingt an, die das Schicksal der Menschen ausmachen, insbesondere die, welche vom menschlichen Willen direkt abhängen. Wir begeben uns daher jedes Urteils über unser eigenes Schicksal und über die Zukunft unserer Mitmenschen, und suchen das aus diesem Verzicht fließende peinvolle Gefühl der Unsicherheit zu überwinden.

Wenn nun auch die Zukunft des Einzelnen sich unserem Urteile entzieht, so hat sich doch ergeben, daß bei hinlänglich großen Bevölkerungsgruppen in mehrfachen Beziehungen Regelmäßigkeiten vorhanden sind, die in Bezug auf die ganze Gruppe einen ziemlich sichern Schluß in die nächste, ja selbst in die fernere Zukunft gestatten.

Bei einer einzelnen Familie ist z. B. die Anzahl der Todesfälle innerhalb bestimmter Zeitabschnitte scheinbar ganz regellos; bei einer Gemeinde von einigen Tausend Einwohnern ist diese Zahl schon von Jahr zu Jahr nahezu dieselbe, so daß gewisse, von dieser Zahl abhängende Einrichtungen mit Sicherheit vorher getroffen werden können; in einer größern Stadt von mehr als hunderttausend Einwohnern ist bereits die Zahl der wöchentlichen Todesfälle nahezu konstant, oder doch insofern gleichmäßig, daß auf dieselben Kalenderwochen mehrerer aufeinander folgender Jahre dieselbe Anzahl von Sterbefällen kommt. Bei größern Bevölkerungsgruppen (Provinzen, Reichen), zeigen sich nicht bloß die Todesfälle selbst ihrer Zahl nach unveränderlich, sondern es sind auch die verschiedenen häufiger vorkommenden Todesursachen immer in nahezu demselben Verhältnisse an den Todesfällen beteiligt; ebenso bleibt bei der Zahl der jährlichen Todesfälle der Prozentsatz derer, die ein bestimmtes Alter erreicht haben, wesentlich unverändert.

Auch bei den Ereignissen, die direkt vom Willen abhängig sind, zeigt sich eine unverkennbare Gleichmäßigkeit. So kamen im Königreiche Preußen*) in den Jahren 1821 bis 1875 jährlich auf das Tausend der Bevölkerung durchschnittlich 17,79 Eheschließungen; von dieser Durchschnittszahl weichen die fünfzigjährigen Durchschnitte nur um ungefähr ± 1 ab; die größte Ziffer (1871 bis 1875) beträgt 18,06, die kleinste (1851 bis 1855) 16,75.

Auf 100 000 zu Anfang eines Jahres Lebende kamen in Preußen im Laufe des nächsten Jahres in dem Zeitraume 1851 bis 1870 durchschnittlich 5 Personen durch Selbstmord um; die Durchschnittsziffer wird in 10 Jahren dieses Zeitraums erreicht; in 8 Jahren beträgt sie 4, in den beiden letzten 6. Vom Jahre 1830 bis 1853 war diese Ziffer unverändert in jedem Jahre 4**).

---

*) Preußische Statistik. (Amtliches Quellenwerk.) Herausgegeben in zwanglosen Heften vom Kgl. statistischen Bureau in Berlin. XLVIII. A. 1879. S. 135.

**) Preußische Statistik. XLVIII. A. Tabelle XLVIII.

Nach QUETELETS mustergültigen Untersuchungen wurden in Frankreich von einer Million Bewohnern im Zeitraume 1826 bis 1830 jährlich durchschnittlich 135 wegen begangener Verbrechen verurteilt, 1831 bis 1835 130, 1836 bis 1840 150, 1841 bis 1845 140, so daß selbst in diesen von Zufällen ganz besonders abhängigen Ereignissen eine auffällige Gleichmäßigkeit sich ausspricht.

Seit der Erkenntnis der Gleichmäßigkeit solcher Ereignisse ist erst eine wissenschaftliche Statistik möglich, ist dieselbe zugleich eine unentbehrliche Grundlage für jede auf das Ganze einer Bevölkerungsgruppe gerichtete Tätigkeit geworden.

2. Die statistischen Erhebungen haben insbesondere gezeigt, daß das Verhältnis der Anzahl derer, die das k-te Lebensjahr erreichen, zu der Anzahl derer, die im Laufe des k-ten Lebensjahres sterben, im wesentlichen nur von der Zahl k abhängt. Man hat diese Verhältnisse durch mehrere in weit auseinander liegenden Zeiten angestellte Zählungen bestimmt und nur geringe Änderungen gefunden. Man hat daher das Recht, auf eine Reihe von Jahren hin für alle auf die Lebensdauer bezüglichen Rechnungen diese Verhältniszahlen als nur von k abhängige, übrigens aber konstante Zahlen anzusehen.

Auf Grund dieser Wahrnehmung hat man Absterbeordnungen aufgestellt, welche angeben, wie viele von einer gewissen Anzahl Geborener das 1., 2., 3., . . . Lebensjahr erfüllen.

Eine Zusammenstellung der meisten versicherungstechnisch wichtigen Absterbeordnungen findet man in NEUMANNS Jahrbuch für das deutsche Versicherungswesen*). Sie entstammen verschiedenen Erfahrungsgebieten und zeigen daher nicht unerhebliche Abweichungen. Die Absterbeordnung, die der am Ende dieses Buches befindlichen Haupttafel zugrunde liegt, ist von G. ZEUNER aus den Ergebnissen von Volkszählungen im Königreich Sachsen abgeleitet worden**).

Mitteilung von versicherungstechnisch wichtigen Zahlen findet man auch in KARUPS Handbuch der Lebensversicherung***), neben reichhaltigen geschichtlichen Angaben und Formeln.

3. Bezeichnet a_x die in der Tafel enthaltene Anzahl der Personen, die das x-te Lebensjahr erfüllen, so werden von a_x $x$jährigen Personen a_y y Jahre alt oder älter. Daher ist die Wahrscheinlichkeit w, daß eine $x$jährige Person das y-te Lebensjahr erfüllt,

$$w = \frac{a_y}{a_x} .$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß sie vor Erfüllung des y-ten Jahres stirbt, ist

$$1 - w = \frac{a_x - a_y}{a_x} .$$

Von a_y Personen, die das Ende des y-ten Lebensjahres erreichen, sterben $a_y - a_z$ vor Erfüllung des z-ten Jahres, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine $x$jährige Person das y-te Lebensjahr erfüllt, aber vor Erfüllung des z-ten stirbt, ist daher

$$w = \frac{a_y - a_z}{a_x} .$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zwei Personen P und Q, die heute x und y Jahre alt sind, noch wenigstens p Jahre lang leben, ist das Produkt, die Wahr-

*) J. NEUMANN, Jahrbuch für das deutsche Versicherungswesen, 1903, Lebens-, Renten- und Unfall-Versicherung. Berlin, MITTLER & SOHN.

**) G. ZEUNER, Absterbeordnung für die Gesamtbevölkerung Sachsens. Zeitschrift des Kgl. Sächs. Stat. Bureaus, 1894.

***) KARUP, Handbuch der Lebensversicherung. 2. Ausgabe, Leipzig 1885.

scheinlichkeit dafür, daß P in p Jahren noch lebt, mit der, daß Q noch lebt, also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$w_1 = \frac{a_{x+p}}{a_x} \cdot \frac{a_{y+p}}{a_y} \quad .$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß P noch lebt, Q aber verstorben ist, ist

$$w_2 = \frac{a_{x+p}}{a_x}\left(1 - \frac{a_{y+p}}{a_y}\right) \quad .$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beide verstorben sind, ist

$$w_3 = \left(1 - \frac{a_{x+p}}{a_x}\right)\left(1 - \frac{a_{y+p}}{a_x}\right) \quad .$$

4. Halbiert man die Anzahl a_x der das x-te Jahr vollendenden Personen und sucht das Lebensalter ξ auf, welches von $\frac{1}{2} a_x$ Personen erreicht wird, so ist die Wahrscheinlichkeit einer $x$jährigen Person, das ξ-te Lebensjahr zu vollenden, gleich $1:2$; man bezeichnet daher ξ als die wahrscheinliche Lebensdauer einer gegenwärtig x Jahre alten Person.

So ist z. B. nach der 1. Tafel

$$a_{35} = 51907 \ , \qquad \tfrac{1}{2} a_{35} = 25954 \quad .$$

Die letztere Zahl liegt zwischen den beiden zu 66 und 67 Jahren gehörigen

$$a_{66} = 26204, \qquad a_{67} = 24815 \quad .$$

Man denkt sich nun die bei den a_{66} Personen im Laufe des 67. Lebensjahres eintretenden Todesfälle auf das Jahr gleichmäßig verteilt; unter dieser Voraussetzung würden

$$a_{66} - \tfrac{1}{2} a_{35} = 26204 - 25954 = 250$$

Personen vom 67. Lebensjahre noch den Bruchteil

$$\frac{a_{66} - \frac{1}{2} a_{35}}{a_{66} - a_{67}} = \frac{250}{1389} = 0{,}19$$

verleben; daher ist die wahrscheinliche Lebensdauer einer 35jährigen Person

$$66{,}19 \quad .$$

5. Zum Zwecke einer vereinfachten Berechnung der Tafeln für Rentenversicherungen wurde bereits im Jahre 1724 von Moivre der Versuch gemacht, eine Formel aufzustellen, welche die Zahlen a_x als Funktion des Lebensalters angibt; gestützt auf die älteste von Halley 1693 entworfene Sterblichkeitstafel schlug Moivre die Formel vor

$$a_x = 86 - x \quad ,$$

durch welche die Zahl derer angegeben werden sollte, welche von 86 gleichzeitig Geborenen das x-te Lebensjahr erfüllen.

Weder dieser Versuch noch eine größere Anzahl nachfolgende Versuche können als gelungen bezeichnet werden.

Von einer berechtigten theoretischen Grundlage ausgehend, kam Gompertz zu einer Formel, die zwar die Tabellen noch nicht genügend deckte; es gelang aber im Anschlusse an Gompertz' Grundgedanken Makeham und Lazarus, das Gompertzsche Gesetz so zu ergänzen, daß die Sterblichkeitstafeln mit für versicherungstechnische Rechnungen meist genügender Genauigkeit dadurch dargestellt werden.

6. Nach GOMPERTZ*) denkt man sich den Widerstand einer großen Anzahl gleichaltriger menschlicher Organismen gegen die Zerstörung mit der Zeit dergestalt abnehmend, daß er im Verlaufe jedes verschwindend kleinen Zeitelementes sich auf denselben Bruchteil des ursprünglichen Betrages vermindert. Setzt man den anfänglichen Betrag dieses Widerstandes w, und nimmt an, daß derselbe bis zum Ende des ersten Zeitelementes auf $pw (p < 1)$ herabgesunken ist, so ist er am Ende des 2., 3., 4., ... m-ten Zeitelementes

$$wp\,, \quad wp^2\,, \quad wp^3\,, \quad \ldots \quad wp^m \quad .$$

Nimmt man an, daß eine Zeiteinheit (Jahr) n Elemente enthalte, und daß am Ende eines Jahres der Widerstand den Betrag

$$wp_1$$

habe, so ist

$$p_1 = p^n \quad ,$$

und nach x Jahren ist der Widerstand

$$wp_1^x \quad .$$

Das Reziproke der Widerstandskraft bezeichnet GOMPERTZ als Todeskraft, und nimmt an, daß die Anzahl derer von a_x $x$jährigen Personen, die im nächsten Zeitelemente dx sterben, durch das Produkt von dx mit a_x und der Todeskraft gewonnen werde, also den Betrag habe

$$\frac{a_x}{wp_1^x}\, dx \quad .$$

Ersetzt man hier $1 : w$ und $1 : p_1$ bezw. durch b und q, so erhält man

$$a_x \cdot b\, q^x\, dx \quad .$$

Diese Anzahl ist aber auch, wenn man die Sterblichkeitsliste für verschwindend kleine Intervalle dargestellt denkt, entgegengesetzt gleich dem Differentiale da_x. Daher hat man die Differentialgleichung

$$da_x = - a_x \cdot b\, q^x\, dx \quad .$$

Aus derselben ergibt sich sofort

$$l a_x = -\frac{b}{lq} \cdot q^x + \text{Konst.}$$

und daher

$$1) \qquad a_x = c \cdot K^{q^x} \quad ,$$

wenn man zur Abkürzung setzt

$$K = e^{-\frac{b}{lq}} \quad .$$

Bei geeigneter Wahl der Konstanten c, K und q verträgt sich das GOMPERTZsche Gesetz (1) mit einigen Absterbeordnungen recht gut innerhalb der Jahre 20 bis 60, ergibt aber stärkere Abweichungen für die Sterblichkeit im frühern und im spätern Alter.

7. Um diese Abweichungen zu beseitigen, nahm MAKEHAM neben der von GOMPERTZ eingeführten vom Alter abhängigen Todeskraft noch eine während des ganzen allmählichen Absterbens der Gruppe von gleichaltrigen Personen beständig wirkende an.

---

*) GOMPERTZ, On the nature of the function expressive of the law of human mortality and a new method of determining the value of life contingencies. Philos. Transact. 1825.

Wird dieselbe mit β bezeichnet, so ergibt sich

$$-da_x = a_x\left(\beta + \frac{b}{lq}q^x\right)dx \quad ,$$

und hieraus folgt

$$a_x = c \cdot K^{q^x} h^x \quad ,$$

wenn man $e^{-\beta}$ durch h ersetzt. Dieses Gesetz ist als das GOMPERTZ-MAKEHAMsche Sterblichkeitsgesetz bekannt.

Um auch für das Kindesalter genügende Übereinstimmung zwischen dem Gesetze und den statistischen Ergebnissen zu erzielen, ergriff LAZARUS (1867) das Auskunftsmittel, zu der veränderlichen Todeskraft

$$u\beta + a q^x$$

noch andre mit abweichenden Dignanden zu nehmen, so daß die Todeskraft dargestellt wird durch die Summe

$$\beta + b_1 q^x + b_2 q_1^x + b_3 q_2^x + \dots$$

Es erwies sich als vollkommen genügend, diese Reihe auf die ersten drei Glieder zu beschränken. Wie man sieht, ergibt sich hieraus, wenn man $e^{-\frac{b_2}{lq_1}}$ mit H bezeichnet*)

$$a_x = c \cdot h^x K^{q^x} H^{q_1^x} \quad .$$

8. Um eine Absterbeordnung dem GOMPERTZ-MAKEHAMschen Gesetze anzupassen, bestimmt man aus einigen Werten von a_x die dazu gehörigen Konstanten q, K, h und c. Aus den Gleichungen

$$c\,h^x K^{q^x} = a_x\,, \quad c\,h^{x+y} K^{q^{x+y}} = a_{x+y}\,, \quad c\,h^{x+2y} K^{q^{x+2y}} = a_{x+2y}$$

erhält man

$$\frac{K^{q^x} \cdot K^{q^{x+2y}}}{K^{2q^{x+y}}} = \frac{a_x\, a_{x+2y}}{a_{x+y}^2} \quad .$$

Bezeichnet man die rechte Seite mit $v_{x,y}$, so ergibt sich hieraus

$$(q^{x+2y} - 2\,q^{x+y} + q^x)\log K = \log v_{x,y} \quad ,$$

oder besser

$$1) \qquad q^x(q^y - 1)^2 \cdot \log K = \log v_{x,y} \quad .$$

Ebenso erhält man, wenn man x durch ein beliebiges andres Alter z ersetzt,

$$2) \qquad q^z(q^y - 1)^2 \cdot \log K = \log v_{z,y} \quad .$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$3) \qquad q^{z-x} \frac{\log v_{z,y}}{\log v_{x,y}} \quad .$$

Diese Gleichung liefert q, und aus 1) oder 2) ergibt sich dazu K. Um h zu erhalten, bildet man

$$\frac{K^{q^z}}{K^{q^x}} \cdot h^{z-x} = \frac{a_z}{a_x} \quad ,$$

woraus folgt

$$h^{z-x} = \frac{a_z}{a_x} \cdot \frac{K^{q^x}}{K^{q^z}} \quad .$$

*) AMTHOR, Das GOMPERTZ-MAKEHAMsche Sterblichkeitsgesetz und seine Anwendung bei der Lebensversicherungs- und Rentenrechnung. Festschrift, Herrn Oberbürgermeister PFOTENHAUER u. s. w. gewidmet vom Lehrerkollegium der Kreuzschule. Dresden, 1874, S. 20.

Schließlich folgt noch c aus

$$c = \frac{a_x}{K^{q^x} \cdot h^x} \quad .$$

Da man vier Unbekannte zu bestimmen hat, muß man mit vier Lebensaltern auskommen, während hier sechs im allgemeinen verschiedene verwendet worden sind, nämlich x, $x+y$, $x+2y$, z, $z+y$, $z+2y$. Daß man aber mit vier bereits auskommt, erkennt man sofort, wenn man $z = x + y$ wählt; denn dann handelt es sich bloß noch um die vier Alter

$$x\,, \quad x+y, \quad x+2y\,, \quad x+3y \quad .$$

Es ist rätlich, mit mehreren Sätzen von möglichst weit auseinander liegenden Altern die Bestimmung zu wiederholen, und etwa die Alter zu benutzen

1. Bestimmung:	20,	35,	50,	65	;
2. Bestimmung:	25,	40,	55,	70	;
3. Bestimmung:	30,	45,	60,	75	;
4. Bestimmung:	20,	40,	60,	80	.

Aus den gefundenen Zahlen nimmt man das Mittel und legt diese Mittelwerte $c_0\, h_0\, K_0\, q_0$ als Annäherungen der Ausgleichungsrechnung zugrunde.

Man hat nun zunächst die Differentialquotienten von a_x nach den Größen c, h, K und q aufzustellen.

$$4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial a_x}{\partial c} = K^{q^x} h^x\,, \quad \dfrac{\partial a_x}{\partial h} = c\,x\,K^{q^x} h^{x-1}\,, \\[2ex] \dfrac{\partial a_x}{\partial K} = c\,q^x \cdot K^{q^x - 1} h^x\,, \quad \dfrac{\partial a_x}{\partial q} = c\,x\,l K \cdot K^{q^x} h^x \cdot q^{x-1} \quad . \end{cases}$$

Hiernach ist, wenn die ausgeglichenen Werte mit $c_0 + \mathfrak{c}$, $h_0 + \mathfrak{h}$, $K_0 + \mathfrak{K}$, $q_0 + \mathfrak{q}$ bezeichnet und nur die ersten Potenzen der Verbesserungen $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{q}$ beachtet werden, die Summe möglichst klein zu machen

$$5)\quad \begin{cases} \sum\limits^{x} \Big(K_0^{q_0^x} h_0^x \cdot \mathfrak{c} + c_0\, x\, K_0^{q_0^x} h_0^{x-1} \cdot \mathfrak{h} + c_0\, q_0^x\, K_0^{q_0^x - 1} h_0^x \cdot \mathfrak{K} \\ \qquad + c_0\, x\, l K_0 \cdot K_0^{q_0^x} h_0^x\, q_0^{x-1} \cdot \mathfrak{q} + c_0\, K_0^{q_0^x} h_0^x - a_x\Big)^2 \quad . \end{cases}$$

§ 2. Reinbeiträge für einfache Versicherungen von Leibrenten.

1. Unter Reinbeiträgen (Nettoprämien) versteht man Beiträge, bei deren Berechnung keine Rücksicht auf Banksicherheit, Verwaltungskosten und Bankgewinn genommen, sondern die Rechnung so geführt wird, daß die Leistungen der Versicherten an die Bank den Gegenleistungen der Bank an die Versicherten genau gleich sind. Dabei wird die versicherungstechnische Hauptvoraussetzung gemacht, daß eine große Zahl gleichaltriger Personen, für die die Absterbeordnung gilt, ein und denselben Vertrag abschließen, durch den sie zu gleichen Leistungen verpflichtet und zu gleichen Ansprüchen an die Bank berechtigt werden.

Um die Leistungen der Versicherten und die Gegenleistungen der Bank einander gleich setzen zu können, müssen sie alle auf denselben Zeitpunkt übertragen werden; da es für das Ergebnis ganz gleich ist, auf welchen Zeitpunkt übertragen wird, so wählen wir als den rechnerisch bequemsten den Lebensnullpunkt der Gruppe.

2. Zeitwert einer sofort beginnenden jährlich bis zum Tode zahlbaren Leibrente von der Höhe 1, berechnet für den Anfangstag.

Wenn a_x Personen vom Alter x eine sofort beginnende lebenslängliche Rente von jährlich einer Mark zugesichert erhalten, so hat die Bank zu zahlen am Anfange

des 1. Versicherungsjahres a_x Mark,

des 2. Versicherungsjahres a_{x+1} Mark,

des 3. Versicherungsjahres a_{x+2} Mark

u. s. w.

Ist p der bei den Rechnungen anzuwendende Zinsfuß, und setzt man zur Abkürzung

$$1{,}0p^{-1} = r \quad ,$$

so werden diese Zahlungen auf den Nullpunkt übertragen, indem man sie der Reihe nach mit r^x, r^{x+1}, r^{x+2}, ... multipliziert; die auf den Nullpunkt übertragene Gesamtleistung der Bank ist daher

$$1) \qquad a_x r^x + a_{x+1} r^{x+1} + a_{x+2} r^{x+2} + \ldots$$

Die Summe ist bis ans Ende der Absterbeordnung, d. i. so lange fortzusetzen, bis alle a_x Personen gestorben sind.

Die Zahlen $a_x r^x$, a_{x+1}, r^{x+1}, ..., die hier zum ersten Male auftreten, sind für alle Versicherungsrechnungen von großer Bedeutung; sie müssen daher für alle Lebensalter x mit genügender Genauigkeit (fünfstellig) berechnet werden. Ebenso wichtig, wie die einzelnen Zahlen, sind die Summen 1). Wir führen die Bezeichnungen ein

$$2) \qquad \begin{cases} l_x = a_x r^x \quad , \\ L_x = a_x r^x + a_{x+1} r^{x+1} + a_{x+2} r^{x+2} + \ldots \end{cases}$$

Bezeichnet man mit R_x den Zeitwert der sofort beginnenden lebenslänglichen jährlichen Rente 1 für den Tag der Auszahlung der ersten Rente (d. i. für den Anfang des Versicherungsvertrages), so haben a_x solcher Renten für den Lebensnullpunkt den Zeitwert $R_x \cdot a_x r^x$ oder $R_x l_x$.

Man hat daher die Gleichung

$$3) \qquad R_x l_x = L_x \quad ,$$

woraus folgt

$$4) \qquad R_x = \frac{L_x}{l_x} \quad .$$

Dies ist der sofort zu zahlende Reinbeitrag, durch den ein a_x-jährige Person eine sofort beginnende lebenslängliche jährliche Rente von 1 Mark erwirbt.

3. Bei praktischer Ausführung von Versicherungsrechnungen hat man zunächst die am häufigsten vorkommenden, den Rechnungen zugrunde liegenden Zahlen herzustellen und in einer Haupttafel zu vereinigen. Wir geben einige Winke zur zweckmäßigen Herstellung dieser Rechnungen und setzen dabei die Verwendung von Logarithmen voraus; für die hier zu erzielende Genauigkeit genügen in der Regel 5 Stellen, nur solche Logarithmen, die mit großen Faktoren multipliziert werden, müssen auf 6 oder 7 Stellen genau bekannt sein. Zum Rechnen verwendet man wagerecht und senkrecht liniertes (Kästchen-) Papier, das Feld etwa zu 5 mm Weite, und schreibt in jedes Feld nur eine Ziffer. Gleichbedeutende Zahlen wird man in senkrechten Streifen (Spalten) anordnen; die fortschreitenden Rechnungen ordnen sich dann in wagerechten Zeilen. Dies ist zwar für den Anfänger nicht sofort bequem, man befreundet sich aber sehr bald damit. Die

Anordnung der Haupttafel sieht man an der am Schlusse mitgeteilten. Nachdem die Spalten 1, 2 eingetragen sind, wird 3 aus 2 berechnet, dann 4 und 5; durch Umfalten der Tafel längs einer Spaltgrenze kann man 2 und 3 dicht neben 4 und 5 legen, falls 3 oder 4 beim Aufschlagen der Logarithmen stören sollte; dasselbe erreicht man durch dünne Pappspäne, mit denen man die schon ausgefüllten Zwischenspalten zudeckt, während man sie nicht braucht; z. B. wird 4 zugedeckt, wenn man 5 aus 3 ableitet. Um 5 und 6 herzustellen, klebt man zwei Streifen Kästchenpapier zu einem doppeltlangen Streifen zusammen, und trägt zwei Spalten ein, x und $\log r^x$, diese 7stellig; man schreibt $\log r$ neben $x = 1$, und dasselbe auf einen kurzen Schiebezettel. Hält man diesen schräg aufwärts über $\log r$, so kann man beide addieren und füllt $\log r^2$ (neben $x = 2$) aus; dann rückt man den Schiebzettel eine Zeile abwärts und addiert wieder u. s. w. Die Zahlen $\log r^{10}$, $\log r^{20}$, ... geben ausreichende Prüfungen für die Richtigkeit. Man stellt nun einen andern langen Streifen her und schreibt darauf dasselbe, kürzt aber $\log r^x$ auf 5 Stellen ab. Diesen Streifen legt man vor 3, und findet durch Zusammenzählen je zweier nebeneinander stehenden Zahlen $\log r^x + \log a_x = \log a_x r^x = \log l_x$ (5). Zur Herstellung von 6 unterlasse man nicht, den Streifen mit $\log r^x$ um eine Zeile heraufzurücken! Hierauf sucht man zu 5 und 6 die Nummern auf (7 und 8). Zur Berechnung der Summen 9 berechne man auf besondern Streifen die Summen von l_0 bis l_4, l_5 bis l_9, l_{10} bis l_{14} u. s. w. Dann berechnet man von l_{100} an durch allmähliches Zusammenrechnen $L_{99} = l_{99} + l_{100}$, $L_{98} = l_{98} + L_{99}$, $L_{97} = l_{97} + L_{98}$ u. s. w. Die Ergebnisse trägt man zunächst mit Blei ein, und überzeugt sich von der Übereinstimmung des so berechneten L_{95} mit der durch unmittelbares Zusammenrechnen der Zahlen l_{95} bis l_{100} erhaltenen Summe; dann werden die Zahlen 9 mit Tinte eingetragen. Hierauf wird stufenweise bis L_{90} weiter gerechnet, dieses L_{90} mit $(l_{90} + l_{91} + \ldots + l_{94}) + L_{95}$ verglichen u. s. w. Das Entsprechende gilt für 10*).

4. Aufgeschobene jährliche Leibrente. Soll die Rente 1 nicht sofort, sondern erst dann gezahlt werden, wenn der Versicherte das Alter y erreicht hat, so ist, wenn der Rentenzeitwert beim Beginne des Vertrags mit ${}^yR_x$ bezeichnet wird, für den Lebensnullpunkt die Leistung der Versicherten

$$ {}^yR_x\, a_x r^x = {}^yR_x\, l_x $$

und die Leistung der Bank

$$ a_y r^y + a_{y+1} r^{y+1} + \ldots = L_y \quad ; $$

daher hat man

$$ 1) \qquad {}^yR_x = \frac{L_y}{l_x} \quad . $$

Insbesondere hat man für eine ein Jahr nach Abschluß der Versicherung beginnende, d. i. um 1 Jahr aufgeschobene Leibrente

$$ {}^{x+1}R_x = \frac{L_{x+1}}{l_x} = \frac{L_x - l_x}{l_x} = R_x - 1 \quad . $$

Hierbei wird vorausgesetzt, daß die erste, wie jede fernere Rentenzahlung nur an die Versicherten geleistet wird, die den Fälligkeitstag der Rente erleben. Ist dagegen der Vertrag so abgeschlossen, daß die Rente nachschüssig, d. i. am Ende jedes Versicherungsjahres für alle die Versicherten gezahlt wird, die am Anfange dieses Jahres gelebt haben, so hat man, wenn $\underline{R}$ den Wert dieser nachschüssigen Rente, R den der entsprechenden vorschüssigen (am Anfange des Versicherungsjahres zahlbaren) bezeichnet,

$$ 2) \qquad \underline{R}_x = R_x \cdot r \quad . $$

*) Das Werk Morgenbesser, die mathematischen Grundlagen des gesamten Versicherungswesens, Leipzig 1882, enthält viele Tafeln, die aber nur mit Vorsicht benutzt werden dürfen, da sie nicht frei von Rechenfehlern sind. In dem Exemplare der Bibliothek der Königl. Sächs. Hochschule zu Dresden sind einige angezeichnet.

Beispiel. Wie groß ist der einmalige Reinbeitrag B_{30}, durch den eine 30jährige Person eine bei Erreichung des 45. Lebensjahres zum ersten Male zahlbare lebenslängliche jährliche Rente von 1500 Mark erwirbt?

$$B_{30} = {}^{45}R_{30} \cdot 1500 = \frac{L_{45}}{l_{30}} \cdot 1500$$

$\log L_{45}$	5,17295
log 1500	3,17609
log Prod.	8,34904
$\log l_{30}$	4,28657
$\log B_{30}$	4,06247
B_{30}	11547

5. Abgebrochene Leibrente. Die Rente 1 kommt von Erreichung des Lebensalters z an in Wegfall, wird also zum letzten Male an die Versicherten bezahlt, die das Alter $z - 1$ erreichen.

Wir setzen hier, wie fernerhin, immer vorschüssig gezahlte Renten voraus: sie können, wenn nötig, durch Anwendung der Formel Nr. 4, 2) in nachschüssige umgerechnet werden.

Bezeichnet man für die sofort beginnende vom Alter z an wegfallende Leibrente den Zeitwert beim Abschlusse des Vertrags mit R_x^z, so sind am Nullpunkte die Leistungen der Versicherten

$$R_x^z \cdot a_x r^x = R_x^z l_x \quad ,$$

und die Leistungen der Bank

$$a_x r^x + a_{x+1} r^{x+1} + \ldots + a_{z-1} r^{z-1} = L_x - L_z \quad .$$

Daher hat man

$$R_x^z \cdot l_x = L_x - L_z$$

$$1) \qquad R_x^z = \frac{L_x - L_z}{l_x} = R_x - {}^zR_x \quad .$$

Bei einer bis zum Alter y aufgeschobenen, vom Alter z an wegfallenden Leibrente erhält man den Zeitwert ${}^yR_x^z$ für den Abschluß der Versicherung aus der Gleichung

$${}^yR_x^z l_x = L_y - L_z \quad ,$$

$$2) \qquad {}^yR_x^z = \frac{L_y - L_z}{l_x} = {}^yR_x - {}^zR_x \quad .$$

Beispiel. Durch welchen einmaligen Reinbeitrag B_x erwirbt man mit 34 Jahren eine mit 50 Jahren zum ersten Male fällige, mit dem 75. Jahre aufhörende Leibrente von 2300 Mark?

$$B_{34} = \frac{L_{50} - L_{75}}{l_{34}} \cdot 2300$$

L_{50}	104196
L_{75}	5076
$L_{50} - L_{75}$	99120
$\log(L_{50} - L_{75})$	4,99616
log 2300	3,36173
log Prod.	8,35789
$\log l_{34}$	4,21136
$\log B_{34}$	4,14653
B_{34}	14013

6. Erwerbung einer aufgeschobenen lebenslänglichen oder abgebrochenen Leibrente durch jährliche gleiche Beiträge, zahlbar während eines Teils oder der ganzen Aufschubzeit. Soll die Beitragsfreiheit mit dem Lebensalter u eintreten, wobei also

$$x < u < y < z \quad ,$$

und wird der jährliche Beitrag mit b_x bezeichnet, so sind, auf den Nullpunkt übertragen, die Leistungen der Versicherten

$$b_x(a_x r^x + a_{x+1} r^{x+1} + \ldots + a_{u-1} r^{u-1}) = b_x(L_x - L_u) \quad ;$$

die Leistungen der Bank sind dieselben, wie in Nr. 4. Man hat daher für eine lebenslängliche aufgeschobene jährliche Leibrente 1

$$b_x = \frac{L_y}{L_x - L_u} \quad ;$$

für eine abgebrochene jährliche Leibrente 1

$$b_x = \frac{L_y - L_z}{L_x - L_u} \quad .$$

Beispiel. Durch welchen jährlichen Reinbeitrag β erwirbt eine 39jährige Person eine mit dem 60. Lebensjahre beginnende jährliche Rente von 3400 Mark, wenn mit dem 50. Jahre Beitragsfreiheit eintreten soll?

$$\beta = \frac{L_{60}}{L_{39} - L_{50}} \cdot 3400$$

L_{39}	218639
L_{50}	104196
$L_{39} - L_{50}$	114443
$\log L_{60}$	4,63815
$\log 3400$	3,53148
log Prod.	8,16963
$\log (L_{39} - L_{50})$	5,05859
$\log \beta$	3,11104
β	1291,3

7. Werden die Renten nicht in jährlichen Abständen gezahlt, sondern jährlich n gleiche Teilzahlungen in Abständen von $\frac{1}{n}$ Jahr geleistet, die erste wieder am Anfange des 1. Versicherungsjahres, wird ferner auch jede Teilzahlung nur den Versicherten ausgezahlt, die den Tag der Fälligkeit erleben, so muß man eine brauchbare Annahme über das Absterben während eines Versicherungsjahres machen. Nun lehrt zwar die Erfahrung, daß die Sterblichkeit innerhalb eines Kalenderjahres nicht ganz gleichmäßig ist, sondern in bestimmter Weise von den Jahreszeiten abhängt; da aber der Anfang des Versicherungsjahres auf jeden Kalendertag fallen kann, so gleichen sich die von dem Wechsel der Jahreszeiten herrührenden Schwankungen der Sterblichkeit aus, und man kann ohne Bedenken annehmen, daß das Absterben während jedes Versicherungsjahres gleichmäßig erfolgt.

Während des $(x + 1)$-ten Lebensjahres sterben im ganzen

$$a_x - a_{x+1}$$

Personen; bei gleichmäßiger Verteilung der Sterbefälle kommen also auf $\frac{k}{n}$ Jahr

$$\frac{k}{n}(a_x - a_{x+1}) \quad ,$$

das Lebensalter $x + \frac{k}{n}$ erreichen daher

$$a_x - \frac{k}{n}(a_x - a_{x+1}) = \frac{1}{n}[(n-k)\,a_x + k\,a_{x+1}] \quad .$$

Wir nehmen an, daß $\frac{1}{n}$ Mark Rente gezahlt werden, und übertragen die in einem Versicherungsjahre fälligen Zahlungen auf den Anfang des Jahres, wobei wir einfache Zinsen, nicht Zinseszins anwenden, da wir an der Voraussetzung festhalten, daß Kapitalbildung nur von Jahr zu Jahr stattfinden soll. Wird

$$q = \frac{p}{100\,n}$$

gesetzt, so wächst 1 Mark in $\frac{k}{n}$ Jahren auf den Betrag $1 + kq$ an, der Vorwert c' von c Mark, die in $\frac{k}{n}$ Jahren zahlbar sind, beträgt daher

$$c' = \frac{c}{1 + kq} \quad .$$

Die während des 1. Versicherungsjahres fälligen Teilrenten haben daher am Anfange dieses Jahres den Zeitwert

$$\varrho_x = \sum_0^{n-1}{}^k \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{1+kq}[(n-k)\,a_x + k\,a_{x+1}]$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_0^{n-1}{}^k \frac{n-k}{1+kq} \cdot a_x + \frac{1}{n^2}\sum_0^{n-1}{}^k \frac{k}{1+kq} \cdot a_{x+1} \quad ;$$

setzt man abkürzend

$$\sigma_n = \frac{1}{r\,n^2}\sum_0^{n-1}{}^k \frac{k}{1+kq}\,, \qquad \sigma'_n = \frac{1}{n^2}\sum_0^{n-1}{}^k \frac{n-k}{1+kq} \quad ,$$

so nimmt ϱ_x die Form an

$$\varrho_x = \sigma'_n \cdot a_x + r\,\sigma_n \cdot a_{x+1} \quad .$$

Auf den Nullpunkt übertragen, ergibt dies

$$\varrho_x\, r^x = \sigma'_n \cdot l_x + \sigma_n\, l_{x+1} \quad .$$

Die Summe aller auf den Nullpunkt übertragenen Renten ist daher

$$\varrho_x\, r^x + \varrho_{x+1}\, r^{x+1} + \ldots = \sigma'_n\, L_x + \sigma_n\, L_{x+1} \quad .$$

Wird der Rentenwert für eine Person am Anfange des 1. Versicherungsjahres mit ${}_{n}R_x$ bezeichnet, so hat man daher

$${}_{n}R_x\, l_x = \sigma'_n\, L_x + \sigma_n\, L_{x+1} = (\sigma'_n + \sigma_n)\, L_x - \sigma_n\, l_x$$

$${}_{n}R_x = (\sigma'_n + \sigma_n)\, R_x - \sigma_n \quad .$$

Nun ist

$$\sigma'_n + \sigma_n = \frac{1}{n^2}\sum_0^{n-1}{}^k \left(\frac{n-k}{1+kq} + \frac{k}{1+kq\;1{,}0p}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_0^{n-1}{}^k \frac{n - k + k(1 + nq)}{1+kq} = \frac{1}{n^2}\sum_0^{n-1}{}^k n = 1 \quad ,$$

folglich ergibt sich

$$1)\qquad {}_{\frac{n}{n}}R_x = R_x - \sigma_n \quad ,$$

wobei also

$$\sigma_n = \frac{1}{r n^2}\left(\frac{1}{1+q} + \frac{2}{1+2q} + \cdots + \frac{n-1}{1+(n-1)q}\right) \quad .$$

Zusammenstellung der Werte von σ für gebräuchliche Werte von n und p

p	$n = 2$	4	6	12
3	0,2537	0,3796	0,4215	0,4632
3½	0,2543	0,3803	0,4222	0,4639
4	0,2549	0,3811	0,4230	0,4648

8. Aufgeschobene $\frac{n}{n}$ Leibrenten. Der Zeitwert einer $\frac{n}{n}$ Rente vom Jahresbetrage 1, die von Erfüllung des y-ten Lebensjahres an gezahlt wird, ist bei der Fälligkeit der 1. Rente

$${}_{\frac{n}{n}}R_y = R_y - \sigma_n \quad ;$$

folglich erhalten die diesen Tag erlebenden a_y Personen im ganzen, auf den Nullpunkt übertragen, die Summe

$${}_{\frac{n}{n}}R_y\, l_y = (R_y - \sigma_n)\, l_y \quad .$$

Die Bankeinnahmen, übertragen auf den Nullpunkt, sind, wenn der Rentenwert beim Anfange der Versicherung mit ${}^{y}_{\frac{n}{n}}R_x$ bezeichnet wird,

$${}^{y}_{\frac{n}{n}}R_x \cdot l_x = (R_y - \sigma_n)\, l_y = L_y - \sigma_n\, l_y \quad .$$

Da nun $L_y : l_x = {}^{y}R_x$, so hat man

$${}^{y}_{\frac{n}{n}}R_x = {}^{y}R_x - \frac{l_y}{l_x} \cdot \sigma_n \quad .$$

Beispiel. Eine mit dem 55. Lebensjahre beginnende, monatlich mit je 180 Mark zahlbare Leibrente, wird von einer 31jährigen Person gegen einmaligen Reinbeitrag B erworben; wie groß ist B?

$$B = \frac{L_{55} - \sigma_{12} \cdot l_{55}}{l_{31}} \cdot 2160$$

σ_{12}	0,4639
L_{55}	69537
$\sigma_{12} \cdot l_{55}$	2716
$L_{55} - \sigma_{12}\, l_{55}$	66821
B	7786

$\log \sigma_{12}$	9,66642
$\log l_{55}$	3,76754
$\log \sigma_{12}\, l_{55}$	3,43396
$\log L_{55} - \ldots$	4,82492
$\log 2160$	3,33445
log Prod.	8,15937
$\log l_{31}$	4,26803
$\log B$	3,89134

9. Eine $\frac{n}{n}$ Rente, die sofort beginnt, aber vom Lebensalter z an wegfällt, ist der Unterschied einer lebenslänglichen sofort beginnenden und einer bis zum Alter z aufgeschobenen Leibrente. Bezeichnet man die Rente mit ${}_{\underset{n}{n}}R_x^z$, so hat man daher

$$
\begin{aligned}
{}_{\underset{n}{n}}R_x^z &= {}_{\underset{n}{n}}R_x - {}^{z}_{\underset{n}{n}}R_x \\
&= R_x - \sigma_n - {}^{z}R_x + \frac{l_z}{l_x}\sigma_n \\
&= R_x^z - \left(1 - \frac{l_z}{l_x}\right)\sigma_n \quad .
\end{aligned}
$$

10. Totenrenten. Bei Kapitalversicherungen auf den Todesfall treten Zahlungen von bestimmter Höhe auf, die für die im Laufe eines Jahres eintretenden Sterbefälle gezahlt werden müssen. Eine solche Zahlung findet für jeden Todesfall natürlich nur einmal statt, während man bei einer Rente an in gleichen Zwischenräumen sich wiederholende, in der Regel der Größe nach nicht veränderliche Zahlungen denkt. Da aber der Name „Totenrente“ häufig gebraucht wird, so wollen wir ihn nicht zurückweisen und die Angelegenheit an dieser Stelle erledigen. Wir setzen die Höhe einer Zahlung zu 1 Mark an, und nehmen zunächst an, daß die Auszahlungen für alle im Laufe eines Versicherungsjahres Verstorbenen am Ende dieses Jahres geleistet werden; alsdann nehmen wir an, daß die Zahlungen am Ende jedes Vierteljahres, bezw. jedes Monats erfolgen.

Der Unterschied

$$c_{x+1} = a_x - a_{x+1}$$

gibt an, wie viele von a_x in das $(x+1)$-te Jahr eintretende Personen im Laufe dieses Lebensjahres sterben. Wird für jeden einzelnen Todesfall 1 Mark bezahlt und auf den Nullpunkt übertragen, so ergibt sich, wenn $c_x r^x$ mit t_x bezeichnet wird, als Zeitwert der Bankleistungen

$$t_{x+1} + t_{x+2} + t_{x+3} + \ldots$$

Diese Summe ist für jedes Anfangsalter zu berechnen; sie soll mit T_x bezeichnet werden, wobei als Argument nicht das zum ersten Gliede gehörige Alter $x+1$, sondern x gewählt worden ist, weil dem Sinne dieser Totenrente nach der Tag der Erfüllung des Alters x als Anfang des 1. Versicherungsjahres zu gelten, und für diesen Tag der Rentenwert zu berechnen ist; es ist also

$$1) \qquad T_x = t_{x+1} + t_{x+2} + t_{x+3} + \ldots$$

Wird der Zeitwert der Totenrenten am Anfange des 1. Versicherungsjahres mit M_x bezeichnet, so hat man

$$2) \qquad M_x l_x = T_x$$

$$3) \qquad M_x = \frac{T_x}{l_x} \quad .$$

Zwischen den Summen T_x und L_x besteht ein leicht erkennbarer Zusammenhang; denn es ist

$$
\begin{aligned}
T_x &= (a_x - a_{x+1})\, r^{x+1} + (a_{x+1} - a_{x+2})\, r^{x+2} + \ldots \\
&= r L_x - L_{x+1} \quad ,
\end{aligned}
$$

oder, da

$$L_x = l_x + L_{x+1} \quad ,$$

$$T_x = l_x - (1 - r) L_x \quad .$$

11. Werden die Totenrenten nicht $\frac{1}{1}$ jährlich, sondern $\frac{n}{n}$ jährlich bezahlt, so haben, wenn das Absterben im Laufe eines Jahres gleichmäßig erfolgt, die im Laufe des y-ten Lebensjahres zu zahlenden Totenrenten am Anfange dieses Jahres den Zeitwert

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} c_y \cdot \frac{1}{1+kq} = c_y \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+kq} \quad .$$

Überträgt man diesen Betrag auf das Ende des y-ten Lebensjahres, so erhält man μc_y, wenn man zur Abkürzung setzt

$$1) \qquad \mu = \frac{1}{nr} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+kq} \quad .$$

12. Wir setzen nun stetige Zahlung der Totenrente voraus, und zwar soll die Zahlung sofort nach dem Ableben erfolgen. Überträgt man auf den Anfang des Versicherungsjahres, so erhält man für die Bankleistung im Laufe des $(x+1)$-ten Versicherungsjahres

$$c_{x+1} \int_0^1 \frac{dt}{1+\frac{pt}{100}} = \frac{100\, c_{x+1}}{p}\, l\, 1{,}0p = \frac{100 \log 1{,}0p}{p \log e}\, c_{x+1} \quad .$$

Am Anfange des 1. Versicherungsjahres hat daher die Totenrente den Zeitwert

$$\underline{M}_x = \frac{100 \log 1{,}0p}{p\, r \log e} \cdot M_x \quad .$$

Zusammenstellung einiger zusammengehöriger Werte von p und

$$\mu = \frac{100 \log 1{,}0p}{p\, r \log e} \quad .$$

p	$\log \mu$	μ
3	0,00641	1,01488
3¼	0,00693	1,01609
3½	0,00744	1,01728
3¾	0,00798	1,01854
4	0,00848	1,01972

13. Leibrenten mit Rückgewähr. Wir haben bis jetzt vorausgesetzt, daß bei Rentenversicherungen die Bank nichts weiter leistet, als die Rente; stirbt der Versicherte frühzeitig, so hat sie ihm für seine Einzahlungen nur erst wenig geleistet, sie erscheint als seine Erbin. Dieses Erbe ist aber kein Reingewinn der Bank, sondern sie bestreitet damit die Renten der lange lebenden Rentner. Der früh Verstorbene hat vom Anfange seiner Versicherung an die Gewißheit gehabt, daß er, auch wenn er ein noch so hohes Alter erreichen sollte, auf die vertragsmäßige Rente mit Sicherheit rechnen konnte. Dies ganz unschätzbare Gefühl der Sicherheit kann zwar nicht ziffernmäßig berechnet werden, spielt aber bei Abschlüssen von Versicherungen eine ganz wesentliche Rolle.

Für solche Versicherungsnehmer, die eine Härte darin finden, daß ihre Erben bei frühzeitigem Tode keinen Anspruch an die Bank haben, ist die Rentenversicherung mit Rückgewähr eingerichtet worden. Die Rückgewährbedingungen können mannigfach sein; wir wollen voraussetzen, daß die Bank

beim Tode des Versicherten die gemachten Einlagen unverzinst, und vermindert um die ebenfalls unverzinsten, dem Versicherten bereits gezahlten Renten, zurückzahlt. Es ist klar, daß der Versicherte dabei nichts gewinnen kann; für die Leibrente 1 muß er genau so viel mehr bezahlen, als den Rückgewährleistungen der Bank entspricht; er könnte seinen Zweck ebensogut, wenn nicht noch besser, erreichen, wenn er diesen Mehrbetrag sparen und durch Zinseszins vermehren würde, denn wenn ihm die Bank durch Rückgewährversicherung diese Mühe abnimmt, so stellt sie hierfür angemessene Zuschläge in Rechnung.

Die Rückgewähr bezieht sich in der Regel nicht auf die Reinbeiträge, sondern auf die Tarifbeiträge, die aus jenen durch Zuschläge hervorgehen, die zur Deckung des Verwaltungsaufwandes und zur Erhöhung der Sicherheit gemacht werden. Wir wollen annehmen, daß diese Zuschläge aus zwei Teilen bestehen, von denen der eine f vom Beitrittsalter unabhängig ist, während der andre das m fache des Reinbeitrags sei, wobei natürlich m ein mäßiger echter Bruch ist. Der Tarifbeitrag ist also nach dieser Annahme

$$(1+m)B_x+f, \quad \text{bezw.} \quad (1+m)b_x+f \quad ;$$

bei derselben Versicherungsart wird in beiden Formeln m denselben Wert haben, während selbstverständlich das f in den einmaligen Beiträgen ein andres ist, als in den jährlichen.

14. Sofort beginnende Rückgewährrente. Ist $\mathfrak{R}$ der einmalige Reinbeitrag einer sofort beginnenden lebenslänglichen Leibrente 1 mit Rückgewähr, dagegen

$$g, d$$

der Tarifbeitrag, wobei g die ganze Zahl, d die Dezimalbruchstellen bezeichnet, so hat man zunächst die Gleichung

$$1)\quad \left\{\begin{aligned} l_x\cdot\mathfrak{R}_x &= L_x+t_{x+1}(g,d-1)+t_{x+2}(g,d-2)+\ldots+t_{x+g}(g,d-g)\\ &= L_x+(t_{x+1}+t_{x+2}+\ldots+t_{x+g})g,d\\ &\quad-(t_{x+1}+2\,t_{x+2}+3\,t_{x+3}+g\,t_{x+g}) \quad . \end{aligned}\right.$$

Links setzen wir

$$\mathfrak{R}_x=\frac{g,d-f}{1+m} \quad .$$

Die erste Klammer rechts ist T_x-T_{x+g}, die zweite tritt hier zum ersten Male auf. Man berechnet die Summen

$$2)\quad \mathfrak{T}_x=T_x+T_{x+1}+T_{x+2}+\ldots=t_{x+1}+2\,t_{x+2}+3\,t_{x+3}+\ldots$$

und hat dann

$$3)\quad t_{x+1}+2\,t_{x+2}+3\,t_{x+3}+\ldots+g\,t_{x+g}=\mathfrak{T}_x-g\,T_{x+g}-\mathfrak{T}_{x+g} \quad .$$

Hiernach erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+m}l_x(g,d-f) &= L_x+(T_x-T_{x+g})g,d-\mathfrak{T}_x+T_{x+g}\cdot g+\mathfrak{T}_{x+g}\\ &= L_x+T_x g,d-\mathfrak{T}_x+\mathfrak{T}_{x+g}-T_{x+g}\cdot 0,d \end{aligned}$$

$$\left(\frac{l_x}{1+m}-T_x\right)g,d+T_{x+g}\cdot 0,d=L_x+\frac{f}{1+m}l_x-\mathfrak{T}_x+\mathfrak{T}_{x+g} \quad .$$

Hieraus folgt

$$4)\quad g+\left\{1+\frac{(1+m)\,T_{x+g}}{l_x-(1+m)\,T_x}\right\}0,d=\frac{(1+m)(L_x-\mathfrak{T}_x)+f\,l_x}{l_x-(1+m)\,T_x}+\frac{(1+m)\mathfrak{T}_{x+g}}{l_x-(1+m)\,T_x} .$$

Um zunächst g zu bestimmen, setzt man in $\mathfrak{T}_{x+g}$ für g einen schätzungsweise angenommenen Wert g_1 an, indem man bei dieser Abschätzung von dem Rentenwerte ohne Rückgewähr ausgeht. Stimmt die ganze Zahl der rechten

Seite mit g_1 überein, so ist entweder g_1 oder $g_1 - 1$ der richtige Wert, und man hat aus 4) nur noch $0, d$ zu bestimmen; im andern Falle nimmt man statt g_1 einen andern geeigneteren Wert g_2 u. s. w. Bei Tarifrechnungen wird man diese Rechnung zunächst für die Eintrittsalter $x = 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50$ ausführen; für jedes Zwischenalter kann man dann leicht das richtige g erraten.

1. Beispiel. $f = 0{,}20$, $m = 0{,}08$, $x = 30$. Die Rente ohne Rückgewähr ist 18,9, daher kann $g_1 = 20$ genommen werden.

1.	T_{30}	6973,3	10.	$1{,}08 \cdot 8)$	201678
2.	$0{,}08\, T_{30}$	557,8	11.	l_{30}	19345
3.	$1) + 2)$	7531,1	12.	$0{,}2 \cdot l_{30}$	3869
4.	l_{30}	19345	13.	$10) + 12)$	205547
5.	$4) - 3)$	11814	14.	log 13)	5,31291
6.	L_{30}	365859	15.	log 5)	4,07240
7.	$\mathfrak{T}_{30}$	179120	16.	$14) - 15)$	1,24051
8.	$6) - 7)$	186739	17.	1. Glied	17,398
9.	$0{,}08 \cdot 8)$	14939			

		$g = 20$	23	22
18.	$\mathfrak{T}_{30+g}$	67587	55483	59388
19.	$0{,}08 \cdot 18)$	5407	4439	4751
20.	$1{,}08 \cdot 18)$	72994	59922	64139
21.	log 20)	4,86328	4,77758	4,80712
22.	log 5)	4,07240	4,07240	4,07240
23.	$21) - 22)$	0,79088	0,70518	0,73472
24.	2. Glied	6,178	5,071	5,429
25.	1. Glied	17,398	17,398	17,398
26.	Summe	23,576	22,469	22,827

27.	T_{52}	3905,2
28.	$0{,}08 \cdot 27)$	312,4
29.	$27) + 28)$	4217,6
30.	log 29)	3,62507
31.	log 5)	4,07240
32.	$30) - 31)$	9,55267
33.	Bruch	0,3570
34.	$\log[1 + 34)]$	0,13258
35.	log 0,827	9,91751
36.	$35) - 36)$	9,78493
37.	$0, d$	0,6094

Die Tarifrente ist daher

$$\mathfrak{R}'_{30} = 22{,}609 \quad .$$

Die Reinrente ergibt sich daraus zu

$$\mathfrak{R}_{30} = \frac{22{,}609 - 0{,}20}{1{,}08} = 20{,}750 \quad .$$

15. Aufgeschobene Rückgewährrente, einmaliger Beitrag. Bis zum Anfange der Rentenzahlung wird im Todesfalle der Beitrag unverzinst und unverkürzt rückgewährt; stirbt der Rentner nach Eintritt des Rentengenusses, so wird der Überschuß des unverzinsten Beitrags über die Summe der bereits genossenen Renten rückgewährt. Wir setzen wieder wie in Nr. 14

$$(1+m)\,{}^{y}\mathfrak{R}_x + f = g, d \quad ,$$

und haben für g und $0, d$ die Gleichung

$$l_x \cdot \frac{g, d - f}{1+m} = L_y + (t_{x+1} + t_{x+2} + \ldots + t_y) \cdot g, d$$
$$+ t_{y+1}(g, d - 1) + t_{y+2}(g, d - 2) + \ldots + t_{y+g}(g, d - g)$$
$$= L_y + (T_x - T_y) g, d + T_y \cdot g, d - T_{y+g} \cdot g, d$$
$$- \mathfrak{T}_y + T_{y+g} \cdot g + \mathfrak{T}_{y+g}$$
$$= L_y + T_x \cdot g, d - T_{y+g} \cdot 0, d - \mathfrak{T}_y + \mathfrak{T}_{y+g} \quad ,$$

woraus folgt

$$[l_x - (1+m) T_x] g, d + (1+m) T_{y+g} \cdot 0, a$$
$$= (1+m)(L_y - \mathfrak{T}_y) + f \cdot l_x + (1+m) \mathfrak{T}_{y+g} \quad ,$$

$$g + \left(1 + \frac{(1+m) T_{y+g}}{l_x - (1+m) T_x}\right) \cdot 0, d = \frac{(1+m)(L_y - \mathfrak{T}_y) + f l_x}{l_x - (1+m) T_x} + \frac{(1+m)\mathfrak{T}_{y+g}}{l_x - (1+m) T_x} \quad .$$

Wie in Nr. 14, setzt man auch hier in $\mathfrak{T}_{x+g}$ für g einen schätzungsweise angenommenen Wert g_1, und berechnet die rechte Seite u. s. w.

16. Aufgeschobene Rückgewährrente; jährliche Beiträge mit Beitragsfreiheit vom Alter u an. Stirbt der Versicherte vor Anfang des Rentengenusses, so wird die Summe der unverzinsten Beiträge, die er gezahlt hat, rückgewährt, stirbt er später, so besteht die Rückgewähr, wie bei Nr. 14 und 15, aus dem Überschusse der gezahlten Beiträge über die genossenen Renten.

Wir nehmen wieder an, der jährliche Reinbeitrag b_x werde zur Berechnung des Tarifbeitrags b'_x in einem bestimmten Verhältnisse vergrößert und außerdem noch eine für alle Eintrittsalter gleiche Zahl f zugeschlagen, so daß man hat, wenn für den Tarifbeitrag b_x gesetzt wird,

$$1) \qquad b'_x = (1+m) b_x + f \quad .$$

Die Summe aller bis zum Eintritte der Beitragsfreiheit gezahlten jährlichen Beiträge ist

$$2) \qquad (u-x) b'_x = (u-x)(1+m) b_x + (u-x) f \quad .$$

Setzt man hierfür wieder g, d, so hat man für g und $0, d$ die Gleichung

$$(L_x - L_u) b_x = L_y + [t_{x+1} + 2 t_{x+2} + \ldots + (u-x) t_u] \frac{g, d}{u-x}$$
$$+ (t_{u+1} + t_{u+2} + \ldots + t_y) \cdot g, d$$
$$+ t_{y+1}(g, d - 1) + t_{y+2}(g, d - 2) + \ldots + t_{y+g}(g, d - g) \quad .$$

Da nun

$$t_{x+1} + 2 t_{x+2} + \ldots + (u-x) t_u = \mathfrak{T}_x - (u-x) T_u - \mathfrak{T}_u \quad ,$$
$$t_{u+1} + t_{u+2} + \ldots + t_y = T_u - T_y \quad ,$$
$$t_{y+1} + t_{y+2} + \ldots + t_{y+g} = T_y - T_{y+g} \quad ,$$
$$t_{y+1} + 2 t_{y+2} + \ldots + g t_{y+g} = \mathfrak{T}_y - g T_{y+g} - \mathfrak{T}_{y+g} \quad ,$$

so hat man

$$(L_x - L_u)\,b_x = L_y + \mathfrak{T}_x \frac{g,d}{u-x} - T_u \cdot g,d - \mathfrak{T}_u \cdot \frac{g,d}{u-x}$$
$$+ (T_u - T_y)g,d + (T_y - T_{y+g})g,d$$
$$- \mathfrak{T}_y + T_{y+g} \cdot g + \mathfrak{T}_{y+g}$$
$$= L_y + (\mathfrak{T}_x - \mathfrak{T}_u)\frac{g,d}{u-x} - T_{y+g} \cdot 0,d - \mathfrak{T}_y + \mathfrak{T}_{y+g} \ .$$

Setzt man für b_x den aus 2) folgenden Wert, so ergibt sich

$$(L_x - L_u) \cdot \frac{g,d - (u-x)f}{(u-x)(1+m)} - (\mathfrak{T}_x - \mathfrak{T}_u)\frac{g,d}{u-x} + T_{y+g} \cdot 0,d$$
$$= L_y - \mathfrak{T}_y + \mathfrak{T}_{y+g} \ ,$$
$$\frac{L_x - L_u - (1+m)(\mathfrak{T}_x - \mathfrak{T}_u)}{(u-x)(1+m)} \cdot g,d + T_{y+g} \cdot 0,d$$
$$= L_y - \mathfrak{T}_y + \frac{L_x - L_u}{1+m} \cdot f + \mathfrak{T}_{y+g} \ .$$

Setzt man hier zur Abkürzung

$$3) \qquad \frac{L_x - L_u - (1+m)(\mathfrak{T}_x - \mathfrak{T}_u)}{(u-x)(1+m)} = X \ ,$$

so erhält man schließlich

$$4) \qquad g + \left(1 + \frac{T_{y+g}}{X}\right) \cdot 0,d = \frac{1}{X}\left(L_y - \mathfrak{T}_y + \frac{L_x - L_u}{1+m} \cdot f\right) + \frac{\mathfrak{T}_{y+g}}{X} \ .$$

Beispiel:

$$x = 35\ , \quad u = 45\ , \quad y = 60\ , \quad m = 0{,}08\ , \quad f = 0{,}006\ .$$

Man berechnet zunächst den jährlichen Reinbeitrag $\mathfrak{b}_x$ für die Rente 1) ohne Rückgewähr. Nach Nr. 6 ist

$$\mathfrak{b}_x = \frac{L_y}{L_x - L_u} \ .$$

L_x	276947
L_u	148918
$L_x - L_u$	128029
$\log L_y$	4,63815
$\log(L_x - L_u)$	5,10731
$\log \mathfrak{b}_x$	9,53084
$\mathfrak{b}_x$	0,3395

Der Gesamtbetrag der 10 Beiträge ist $10\,\mathfrak{b}_x = 3{,}395$; man kann daher für die Rückgewähr $g_1 = 4$ schätzen. Man hat nun

1.	$\mathfrak{T}_x$	145793	13.	$\log(L_x - L_u)$	5,10731
2.	$\mathfrak{T}_u$	90304	14.	$\log f$	7,77815
3.	$\mathfrak{T}_x - \mathfrak{T}_u$	55489	15.	13) + 14)	2,88546
4.	0,08 · 3)	4439	16.	log 1,08	0,03342
5.	1,08 · 3)	59928	17.	15) − 16)	2,85204
6.	$L_x - L_u$	128029	18.	num 17)	711
7.	6) − 5)	68101	19.	$L_y - \mathfrak{T}_y$	11577
8.	log 7)	4,83316	20.	18) + 19)	12301
9.	log 10,8	1,03342	21.	log 20)	4,08995
10.	$\log X$	3,79974	22.	$\log X$	3,79974
11.	L_y	43467	23.	21) − 22)	0,29021
12.	$\mathfrak{T}_y$	31890	24.	1. Glied	1,9508

		$g = 4$	5
25.	$\mathfrak{T}_{y+g}$	21452	19194
26.	log 25)	4,33147	4,28316
27.	log X	3,79974	3,79974
28.	26) — 27)	0,53173	0,48342
29.	2. Glied	3,4020	3,0439
30.	1. Glied	1,9508	1,9508
31.	Summe	5,3528	4,9947

Hieraus ist ersichtlich, daß $g = 4$ der richtige Wert ist, und $0, d$ aus der Gleichung bestimmt wird

$$\left(1 + \frac{T_{y+g}}{X}\right) \cdot 0, d = 1,3528 \quad .$$

T_{64}	2258,0	log 1,3581	0,13293
log T_{64}	3,35372	log 1,3528	0,13124
log X	3,79974	log $0, d$	9,99831
log Bruch	9,55398	$0, d$	0,99612
Bruch	0,35808	g, d	4,99612

Aus dem jährlichen Tarifbeitrage 0,49961 findet sich der Reinbeitrag zu

$$b_x = \frac{0,49961 - 0,006}{1,08} = 0,46255 \text{ *)}.$$

§ 3. Reinbeiträge für einfache Kapitalversicherungen auf den Todes- und Lebensfall.

1. Bei der einfachen Todesfallversicherung zahlt die Bank das versicherte Kapital beim Tode des Versicherten. Wir nehmen das Kapital in der Regel zu 1 Mark an, und setzen voraus, daß die Auszahlungen am Ende des Sterbejahres erfolgen. Da die Todesfälle bescheinigt, die Bescheinigungen an den Sitz der Versicherungsgesellschaft eingeschickt und dort geprüft werden müssen, ehe die Auszahlung der Versicherungssumme erfolgen kann, so vergehen einige Wochen vom Todesfalle bis zur Auszahlung. Wenn wir nun der einfachern Rechnung wegen die Auszahlung ans Ende des Sterbejahres legen, so wird für die in der ersten Hälfte des Sterbejahres eintretenden Todesfälle der Bank eine Zinseinnahme gutgeschrieben, die sie gar nicht hat; dafür wird aber für die gegen das Ende des Sterbejahres eintretenden Sterbefälle ein Zinsgenuß weggelassen. Beide Posten gleichen sich nicht vollständig aus, ihr Unterschied ist aber so unbedeutend, daß er unbedenklich außer Betracht bleiben kann.

Unter der gemachten Voraussetzung ist die Leistung der Bank eine sofort beginnende Totenrente 1. Die Gegenleistung des Versicherten besteht entweder aus einem einmaligen Beitrage, der sofort beim Beginne der Versicherung zu zahlen ist, oder aus jährlichen gleichen Beiträgen, die bis zum Tode bezahlt werden, oder aus jährlichen gleichen Beiträgen, die höchstens bis zu einem bestimmten Lebensalter gezahlt werden, so daß vom nächsten Jahre an Beitragsfreiheit eintritt. Im Falle jährlicher Beiträge stellen diese also eine

*) Die in KARUPS Lehrbuch der Lebensversicherung enthaltenen Formeln für Rückgewähr sind nicht zu gebrauchen, da dort nur Reinbeiträge rückgewährt werden.

sofort anfangende jährliche Rente dar, die bis zum Tode geht, oder abgebrochen wird, und die Höhe b_x hat, wenn damit der jährliche Beitrag bezeichnet wird. Daher ist für Kapitalversicherung auf den Todesfall (versichertes Kapital = 1 Mark):

a) Einmaliger Beitrag

$$1)\qquad B_x = \frac{T_x}{l_x} \quad ;$$

b) jährliche Beiträge, zahlbar bis zum Tode,

$$2)\qquad b_x = \frac{T_x}{L_x} \quad ;$$

c) jährliche Beiträge, mit Beitragsfreiheit vom Lebensalter u an,

$$3)\qquad b_x = \frac{T_x}{L_x - L_u} \quad .$$

Die Formeln 1) und 2) kann man umgestalten, indem man von den Beziehungen

$$l_x - T_x = (1 - r) L_x \,, \qquad L_x = l_x R_x$$

Gebrauch macht; man hat dann

$$T_x = l_x - (1 - r) L_x \quad ,$$

und daher

$$4)\qquad B_x = 1 - (1 - r) R_x \quad ,$$

$$5)\qquad b_x = \frac{1}{R_x} - (1 - r) \quad ,$$

die man anwenden wird, wenn man eine Haupttafel verwenden muß, die die T_x-Werte nicht enthält.

Beispiele.

A) Eine 37jährige Person versichert ein Kapital von 8000 Mark auf den Todesfall; wie groß ist der einmalige Reinbeitrag?

$$B_{37} = \frac{T_{37}}{l_{37}} \cdot 8000 \qquad \text{oder} \qquad = 8000\,[1 - (1 - r) R_x]$$

$\log T_{37}$	3,77112	$\log R_{37}$	1,23832
$\log 8000$	3,90309	$\log(1 - r)$	8,52913
log Prod.	7,67421	log Prod.	9,76745
$\log l_{37}$	4,15347	$(1 - r) R_{37}$	0,58540
$\log B_{37}$	3,52074	$1 - (1 - r) R_{37}$	0.41460
B_{37}	3316,9	B_{37}	3316,8

B) Wie groß ist der jährliche Reinbeitrag für eine im Alter 42 abgeschlossene Todesfallversicherung von 6000 Mark?

$$b_{42} = \frac{T_{42}}{L_{42}} \cdot 6000 \qquad \text{oder} \qquad = 6000\left(\frac{1}{R_{42}} - (1 - r)\right)$$

$\log T_{42}$	3,71523	$\log 1/R_{42}$	8,79544
$\log 6000$	3,77815	$1/R_{42}$	0,062437
log Prod.	7,49338	$(1 - r)$	0,033816
$\log L_{42}$	5,25853	$1/R_{42} - (1-r)$	0,028621
$\log b_{42}$	2,23485	b_{42}	171,73
b_{42}	171,73		

C) Welcher jährliche Reinbeitrag ergibt sich für das Beitrittsalter 29 und das im Todesfalle zahlbare Kapital 5000, wenn mit dem Alter 55 Beitragsfreiheit eintreten soll?

$$b_{29} = \frac{T_{29}}{L_{29} - L_{55}} \cdot 5000$$

L_{29}	386048
L_{55}	69537
$L_{29} - L_{55}$	316511
$\log T_{29}$	3,85339
$\log 5000$	3,69897
log Zähler	7,55236
log Nenner	5,50039
$\log b_{29}$	2,05197
b_{29}	112,71

2. Werden die Beiträge nicht jährlich, sondern $\frac{n}{n}$ jährlich bezahlt, so wird doch der jährliche Beitrag nach Nr. 1, 2 oder 4 berechnet und dem Vertrage zugrunde gelegt. Stirbt der Versicherte, ehe alle Teilbeiträge für das Sterbejahr bezahlt sind, so werden die noch nicht bezahlten, ihm nur gestundeten Teilbeiträge von der Versicherungssumme gekürzt. Ist β_x ein Teilbeitrag, und wird für die Verzugszinsen der Zinsfuß p zugrunde gelegt, so hat man, wenn man $p : 100\, n = q$ setzt,

$$b_x = \beta_x \left(1 + \frac{1}{1+q} + \frac{1}{1+2q} + \ldots + \frac{1}{1+(n-1)q}\right) .$$

Setzt man

$$1) \qquad 1 + \frac{1}{1+q} + \frac{1}{1+2q} + \ldots + \frac{1}{1+(n-1)q} = \nu ,$$

so hat man also

$$\beta_x = \frac{1}{\nu} b_x .$$

Bei wöchentlichen Beiträgen ist die Berechnung von ν aus der Summenformel 1) ziemlich mühsam, da man 51 Glieder berechnen und zusammenzählen muß. Man kann sich diese Arbeit ersparen. Die Fläche, die von der gleichseitigen Hyperbel

$$y = \frac{1}{1+x} ,$$

den Koordinatenachsen und der zur Abscisse a gehörigen Ordinate $1 : (1+a)$ begrenzt wird, ist bekanntlich

$$f = \int_0^a \frac{dx}{1+x} = l(1+a) .$$

Teilt man a in n gleiche Teile und bezeichnet einen solchen Teil mit q, so sind die zu den Teilpunkten gehörigen Ordinaten, Anfang und Ende mit gerechnet,

$$1 , \quad \frac{1}{1+q} , \quad \frac{1}{1+2q} , \quad \frac{1}{1+3q} , \quad \ldots \quad \frac{1}{1+nq} ,$$

die wir der Reihe nach mit $1, y_1, y_2, \ldots$ bezeichnen wollen. Zieht man die Sehnen zwischen Nachbarpunkten, so erhält man n Trapeze, deren Flächen sind

$$\frac{q}{2}(1+y_1) , \quad \frac{q}{2}(y_1+y_2) , \quad \frac{q}{2}(y_2+y_3) , \quad \ldots \quad \frac{q}{2}(y_{n-1}+y_n) ,$$

und die zusammen mehr geben als f; daher hat man

$$\frac{q}{2}(1 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n) > l(1 + nq) \quad ,$$

oder

$$1) \qquad q(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) + \tfrac{1}{2} q(1 - y_n) > l(1 + nq) \quad .$$

Die Rechtecke qy_1, qy_2, ... sind ganz in f enthalten: daher ist

$$2) \qquad q(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) < l(1 + nq) \quad .$$

Aus 1) und 2) folgt

$$q(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = l(1 + nq) - \varepsilon \cdot \frac{q}{2}(1 - y_n) \quad ,$$

wobei ε einen echten Bruch bezeichnet. Teilt man durch q, fügt auf beiden Seiten 1 hinzu, ersetzt n durch $n - 1$ und y_k durch $1 : (1 + kq)$, so ergibt sich

$$3) \quad \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{1+q} + \dfrac{1}{1+2q} + \ldots + \dfrac{1}{1+(n-1)q} = 1 + \dfrac{1}{q} l(1 + \overline{n-1}\, q) \\ \qquad\qquad - \dfrac{\varepsilon}{2}\left(1 - \dfrac{1}{1 + \overline{n-1}\, q}\right) \quad . \end{cases}$$

Bei Wochenbeiträgen ist $n = 52$ und die linke Seite ungefähr 50; für den Zinsfuß 6, der wohl nicht überschritten wird, ist

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{1 + 51q}\right) = \frac{153}{5506} = 0{,}027 \ldots$$

Wenn man bedenkt, daß die Beiträge in der Regel auf 1000 Mark Versicherungssumme berechnet und auf Zehntelmark nach oben abgerundet werden, so erkennt man, daß gegenüber der linken Seite ein Bruchteil von 0,027 vernachlässigt werden darf. Man benutzt daher unbedenklich die Formel

$$4) \quad \begin{cases} \nu = 1 + \dfrac{1}{1+q} + \dfrac{1}{1+2q} + \dfrac{1}{1+3q} + \ldots + \dfrac{1}{1 + \overline{n-1}\, q} \\ \quad = 1 + \dfrac{1}{q \log e} \log(1 + \overline{n-1}\, q) \quad . \end{cases}$$

Für die Zinsfüße 5, $5\frac{1}{2}$, 6 hat man

$$\nu_5 = 1 + \frac{1040}{\log e} \log \frac{1091}{1040}, \quad \nu_{5,5} = 1 + \frac{1040}{1{,}1 \log e} \log \frac{1096{,}1}{1040} \quad ,$$

$$\nu_6 = 1 + \frac{1040}{1{,}2 \log e} \log \frac{1101{,}2}{1040} \quad .$$

1.	log 1091	3,037825	8.	log 1040	3,01703
2.	log 1096,1	3,039850	9.	log log e	9,63778
3.	log 1101,2	3,041866	10.	8) − 9)	3,37925
4.	log 1040	3,017033	11.	log 1,1	0,04139
5.	1) − 4)	0,020792	12.	log 1,2	0,07918
6.	2) − 4)	0,022817			
7.	3) − 4)	0,024833			

8) — 9)	3,37925	10) — 11)	3,33786	10) — 12)	3,30007
log 5)	8,31789	log 6)	8,35826	log 7)	8,39503
$\log(\nu_5 - 1)$	1,69714	$\log(\nu_{5,5} - 1)$	1,69612	$\log(\nu_6 - 1)$	1,69510
$\nu_5 - 1$	49,790	$\nu_{5,5} - 1$	49,673	$\nu_6 - 1$	49,557
ν_5	50,790	$\nu_{5,5}$	50,673	ν_6	50,557
$\log \nu_5$	1,70578	$\log \nu_{5,5}$	1,70478	$\log \nu_6$	1,70378

3. Die reine Todesfallversicherung, von der die Entwicklung des Lebensversicherungswesens ausgegangen ist, wird jetzt fast gar nicht mehr angewendet, sondern durch eine Versicherung auf den Todes- und Lebensfall ersetzt, indem das versicherte Kapital beim Tode, spätestens aber bei Erreichung des 85. Lebensjahres gezahlt wird.

Die Bankausgaben für die Versicherungssumme 1 Mark sind in diesem Falle, übertragen auf den Nullpunkt,

$$T_x - T_{85} + l_{85} \quad .$$

Die Einnahmen ändern sich bei Nr. 1, b), indem an Stelle von $L_x \cdot b_x$ hier zu setzen ist $(L_x - L_{85})\, b_x$. Man hat daher:

Einmaliger Beitrag

$$1) \qquad B_x = \frac{T_x - T_{85} + l_{85}}{l_x} \quad ;$$

jährliche Beiträge, zahlbar höchstens bis zur Erfüllung des 84. Lebensjahres,

$$2) \qquad b_x = \frac{T_x - T_{85} + l_{85}}{L_x - L_{85}} \quad ;$$

jährliche Beiträge, mit Beitragsfreiheit vom Alter u an,

$$3) \qquad b_x = \frac{T_x - T_{85} + l_{85}}{L_x - L_u} \quad .$$

Beispiele.

A) Wie groß ist a) der einmalige, b) der jährliche Reinbeitrag für eine Todesfallversicherung über 9000 Mark, zahlbar spätestens bei Erreichung des 85. Lebensjahres, wenn das Beitrittsalter 42 ist?

$$B_{42} = \frac{T_{42} - T_{85} + l_{85}}{l_{42}} \cdot 9000 \,, \qquad b_{42} = \frac{T_{42} - T_{85} + l_{85}}{L_{42} - L_{85}} \cdot 9000 \quad .$$

T_{42}	5190,8
l_{85}	102,8
$T_{42} + l_{85}$	5293,6
T_{85}	91,5
$T_{42} - \dots$	5202,1
L_{42}	181357
L_{85}	332
$L_{42} - L_{85}$	181025
B_{42}	4134,7
b_{42}	258,63

$\log T_{42} - \dots$	3,71618
log 9000	3,95424
log Prod.	7,67042
$\log l_{42}$	4,05397
$\log(L_{42} - L_{85})$	5,25774
$\log B_{42}$	3,61645
$\log b_{42}$	2,41268

B) Wie groß ist der jährliche Reinbeitrag für das Eintrittsalter 29, Beitragsfreiheit vom Alter 55 an, wenn das versicherte Kapital in der Höhe von 7500 Mark beim Tode, spätestens bei Erreichung des 85. Lebensjahres gezahlt werden soll?

$$b_{29} = \frac{T_{29} - T_{85} + l_{85}}{L_{29} - L_{55}} \cdot 7500 \quad .$$

T_{29}	7135,0
l_{85}	102,8
$T_{29}+l_{85}$	7237,8
T_{85}	91,5
$T_{29}-\dots$	7146,3
L_{29}	386048
L_{55}	69537
$L_{29}-\dots$	316511
b_{29}	169,34

$\log(T_{29}-\dots)$	3,85408
$\log 7500$	3,87506
log Prod.	7,72914
$\log(L_{29}-\dots)$	5,50039
$\log b_{29}$	2,22875

4. Versicherung auf den Todes- und Lebensfall. Das versicherte Kapital (1 Mark) wird beim Tode, spätestens aber bei Erfüllung eines bestimmten Lebensalters y gezahlt. Zu dieser Versicherungsart gehört für $y=85$ die in Nr. 3 behandelte; wir haben aber vorgezogen, dieser eine besondere Nummer anzuweisen, weil sie als Ersatz für die reine Todesfallversicherung anzusehen ist und in Bezug auf die Tarife und Rücklagen von ihr nicht unwesentlich abweicht. Betreffs der Beiträge sind wieder die Fälle wie in Nr. 1 und 3 zu unterscheiden; man erhält die hier geltenden Formeln, wenn man in Nr. 3 das Lebensalter 85 durch y ersetzt. Man hat somit:

Einmaliger Beitrag

$$1)\qquad B_x = \frac{T_x - T_y + l_y}{l_x};$$

jährliche Beiträge bis zum Tode, spätestens bis zum Lebensalter $y-1$,

$$2)\qquad b_x = \frac{T_x - T_y + l_y}{L_x - L_y};$$

jährliche Beiträge, mit Beitragsfreiheit vom Lebensalter u an

$$3)\qquad b_x = \frac{T_x - T_y + l_y}{L_x - L_u}.$$

Beispiele. Von einer 37 jährigen Person soll eine Versicherung über 4000 Mark abgeschlossen werden, zahlbar beim Tode, spätestens aber bei Vollendung des 60. Lebensjahres; wie groß ist a) der einmalige Reinbeitrag B_{37}: b) der jährliche Reinbeitrag b_{37}, wenn er bis zum Ende des Vertrags gezahlt werden soll; c) der jährliche Reinbeitrag b'_{37}, wenn mit dem 50. Jahre Beitragsfreiheit eintreten soll?

$$B_{37} = \frac{T_{37} - T_{60} + l_{60}}{l_{37}} \cdot 4000, \quad b_{37} = \frac{T_{37} - T_{60} + l_{60}}{L_{37} - L_{60}} \cdot 4000,$$

$$b'_{37} = \frac{T_{37} - T_{60} + l_{60}}{L_{37} - L_{50}} \cdot 4000.$$

T_{37}	5903,6
l_{60}	4289,4
$T_{37}+l_{60}$	10193,0
T_{60}	2819,9
$T_{37}-T_{60}+l_{60}$	7373,1
L_{37}	246486
L_{60}	43466
L_{50}	104196
$L_{37}-L_{60}$	203020
$L_{37}-L_{50}$	142290
B_{37}	2071,3
b_{37}	145,27
b'_{37}	207,27

$\log(T_{37}-\dots)$	3,86765
$\log 4000$	3,60206
log Prod.	7,46971
$\log l_{37}$	4,15347
$\log(L_{37}-L_{60})$	5,30754
$\log(L_{37}-L_{50})$	5,15317
$\log B_{37}$	3,31624
$\log b_{37}$	2,16217
$\log b'_{37}$	2,31654

5. Kurze Todesfallversicherung. Das Kapital (1 Mark) wird nur gezahlt, wenn der Versicherte vor Erreichung eines bestimmten Lebensalters y stirbt; die Leistung des Versicherten kann in einem einmaligen Beitrage, oder in jährlichen Beiträgen bis spätestens zum Lebensalter $y - 1$ bestehen. Diese Form der Versicherung kann gewählt werden, um gegenüber von Schuldverhältnissen, die bis zum Lebensalter y reichen, den Kredit zu befestigen; oder auch, um für den Fall des frühzeitigen Todes eines Familienvaters die Familie vor Not zu schützen, während der Versicherte für den Fall, daß er bis zum Alter y lebt, darauf rechnet, bis dahin genügende Rücklagen machen zu können.

Die auf den Nullpunkt übertragenen Leistungen der Bank sind in diesem Falle

$$T_x - T_y \quad .$$

Daher hat man:

Einmaliger Beitrag

$$1) \qquad B_x = \frac{T_x - T_y}{l_x} \quad ;$$

jährliche Beiträge bis zum Ende des Vertrags (durch Tod oder Erreichung des Alters y)

$$2) \qquad b_x = \frac{T_x - T_y}{L_x - L_y} \quad .$$

Beispiel. Eine kurze Todesfallversicherung wird im Alter 44 für das Alter 51 und das Kapital 25000 abgeschlossen; wie groß ist a) der einmalige, b) der jährliche, bis zum Tode, höchstens aber bis zum 50. Lebensjahre zahlbare Reinbeitrag?

$$B_{44} = \frac{T_{44} - T_{51}}{l_{44}} \cdot 25000 \,, \quad b_{44} = \frac{T_{44} - T_{51}}{L_{44} - L_{51}} \cdot 25000 \quad .$$

T_{44}	4926,5
T_{51}	4039,6
$T_{44} - T_{51}$	886,9
L_{44}	159229
L_{51}	96513
$L_{44} - L_{51}$	62716
B_{44}	2150,4
b_{44}	353,53

$\log (T_{44} - T_{51})$	2,94787
$\log 25000$	4,39794
log Prod.	7,34581
$\log l_{44}$	4,01329
$\log (L_{44} - L_{51})$	4,79738
$\log B_{44}$	3,33252
$\log b_{44}$	2,54843

6. Versicherung auf den Lebensfall. (Militärdienst-, Aussteuer- und Altersversicherung.) Das versicherte Kapital (1 Mark) wird nur dann ausgezahlt, wenn der Versicherte ein bestimmtes Lebensalter y erlebt; die Beitragszahlung erfolgt einmalig, oder durch jährliche Beiträge bis zum Ende des Vertrags.

A) Lebensfallversicherung ohne Rückgewähr. Die auf den Nullpunkt übertragenen Bankausgaben bestehen in diesem Falle in einer einzigen Zahlung an die a_y Versicherten, die von a_x Beitretenden das Lebensalter y erreichen, betragen daher l_y; folglich hat man:

a) Einmaliger Beitrag

$$1) \qquad B_x = \frac{l_y}{l_x} \quad ;$$

b) jährlicher Beitrag, zahlbar bis zum Ende des Vertrags,

$$2) \qquad b_x = \frac{l_y}{L_x - L_y} \quad ;$$

Beispiel. Eine 28jährige Person versichert ein Kapital von 4000 Mark, zahlbar, wenn sie 60 Jahre alt wird, ohne Rückgewähr im Falle früheren Ablebens. a) Wie hoch ist der einmalige Reinbeitrag? b) Wie hoch ist der jährliche Reinbeitrag, zahlbar bis zum 59. Lebensjahre, bezw. bis zum früheren Tode?

$$B_{28} = \frac{l_{60}}{l_{28}} \cdot 4000, \quad b_{28} = \frac{l_{60}}{L_{28} - L_{60}} \cdot 4000$$

L_{28}	407108
L_{60}	43467
$L_{28} - L_{60}$	363641
B_{28}	814,70
b_{28}	47,183

$\log l_{60}$	3,63240
$\log 4000$	3,60206
$\log$ Prod.	7,23446
$\log l_{28}$	4,32346
$\log (L_{28} - L_{60})$	5,56067
$\log B_{28}$	2,91100
$\log b_{28}$	1,67379

B) Lebensfallversicherung mit sofortiger Rückgewähr. Erlebt der Versicherte das Alter y nicht, so werden der einmalige Beitrag, bezw. die jährlichen Beiträge unverkürzt und unverzinst zurückgewährt.

a) Einmaliger Beitrag. Wir wollen annehmen, daß die für diese Versicherungen erhobenen Zuschläge ein festes Verhältnis μ zu den einmaligen, bezw. jährlichen Reinbeiträgen haben. Ist B_x der Reinbeitrag, also $(1 + \mu) B_x$ der Tarifbeitrag, so ist die Bankausgabe für das Kapital 1, übertragen auf den Nullpunkt,

$$l_y + (T_x - T_y)(1 + \mu) B_x \quad ,$$

daher hat man

$$l_x B_x = l_y + (T_x - T_y)(1 + \mu) B_x \quad ,$$

$$3) \qquad B_x = \frac{l_y}{l_x - (1 + \mu)(T_x - T_y)} \quad .$$

b) Jährlicher Beitrag, mit Beitragsfreiheit vom Alter u an. Die Bankausgabe ist hier

$$l_y + [t_{x+1} + 2\, t_{x+2} + 3\, t_{x+3} + \dots + (u - x)\, t_u + (u - x)(T_u - T_y)](1 + \mu)\, b_x \; ;$$

die Einnahme ist

$$(L_x - L_u)\, b_x \quad ,$$

und daher

$$b_x = \frac{l_y}{L_x - L_u - (1 + \mu)[\mathfrak{T}_x - (u - x) T_y - \mathfrak{T}_u]} \quad .$$

Beispiel. Für einen 11jährigen Knaben soll eine Summe von 5500 Mark versichert werden, zahlbar, wenn der Versicherte 30 Jahre alt ist; stirbt er vorher, so sind der einmalige, bezw. die jährlichen Beiträge unverkürzt und unverzinst zurückzugeben; wie hoch ist a) der einmalige Tarifbeitrag; b) der jährliche Tarifbeitrag, wenn vom 21. Jahre an Beitragsfreiheit eintreten soll, und $\mu = 0{,}22$ angenommen wird?

Werden die Tarifbeiträge mit B'_x und b'_x bezeichnet, so hat man

$$B'_{11} = 1{,}22 \cdot \frac{l_{30}}{l_{11} - 1{,}22(T_{11} - T_{30})} \cdot 5500$$

$$b'_{11} = 1{,}22 \cdot \frac{l_{30}}{L_{11} - L_{21} - 1{,}22(\mathfrak{T}_{11} - 10\, T_{30} - \mathfrak{T}_{21})} \cdot 5500$$

T_{11}	9592,8
T_{30}	6973,3
$T_{11} - T_{30}$	2619,5
$1{,}22\,(T_{11} - T_{30})$	3195,8
l_{11}	41062
$l_{11} - \ldots$	37866
$10\,T_{30}$	69733
$\mathfrak{T}_{21}$	248978
$10\,T_{30} + \mathfrak{T}_{21}$	318711
$\mathfrak{T}_{11}$	340129
$\mathfrak{T}_{11} - \ldots$	21418
L_{21}	581535
$1{,}22\,(\mathfrak{T}_{11} - \ldots)$	26130
Summe	607665
L_{11}	930599
$L_{11} - \ldots$	322934
B'_{11}	3428,0
b'_{11}	401,95

$\log 1{,}22$	0,08636
$\log (T_{11} - T_{30})$	3,41822
$\log (\mathfrak{T}_{11} - \ldots)$	4,33078
$\log 1{,}22\,(T_{11} - \ldots)$	3,50458
$\log 1{,}22\,(\mathfrak{T}_{11} - \ldots)$	4,41714
$\log 1{,}22$	0,08636
$\log 5500$	3,74036
$\log l_{30}$	4,28657
log Prod.	8,11329
$\log (l_{11} - \ldots)$	4,57825
$\log (L_{11} - \ldots)$	5,50911
$\log B'_{11}$	3,53504
$\log b'_{11}$	2,60418

7. Volksversicherung. Bei der gewöhnlichen Lebensversicherung unterwirft sich der Versicherte vor Abschluß des Vertrags einer genauen ärztlichen Untersuchung; der Antrag wird nur dann angenommen, wenn keine ärztlichen Bedenken entgegenstehen. Dieses Auswahlverfahren hat die Wirkung, daß die Sterblichkeit der Neuversicherten erheblich hinter der Sterblichkeit, die nach der Absterbeordnung zu erwarten wäre, zurückbleibt. Da aber selbst ein noch so scharfblickender Arzt nicht alle Krankheitsanfänge und -Anlagen zu entdecken vermag, und da der heute noch ganz Gesunde sofort den Schädlichkeiten ausgesetzt ist, die das Leben bedrohen, so verwischt sich nach wenigen Jahren schon der Unterschied zwischen den z jährigen, die in einem bestimmten Alter nach ärztlicher Untersuchung aufgenommen worden sind, und den übrigen Personen gleichen Alters in einer bestimmten Bevölkerungsgruppe.

Seit einigen Jahren ist man dazu übergegangen, Versicherungen ohne ärztliche Untersuchung abzuschließen, und nur die Bedingung zu stellen, daß der Versicherungsnehmer bei Stellung des Antrags nicht den Eindruck eines kranken oder kränklichen Mannes macht. Der Gefahr für die Bank, zufolge kurzer Lebensdauer der Versicherten schon nach kurzer Beitragszeit die Versicherungssumme zahlen zu müssen, begegnet man durch geeignete Schutzmaßregeln, indem man eine bestimmte Wartezeit festsetzt: stirbt der Versicherte innerhalb der Wartezeit, so zahlt die Bank nicht die Versicherungssumme, sondern gewährt die gezahlten Beiträge, unverzinst und unverkürzt, oder gekürzt um einige Prozente für Verwaltungsaufwand, zurück; oder die Bank zahlt in der Wartezeit nicht die ganze Versicherungssumme, sondern nur einen gewissen Bruchteil.

Aus Rücksicht auf die Sicherheit der Bank darf das versicherte Kapital bei jeder einzelnen Versicherung eine bestimmte obere Grenze nicht überschreiten. Die Beiträge werden zunächst für jährliche Vorausbezahlung berechnet, zumeist aber, der wirtschaftlichen Lage der Versicherten angemessen, wöchentlich eingefordert; im Todesfalle wird selbstredend auch hier die Versicherungssumme um die gestundeten Wochenbeiträge gekürzt. Wird für die Stundung der $\overset{n}{\underset{n}{}}$ Beiträge β_x der Zinsfuß p berechnet, so berechnet sich β_x aus dem Jahresbeitrage b_x nach der Formel Nr. 2, 2).

Für Lebensversicherungen mit ärztlicher Untersuchung verwendet man in der Regel Absterbeordnungen, die aus den Erfahrungen einer größern Anzahl von Versicherungsgesellschaften hervorgegangen sind; sehr verbreitet ist die von A. ZILLMER berechnete „Deutsche Sterblichkeitstafel für normale Leben mit vollständiger ärztlicher Untersuchung"*). Für Volksversicherungen ist diese Tafel natürlich nicht verwendbar; hier wird man eine für die Gesamtbevölkerung geltende, aus den großen Volkszählungen hervorgegangene Tafel anzuwenden haben.

8. Volksversicherung mit dreijähriger Wartezeit; während der Wartejahre werden die Beiträge unverkürzt und unverzinst rückgewährt; die Auszahlungen finden am Ende des Versicherungsjahres statt; der Versicherungsvertrag endet spätestens mit dem Lebensalter y, d. h. bei Erfüllung dieses Alters wird die Versicherungssumme den Überlebenden gezahlt.

Setzen wir für den jährlichen Tarifbeitrag b'_x, den wöchentlichen Tarifbeitrag β'_x und den jährlichen Reinbeitrag b_x (für 1 Mark versichertes Kapital) die Beziehungen voraus

$$b'_x = (1+m)\,b_x + f = \nu\,\beta'_x \quad ,$$

$$\nu = 1 + \frac{1}{1+q} + \ldots + \frac{1}{1+51\,q} \quad ,$$

so leistet die Bank am Ende des 1., 2. und 3. Wartejahres, auf den Nullpunkt übertragen,

$$t_{x+1}\cdot 52\,\beta'_x, \qquad 2\,t_{x+2}\cdot 52\,\beta'_x, \qquad 3\,t_{x+3}\cdot 52\,\beta'_x \quad ,$$

zusammen also

$$52(t_{x+1} + 2\,t_{x+2} + 3\,t_{x+3})\,\beta'_x \quad .$$

Die fernern Bankleistungen sind

$$T_{x+3} - T_y + l_y \quad .$$

Daher hat man

$$(L_x - L_y)\,b_x = 52(t_{x+1} + 2\,t_{x+2} + 3\,t_{x+3})\,\beta'_x + T_{x+3} - T_y + l_y \quad .$$

Multipliziert man mit ν, und ersetzt $\nu\,\beta'_x$ durch $(1+m)\,b_x + f$, so erhält man

$$[\nu(L_x - L_y) - 52(1+m)(t_{x+1} + \ldots)]\,b_x = \nu(T_{x+3} - T_y + l_y) + 52 f(t_{x+1} + \ldots) \,,$$

$$b_x = \frac{\nu(T_{x+3} - T_y + l_y) + 52 f(t_{x+1} + 2\,t_{x+2} + 3\,t_{x+3})}{\nu(L_x - L_y) - 52(1+m)(t_{x+1} + 2\,t_{x+2} + 3\,t_{x+3})} \quad .$$

Beispiel. Ein 40jähriger will in der Volksversicherung 1400 Mark gegen Wochenbeiträge versichern; das Kapital ist beim Tode, spätestens bei Erfüllung des 65. Lebensjahres zu zahlen; wie groß ist der Beitrag, wenn $q = \frac{5}{5200}$, $m = 0{,}3$, $f = 0{,}01$ angenommen werden, und betreffs der Wartezeit die obigen Bestimmungen gelten?

Ist b_{40} der jährliche Reinbeitrag für die Summe 1, so hat man

$$b_{40} = \frac{T_{43} - T_{65} + l_{65} + \dfrac{0{,}52}{\nu}(t_{41} + 2\,t_{42} + 3\,t_{43})}{L_{40} - L_{65} - \dfrac{67{,}6}{\nu}(t_{41} + 2\,t_{42} + 3\,t_{43})} \quad .$$

Hieraus folgt dann der wöchentliche Tarifbeitrag für 1400 Mark

$$\beta'_{40} = \frac{1}{\nu}(1{,}3\,b_{40} + 0{,}01)\,1400\,, \qquad \log\nu = 1{,}70578 \quad .$$

*) Dr. A. ZILLMER, Die mathematischen Rechnungen bei Lebens- und Rentenversicherungen, II. Aufl. Berlin 1887.

1.	T_{43}	5055,0	6.	t_{41}	138,36
2.	l_{65}	2950,3	7.	$2\,t_{42}$	271,62
3.	Summe	8005,3	8.	$3\,t_{43}$	407,31
4.	T_{65}	2112,4	9.	$t_{41}+\dots$	817,29
5.	$T_{43}-\dots$	5892,9	10.	log 0,52	9,71600
17.	num 15)	8,4	11.	log 67,6	1,82995
18.	Zähler	5901,3	12.	log 0,52 : ν	8,01022
19.	L_{40}	205636	13.	log 67,6 : ν	0,12417
20.	L_{65}	24777	14.	log 9)	2,91237
21.	19) − 20)	180859	15.	12) + 14)	0,92259
22.	num 16)	10878	16.	13) + 14)	3,03654
23.	Nenner	169981	24.	log 18)	3,77095
27.	b_{40}	0,034718	25.	log 23)	5,23040
28.	$1{,}3\cdot b_{40}$	0,045133	26.	log b_{40}	8,54055
29.	$1{,}3\,b_{40}+0{,}01$	0,055133	30.	log 29)	8,74141
35.	β'_{40}	1,5197	31.	log 1400	3,14613
			32.	30) + 31)	1,88754
			33.	log ν	1,70578
			34.	log β'_{40}	0,18176

9. Volksversicherung mit dreijähriger Wartezeit; auf 1 Mark Versicherungssumme wird für die Todesfälle im 1. Versicherungsjahre $^1/_4$ Mark, für die im 2. wird $^1/_2$ Mark, für die im 3. wird $^3/_4$ Mark, von da an 1 Mark von der Bank gezahlt.

Der jährliche Beitrag berechnet sich aus

$$(L_x - L_y)\,b_x = \tfrac{1}{4}\,(t_{x+1} + 2\,t_{x+2} + 3\,t_{x+3}) + T_{x+3} - T_y + l_y$$

$$b_x = \frac{\tfrac{1}{4}\,(t_{x+1} + 2\,t_{x+2} + 3\,t_{x+3}) + T_{x+3} - T_y + l_y}{L_x - L_y}\,.$$

Beispiel: $x = 38$, $y = 60$, Versicherungssumme 900 Mark, q, m, f, wie im vorigen Beispiele. Der Jahresreinbeitrag für 1 Mark ist

$$b_{38} = \frac{T_{41} - T_{60} + l_{60} + \tfrac{1}{4}(t_{39} + 2\,t_{40} + 3\,t_{41})}{L_{38} - L_{60}}\,,$$

der wöchentliche Tarifbeitrag

$$\beta'_{38} = \frac{1}{\nu}\,(1{,}3\,b_{38} + 0{,}01)\cdot 900$$

1.	t_{39}	144,30	15.	log 11)	3,84563
2.	$2\,t_{40}$	289,96	16.	log 14)	5,27596
3.	$3\,t_{41}$	415,08	17.	log b_{38}	8,56967
4.	Summe	849,34	18.	log 1,3	0,11394
5.	T_{41}	5326,6	19.	17) + 18)	8,68361
6.	l_{60}	4289,4	20.	num 19)	0,048262
7.	5) + 6)	9616,0	21.	20) + 0,01	0,058262
8.	T_{60}	2819,8	22.	log 21)	8,76539
9.	7) + 8)	6796,2	23.	log 900	2,95424
10.	$\tfrac{1}{4}\cdot 4)$	212,3	24.	22) + 23)	1,71963
11.	Zähler	7008,5	25.	log ν	1,70578
12.	L_{38}	232247	26.	log β'_{38}	0,01385
13.	L_{60}	43466	27.	β'_{38}	1,0324
14.	Nenner	188781			

10. Volksversicherung mit zweijähriger Wartezeit; für Todesfälle im 1. Versicherungsjahre werden die Beiträge rückgewährt, für Todesfälle im 2. wird $^1/_2$ Mark, von da ab 1 Mark gezahlt. Hier hat man, wenn wieder β'_x den Tarifwochenbeitrag bezeichnet,

$$(L_x - L_y)\, b_x = 52\, t_{x+1} \cdot \beta'_x + \tfrac{1}{2}\, t_{x+2} + T_{x+2} - T_y + l_y$$

$$[\nu (L_x - L_y) - 52\,(1 + m)\, t_{x+1}]\, b_x = 52\, t_{x+1} \cdot f + \nu\,(\tfrac{1}{2}\, t_{x+2} + T_{x+2} - T_y + l_y)$$

$$b_x = \frac{52\, t_{x+1} \cdot f + \nu\,(\frac{1}{2}\, t_{x+2} + T_{x+2} - T_y + l_y)}{\nu\,(L_x - L_y) - 52\,(1 + m)\, t_{x+1}} \;.$$

Beispiel: $x = 26$, $y = 55$, $q = 6 : 5200$, also $\log \nu = 1{,}70378$, versichertes Kapital 1200, $m = 0{,}2$, $f = 0{,}008$.

Hier ist der jährliche Reinbeitrag für die Summe 1

$$b_{26} = \frac{0{,}416 \cdot t_{27} + \nu\,(\frac{1}{2}\, t_{28} + T_{28} - T_{55} + l_{55})}{\nu\,(L_{26} - L_{55}) - 62{,}4\, t_{27}}$$

$$= \frac{\dfrac{0{,}416}{\nu}\, t_{27} + \frac{1}{2}\, t_{28} + T_{28} - T_{55} + l_{55}}{L_{26} - L_{55} - \dfrac{62{,}4}{\nu}\, t_{27}} \,,$$

und der wöchentliche Tarifbeitrag

$$\beta'_{26} = \frac{1}{\nu}\,(1{,}2\, b_{26} + 0{,}008) \cdot 1200 \;.$$

1.	$\frac{1}{2}\, t_{28}$	78,81	17.	num 16)	186
2.	T_{28}	7293,6	18.	L_{55}	69537
3.	l_{55}	5855,2	19.	17) + 18)	69723
4.	Summe	13148,8	20.	L_{26}	451953
5.	T_{55}	3503,9	21.	Nenner	382230
6.	log 0,416	9,61909	22.	log 13)	3,98435
7.	$\log t_{27}$	2,17754	23.	log 21)	5,58232
8.	6) + 7)	1,79663	24.	$\log b_{26}$	8,40203
9.	$\log \nu$	1,70378	25.	b_{26}	0,025236
10.	8) — 9)	0,09285	26.	$1{,}2\, b_{26}$	0,030283
11.	num 10)	1,2	27.	26) + 0,008	0,038283
12.	4) — 5)	9644,9	28.	log 27)	8,58301
13.	Zähler	9646,1	29.	log 1200	3,07918
14.	$\log t_{27} : \nu$	0,47376	30.	28) + 29)	1,66219
15.	log 62,4	1,79518	31.	$\log \nu$	1,70378
16.	14) + 15)	2,26894	32.	$\log \beta'_{26}$	9,95841
			33.	β'_{26}	0,90868

11. Kinderversicherung. Hierunter wollen wir die Versicherung auf den Todes- und Lebensfall verstehen, bei der die jährlichen Beiträge nicht von dem Eintrittsalter abhängen, sondern nur nach der Dauer des Vertrags abgestuft sind. Zur Berechnung der jährlichen Beiträge wird angenommen, daß

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Kinder vom Lebensalter 0, 1, 2, ... bis zu dem höchsten Beitrittsalter n, das die Bank für derartige Versicherungen zuläßt, denselben Versicherungsvertrag abschließen, demzufolge das versicherte Kapital beim Tode des Ver-

sicherten, spätestens aber nach einer bestimmten Anzahl y von Jahren ausgezahlt wird; die jährlichen Beiträge, für alle gleichzeitig Eintretenden die gleichen, sollen y mal gezahlt werden.

Aus naheliegenden Gründen empfiehlt sich bei diesen Versicherungen, eine Wartezeit von zwei oder drei Jahren einzurichten.

Wir wollen die jährlichen Reinbeiträge unter der Voraussetzung berechnen, daß drei Wartejahre bestehen, während deren für Todesfälle die unverkürzten und unverzinsten Beiträge rückgewährt werden.

Überträgt man alle Leistungen der Versicherten, wie der Bank, auf den Anfang der Versicherung, so erhält man für die Bankeinnahmen

$$[(a_0 + a_1 + \dots + a_n) + (a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1}) r + (a_2 + \dots + a_{n+2}) r^2 + \dots + (a_{y-1} + \dots + a_{n+y-1}) r^{y-1}] b_y \quad .$$

Die Bankausgaben sind bei einer Versicherung auf den Todes- und Lebensfall für die Summe 1, wenn der Tarifbeitrag mit b'_y bezeichnet wird,

$$(c_1 + c_2 + \dots + c_{n+1}) r b'_y + 2 (c_2 + \dots + c_{n+2}) r^2 b'_y + 3 (c_3 + \dots + c_{n+3}) r^3 b'_y + (c_4 + \dots + c_{n+4}) r^4 + (c_5 + \dots + c_{n+5}) r^5 + \dots + (c_y + \dots + c_{n+y}) r^y + (a_y + a_{y+1} + \dots + a_{n+y}) r^y \quad .$$

Hiernach ist es nötig, die Summen

$$a_x + a_{x+1} + \dots + a_{x+n}$$

von $x = 0$ bis zu der größten vorkommenden Versicherungsdauer zu berechnen und in einer besonders einzurichtenden Haupttafel für Kinderversicherungen zusammenzustellen. Setzt man

$$1) \qquad a_x + a_{x+1} + \dots + a_{x+n} = \mathfrak{a}_x \quad ,$$

so wird man neben den $\mathfrak{a}_x$ eine Spalte der Zahlen

$$2) \qquad \mathfrak{a}_x r^x = \mathfrak{l}_x$$

anordnen. Die entsprechenden Spalten

$$3) \quad \begin{cases} c_{x+1} + c_{x+2} + \dots + c_{n+x+1} = \mathfrak{c}_{x+1} \quad , \\ (c_{x+1} + c_{x+2} + \dots + c_{n+x+1}) r^{x+1} = \mathfrak{t}_{x+1} \end{cases}$$

stellt man ebenfalls her. Das Zusammenzählen der Totenzahlen kann man dabei ersparen, denn es ist

$$4) \qquad c_{x+1} + c_{x+2} + \dots + c_{n+x+1} = a_x - a_{x+n+1} \quad .$$

Unter Verwendung der neuen Zeichen hat man für $\mathfrak{b}_y$ die Gleichung

$$(\mathfrak{l}_0 + \mathfrak{l}_1 + \dots + \mathfrak{l}_{y-1}) \mathfrak{b}_y = (\mathfrak{t}_1 + 2 \mathfrak{t}_2 + 3 \mathfrak{t}_3) b'_y + (\mathfrak{t}_4 + \mathfrak{t}_5 + \dots + \mathfrak{t}_y) + \mathfrak{l}_y \quad .$$

Daher ist schließlich, wenn man noch

$$\mathfrak{l}_0 + \mathfrak{l}_1 + \dots + \mathfrak{l}_y = \mathfrak{L}_y \, , \quad \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2 + \dots + \mathfrak{t}_y = \mathfrak{T}_y$$

$$\mathfrak{t}_1 + 2 \mathfrak{t}_2 + 3 \mathfrak{t}_3 + \dots + y \mathfrak{t}_y = \mathrm{T}_y$$

setzt,

$$b_y = \frac{\mathfrak{T}_y - \mathfrak{T}_3 + \mathfrak{l}_y + f \cdot \mathrm{T}_3}{\mathfrak{L}_{y-1} - (1 + m) \mathrm{T}_3} \quad .$$

Beispiel: Wie groß ist der jährliche Tarifbeitrag für eine Kinderversicherung über 1500 Mark, zahlbar nach Ablauf von 15 Jahren, bezw. bei vorherigem Ableben, wenn die ersten drei Versicherungsjahre Wartejahre in oben angegebenem Sinne sind, wenn $m = 0{,}15$ $f = 0{,}005$ angenommen werden, und zu dieser Versicherung nur Kinder bis zu 9 Jahren hinzutreten dürfen?

Der Reinbeitrag für die Summe 1 Mark ist

$$b_{15} = \frac{\mathfrak{T}_{15} - \mathfrak{T}_3 + \mathfrak{l}_{15} + 0{,}005\, T_8}{\mathfrak{L}_4 - 1{,}15\, T_3}$$

hieraus folgt der Tarifbeitrag für 1500 Mark zu

$$b'_{15} = (1{,}15\, b_{15} + 0{,}005)\, 1500 \quad .$$

1.	$\mathfrak{T}_{15}$	79967,5	13.	log 7)	5,57002
2.	$\mathfrak{l}_{15}$	347230	14.	log 12)	6,85619
3.	1) + 2)	427198	15.	$\log b_{15}$	8,71383
4.	$\mathfrak{T}_3$	56051	16.	log 1,15	0,06070
5.	3) — 4)	371147	17.	15) + 16)	8,77453
6.	$0{,}005\, T_8$	400	18.	num 17)	0,059501
7.	Zähler	371547	19.	18) + 0,005	0,064501
8.	$1{,}1\, T_3$	87966,1	20.	log 19)	8,80957
9.	$0{,}05\, T_8$	3998,5	21.	log 1500	3,17609
10.	$1{,}15\, T_3$	91964,6	22.	$\log b'_{15}$	1,98566
11.	$\mathfrak{L}_{14}$	7271180	23.	b'_{15}	96,752
12.	Nenner	7179215			

12. Kinderversicherung auf den Erlebensfall ohne Rückgewähr. Soll die Versicherungssumme 1 am Ende des y-ten Versicherungsjahres ausgezahlt werden, wenn das Kind dieses Alter erreicht, während im Falle früheren Todes kein Anspruch an die Bank erhoben wird, so hat man

a) für den einmaligen Reinbeitrag

$$\mathfrak{l}_0 B_y = \mathfrak{l}_y \quad ,$$

$$B_y = \frac{\mathfrak{l}_y}{\mathfrak{l}_0} \quad ;$$

b) der jährliche Reinbeitrag ergibt sich aus

$$\mathfrak{L}_{y-1}\, b_y = \mathfrak{l}_y \quad ,$$

$$b_y = \frac{\mathfrak{l}_y}{\mathfrak{L}_{y-1}} \quad .$$

13. Kinderversicherung auf den Erlebensfall mit Rückgewähr der gezahlten Beiträge im Falle vorzeitigen Todes.

a) Einmaliger Reinbeitrag:

$$B_y = \mathfrak{l}_y + (\mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2 + \ldots + \mathfrak{t}_y)(1 + m B_y + f) \quad ,$$

$$B_y = \frac{\mathfrak{l}_y + f \cdot \mathfrak{T}_y}{1 - (1 + m)\,\mathfrak{T}_y} \quad ;$$

b) jährlicher Reinbeitrag:

$$\mathfrak{L}_{y-1} \cdot b_y = \mathfrak{l}_y + (\mathfrak{t}_1 + 2\,\mathfrak{t}_2 + \ldots + y\,\mathfrak{t}_y)(1 + m\, b_y + f) \quad ,$$

$$b_y = \frac{\mathfrak{l}_y + f \cdot T_y}{\mathfrak{L}_{y-1} - (1 + m)\, T_y} \quad .$$

Beispiel: Für ein Kind wird gegen jährliche Beiträge die Summe 1200 Mark versichert, zahlbar nach 12 Jahren, falls das Kind noch lebt; bei früherem Ableben werden die Beiträge rückgewährt; alles übrige wie im vorigen Beispiele.

Der jährliche Reinbeitrag b_{12} für 1 Mark und Tarifbeitrag b'_{12} für 1500 ergeben sich zu

$$b_{12} = \frac{\mathfrak{l}_{12} + 0{,}005\,T_{12}}{\mathfrak{L}_{11} - 1{,}15\,T_{12}}\,, \quad b'_{12} = (1{,}15\,b_{12} + 0{,}005)\,1200 \quad .$$

1.	$\mathfrak{l}_{12}$	390030	9.	log 3)	5,59229
2.	$0{,}005\,T_{12}$	1067,8	10.	log 8)	6,77005
3.	Zähler	391098	11.	$\log b_{12}$	8,82224
4.	$1{,}1\,T_{12}$	234924	12.	log 1,15	0,06070
5.	$0{,}05\,T_{12}$	10678	13.	11) + 12)	8,88294
6.	$1{,}15\,T_{12}$	245602	14.	num 13)	0,076373
7.	$\mathfrak{L}_{11}$	6134730	15.	14) + 0,005	0,081373
8.	Nenner	5889128	16.	b'_{12}	97,648

§ 4. Feierzeitversicherung.

1. Versicherungen für die Feierzeit (dauernde Erwerbsunfähigkeit, Invalidität) bestehen entweder selbständig, für Renten, die mit der Feierzeit beginnen, oder für Renten, die mit der Feierzeit, spätestens aber mit einem bestimmten Alter beginnen, oder für Versicherungssummen, die mit Eintritt der Feierzeit oder doch spätestens bei Erreichung eines bestimmten Alters ausgezahlt werden, — oder sie werden mit Versicherungen auf den Lebens- oder Todesfall in passender Weise verbunden.

Die Benutzung dieser Versicherungsgelegenheit ist bis jetzt noch nicht so verbreitet, daß man aus den eignen Erfahrungen der Gesellschaften eine ganz befriedigende Statistik darüber hätte ableiten können, wie groß für jedes Lebensalter das Verhältnis der lebenden Schaffenden d_x (Aktiven) zu dem der Feiernden e_x (Invaliden) ist; man muß vielmehr sich auf Zahlen stützen, die aus Beobachtungen bestimmter Berufsgruppen abgeleitet sind.

Es ist sicher, daß die Sterblichkeit der Feiernden größer ist als die der Schaffenden; insbesondere ist bei den Personen, die aus den Schaffenden vom Lebensalter x im Laufe des nächsten Lebensjahres zu den Feiernden übertreten, die Sterblichkeit gewiß erheblich größer, als gemäß der den Lebensversicherungen zugrunde liegenden Absterbeordnung. Auch für diese Zahlen wäre eine vollständigere Statistik zu wünschen.

Wir schließen unsere Rechnungen an die statistischen Untersuchungen an, die auf Grund reichhaltiger Unterlagen Zimmermann im Jahre 1886 veröffentlicht hat*). Die Beobachtungen beziehen sich allerdings nur auf Eisenbahnbeamte; es ist aber besser, diese über eine sehr große Anzahl von Personen und mehrere Jahre ausgedehnten Beobachtungen zu verwenden, als, wozu Heym**) 1863 noch genötigt war, auf Zusammenfassungen, die sich nur auf ein sehr beschränktes Beobachtungsfeld bezogen, mit Hilfe willkürlicher Annahmen die Feierzeitversicherung aufzubauen.

Zimmermanns Sterbetafel für Dienstunfähige (a. a. O., Tafel XII, S. 100) zeigt selbst von Zeuners, nicht auf auserlesenes Material bezüglicher Sterbetafel, sehr große Abweichungen; der Gang der Tafel ist ein ganz andrer, als bei den Absterbeordnungen, die den Todesfallversicherungen zugrunde gelegt werden. Es ist daher nicht erlaubt, für das Absterben der Feiernden eine der gewöhnlichen Ordnungen, auch nicht die Heymsche Sächsische Tafel (Heym, a. a. O., S. 66 und 67), oder etwa die Zillmersche für deutsche Männer und Frauen

*) Zimmermann, Über Dienstunfähigkeits- und Sterbeverhältnisse. Berlin 1886.
**) Heym, Die Kranken- und Invalidenversicherung. Leipzig 1863.

mit verhältnismäßig erhöhter jährlicher Sterblichkeit zugrunde zu legen, sondern es bleibt nichts übrig, als die ZIMMERMANNsche Absterbeordnung für Feiernde trotz oder vielmehr gerade wegen ihres abweichenden Ganges zu verwenden.

Für das Absterben der Schaffenden und Feiernden zusammen muß man die Absterbeordnung nehmen, die den Versicherungen auf den Lebens- und Todesfall zugrunde liegen.

Um nun zu einer brauchbaren Haupttafel für Feierzeitversicherungen zu kommen, kann man zunächst ermitteln, wie sich aus einer übrigens willkürlichen Zahl etwa 20jähriger Schaffender durch Absterben und Übertritt zu den Feiernden von Jahr zu Jahr die Zahlen der Schaffenden (d_x) und der Feiernden (e_x) entwickeln.

Nimmt man
$$d_{20} = a_{20}\,, \qquad e_{20} = 0 \quad ,$$
so ist für jedes höhere Alter
$$d_x + e_x = a_x \quad .$$

Für das Übertrittsverhältnis i_x, d. i für die Zahl, die man mit d_x multiplizieren muß, um die Anzahl derer zu finden, die von d_x Schaffenden im Laufe des Lebensjahres $x+1$ zu den Feiernden übertreten, benutzen wir ZIMMERMANNs Tafel XIV (a. a. O., S. 104); von diesen $d_x i_x$ neuen Feiernden sterben etliche im Laufe dieses Jahres; nimmt man an, der Übertritt sowie das Absterben seien gleichmäßig über das Jahr verteilt, so kann man sagen, diese $d_x i_x$ Personen hätten nur ein halbes Jahr lang unter Beobachtung gestanden. Ist v_x das Absterbeverhältnis für Feiernde vom Alter x, d. i. sterben von e_x Feiernden im Laufe des nächsten Jahres $e_x v_x$, so hat man anzunehmen, daß von den obigen $d_x i_x$ neuen Feiernden im Laufe des Jahres nicht $d_x i_x v_x$, sondern nur die Hälfte, also $\frac{1}{2} d_x i_x v_x$ sterben. Da nun von den e_x Feiernden des Alters x im Laufe des $(x+1)$-ten Jahres $e_x v_x$ sterben, so hat man für die Zahl der Feiernden vom Alter $x+1$

$$1)\quad \begin{cases} e_{x+1} = e_x - e_x v_x + d_x i_x - \frac{1}{2} d_x i_x v_x \\ \phantom{e_{x+1}} = e_x + d_x i_x - (e_x + \frac{1}{2} d_x i_x) v_x \quad . \end{cases}$$

Die Schaffenden vom Alter $x+1$ erhält man nun aus

$$2)\qquad d_{x+1} = a_{x+1} - e_{x+1} \quad .$$

Mit Hilfe der ZIMMERMANNschen Werte für i_x und v_x und der in unserer Haupttafel enthaltenen a_x ist mittels der Formeln 1) und 2) die Tafel der Grundzahlen für Feierzeitversicherung berechnet worden. Dabei ist noch zu bemerken, daß vom Lebensalter $x = 71$ an die ZIMMERMANNschen v_x durch die unserer Haupttafel entsprechenden ersetzt werden mußten, und zwar deshalb, weil die letztern von da ab etwas größer sind und daher bei fortgesetzter Benutzung der ZIMMERMANNschen v_x die Reihe der d_x vorzeitig zu Ende gegangen wäre. Für die Anwendungen ist die Abänderung unbedenklich.

In der Haupttafel für Feiernde sind zunächst die Spalten 1 bis 11 berechnet worden, die bei den Feierzeitversicherungen gebraucht werden und keiner Erläuterung bedürfen. Die Spalten 12 bis 15 enthalten die Hauptzahlen für die Absterbeordnung der Feiernden: Spalte 12 enthält die Anzahl ε_x der Feiernden, die lediglich durch allmähliches Absterben, ohne Zutritt neuer Feiernder, aus $\varepsilon_x = 10000$ zwanzigjährigen Feiernden hervorgehen.

Die Spalte 17 enthält die Logarithmen der Verhältniszahlen

$$\lambda_x = \frac{e_x}{\varepsilon_x} \quad .$$

Mit Hilfe dieser Zahlen findet man leicht, wie viele von e_x Feiernden das höhere Alter y erreichen; man erhält nämlich $\lambda_x \varepsilon_y$.

2. Feierzeitrente. Gegen einmaligen Beitrag oder gegen jährliche Beiträge, die über ein gewisses Alter hinaus nicht fortzusetzen sind, übrigens aber bei früherem Tode oder Antritt der Feierzeit endigen, versichert eine $x$jährige Person eine Feierzeitrente von 1 Mark; dabei soll die Rente vom 70. Lebensjahre an nicht bloß den Feiernden, sondern allen Überlebenden zufallen.

Um den Zeitwert Q_x am Anfange der Versicherung und damit den einmaligen Beitrag zu finden, nehmen wir an, d_x Personen schließen denselben Vertrag ab; ferner wird angenommen, daß die Rente am Ende des Jahres anfängt, in dem der Anfang der Feierzeit liegt.

Man beachte noch, daß von d_x Schaffenden vom Alter x das Alter 70

$$a_{70} - \lambda_x \varepsilon_{70}$$

erreichen, da a_{70} von $d_x + e_x$ Personen überleben, also von a_{70} die abgezogen werden müssen, die von e_x Feiernden des Alters x das Alter 70 erreichen. Man hat daher

$$1)\quad \begin{cases} d_x r^x Q_x = e_{x+1} r^{x+1} + e_{x+2} r^{x+2} + \ldots + e_{69} r^{69} \\ \qquad + \dfrac{1}{a_{70}} (a_{70} - \lambda_x \varepsilon_{70})(a_{70} r^{70} + a_{71} r^{71} + \ldots) \\ \qquad - \lambda_x (\varepsilon_{x+1} r^{x+1} + \ldots + \varepsilon_{69} r^{69}) \quad . \end{cases}$$

Von den Renten an die Feiernden

$$e_{x+1}\ ,\quad e_{x+2}\ ,\quad \ldots\quad e_{69}$$

und die Überlebenden vom Alter 70 gehen nämlich die Renten ab, die an die Feiernden zu zahlen sind, die aus den e_x Feiernden vom Alter x durch allmähliches Absterben hervorgehen.

Benutzt man die Zeichen

$$2)\quad \begin{cases} s_x = d_x r^x\ , \quad f_x = e_x r^x\ , \quad \varphi_x = \varepsilon_x r^x\ , \\ S_x = s_x + s_{x+1} + \ldots + s_{75}\ , \\ F_x = f_x + f_{x+1} + \ldots + f_{75}\ , \\ \Phi_x = \varphi_x + \varphi_{x+1} + \ldots + \varphi_{75}\ , \end{cases}$$

so hat man einfacher

$$3)\quad s_x Q_x = F_{x+1} - \lambda_x (\Phi_{x+1} + \varphi_{70} R_{70} - \Phi_{70}) + l_{70} R_{70} - F_{70}\ .$$

Der jährliche Beitrag mit Beitragsfreiheit vom Alter u an ist eine Rente der Schaffenden, die sofort anfängt und mit dem Alter u aufhört; sie hat also am Nullpunkte den Wert

$$(s_x + s_{x+1} + \ldots + s_{u-1})\, b_x\ .$$

Daher hat man die Einnahme

$$(S_x - S_u)\, b_x\ ;$$

folglich ergibt sich

$$4)\quad (S_x - S_u)\, b_x = F_{x+1} - \lambda_x (\Phi_{x+1} + \varphi_{70} R_{70} - \Phi_{70}) + l_{70} R_{70} - F_{70}\ .$$

Beispiel: Eine 35jährige Person versichert eine Feierzeitrente von 1800 Mark, die spätestens bei Vollendung des 70. Lebensjahres beginnen soll; wie groß ist a) der einmalige; b) der jährliche Beitrag, wenn vom 55. Lebensjahre an Beitragsfreiheit eintreten soll?

Die Formeln sind

$$s_{35} Q_{35} = [F_{36} - \lambda_{35} (\Phi_{36} + \varphi_{70} R_{70} - \Phi_{70}) + l_{70} R_{70} - F_{70}] \cdot 1800$$

$$(s_{35} - s_{55})\, b_{35} = s_{35} Q_{35}\ .$$

Die Rechnung ist so angeordnet, wie es für den Fall zweckmäßig ist, daß mehrere Rechnungen für verschiedene Eintrittsalter durchgeführt werden müssen.

1.	$\log \varphi_{70}$	1,53655	16.	F_{86}	35031
2.	$\log l_{70}$	3,26212	17.	F_{86} + 11)	40748
3.	$\log R_{70}$	0,82982	18.	num 15)	2013
4.	1) + 3)	2,36637	19.	17) — 18)	38735
5.	2) + 3)	4,09194	20.	S_{85}	237594
6.	$\varphi_{70} R_{70}$	232	21.	S_{55}	39635
7.	$l_{70} R_{70}$	12358	22.	$S_{85} - S_{55}$	197959
8.	Φ_{70}	155	23.	log 19)	4,58811
9.	$\varphi_{70} R_{70} - \Phi_{70}$	77	24.	$\log s_{35}$	4,18622
10.	F_{70}	6641	25.	log 22)	5,29658
11.	$l_{70} R_{70} - F_{70}$	5717	26.	23) — 24)	0,40189
12.	Φ_{36} + 9)	8777	27.	23) — 25)	9,29153
13.	log 12)	3,94335	28.	$Q_{35} : 1800$	2,523
14.	$\log \lambda_{35}$	9,36058	29.	$b_{35} : 1800$	0,1957
15.	13) + 14)	3,30393	30.	Q_{35}	4541
			31.	b_{35}	352,3

3. Abgebrochene Feierzeitrente. Eine mit einem bestimmten Lebensalter aufhörende Feierzeitrente kommt wohl nie selbständig vor, tritt aber mit andern Versicherungsarten verbunden auf, z. B. mit einer Kapitalversicherung für das Alter x, oder mit einer Versicherung auf den Lebens- und Todesfall derart, daß Beitragsfreiheit eintritt, wenn der Versicherte vor dem Ende des Vertrags feiern muß, u. a. m.

Wird die Rente im Alter z zum letzten Male gezahlt, und ist ihr Zeitwert beim Anfange des Vertrags Q_x^z, so hat man

$$d_x r^x Q_x^z = e_{x+1} r^{x+1} + \ldots + e_z r^z - \lambda_x (\varepsilon_{x+1} r^{x+1} + \ldots + \varepsilon_z r^z) \quad ,$$

woraus folgt

$$1) \qquad Q_x^z = \frac{1}{s_x} [F_{x+1} - F_{z+1} - \lambda_x (\Phi_{x+1} - \Phi_{z+1})] \quad .$$

Werden jährliche Beiträge gezahlt, mit Beitragsfreiheit vom Eintritte der Feierzeit, spätestens vom Alter u an, so hat man

$$(d_x r^x + d_{x+1} r^{x+1} + \ldots + d_{u-1} r^{u-1}) b_x = s_x Q_x \quad ,$$

woraus folgt

$$2) \qquad b_x = \frac{F_{x+1} - F_{z+1} - \lambda_x (\Phi_{x+1} - \Phi_{z+1})}{S_x - S_u} \quad .$$

4. Wenn eine Kapitalversicherung auf den Todesfall, oder auf den Lebens- und Todesfall, so abgeschlossen wird, daß jährliche Beiträge b_x gezahlt werden, die mit dem Eintritte in die Feierzeit, spätestens im Alter u aufhören, so kann man annehmen, daß d_x Schaffende denselben Versicherungsvertrag abschließen. Daher sind die auf den Nullpunkt übertragenen Bankeinnahmen

$$(d_x r^x + d_{x+1} r^{x+1} + \ldots + d_{u-1} r^{u-1}) b_x = (S_x - S_u) b_x \quad .$$

Die Ausgaben erfolgen an die Gruppe von Personen, die aus d_x Schaffenden vom Alter x hervorgehen, und zwar an die Todesfälle dieser Gruppe, bezw. an die Überlebenden vom Alter y. Sie ergeben sich daher, wenn man die Ausgaben für eine Gruppe von $d_x + e_x = a_x$

Personen, die im Alter x sich versichern, verkürzt um die Leistungen für die Gruppe von e_x feiernden Personen vom Eintrittsalter x. Hiernach erhält man die Bankausgabe

$$\begin{aligned}(a_x - a_{x+1}) r^{x+1} + (a_{x+1} - a_{x+2}) r^{x+2} + \ldots + (a_{y-1} - a_y) r^y + a_y r^y \\ - \lambda_x[(\varepsilon_x - \varepsilon_{x+1}) r^{x+1} + \ldots + (\varepsilon_{y-1} - \varepsilon_y) r^y + \varepsilon_y r^y] \\ = l_x - (1-r)(L_x - L_y) - \lambda_x[\varphi_x - (1-r)(\Phi_x - \Phi_y)] \\ = l_x - \lambda_x \varphi_x - (1-r)[L_x - L_y - \lambda_x(\Phi_x - \Phi_y)] \quad .\end{aligned}$$

Daher hat man

$$b_x = \frac{l_x - \lambda_x \varphi_x - (1-r)[L_x - L_y - \lambda_x(\Phi_x - \Phi_y)]}{S_x - S_u} \quad .$$

Beispiel: $x = 36$, $u = 55$, $y = 65$, versichertes Kapital 9000 Mark.

Formel: $$b = \frac{l_{36} - \lambda_{36}\varphi_{36} - (1-r)[L_{36} - L_{65} - \lambda_{36}(\Phi_{36} - \Phi_{65})]}{S_{36} - S_{55}} \cdot 9000 \quad .$$

1.	Φ_{36}	8700	17.	num 16)	7922
2.	Φ_{65}	395	18.	num 8)	224
3.	1) — 2)	8305	19.	17) + 18)	8146
4.	log 3)	3,91911	20.	l_{36}	14890
5.	log S_{36}	2,90284	21.	20) — 19)	6744
6.	log λ_{36}	9,44805	22.	log 21)	3,82892
7.	4) + 6)	3,36716	23.	log 9000	3,95424
8.	5) + 6)	2,35089	24.	S_{36}	222226
9.	num 7)	2329	25.	S_{55}	39635
10.	L_{65}	24777	26.	24) — 25).	182591
11.	9) + 10)	27106	27.	22) + 23)	7,78316
12.	L_{36}	261376	28.	log 26)	5,26148
13.	12) — 11)	234270		log b	2,52168
14.	log 13)	5,36972		b	332,42
15.	log (1 — r)	8,52913			
16.	14) + 15)	3,89885			

5. Es könnte scheinen, als ob bei dieser Versicherung die Rechnung auch anders geführt werden dürfte: Man rechnet zunächst den jährlichen Beitrag b' ohne Voraussetzung der Beitragsfreiheit während der Feierzeit aus, und berechnet dann den jährlichen Beitrag β', durch den man eine Feierzeitrente b' erwirbt, die bis zum Tode, längstens aber bis zur Erreichung des Alters $u - 1$ währt; verbindet man beide Versicherungen, so hat das in der Tat die Wirkung, daß vom Anfange der Feierzeit an die Beiträge des Versicherten sich gegen die gleich hohe Feierzeitrente aufheben. Rechnet man demgemäß, so ergibt sich nicht derselbe Beitrag, wie oben. Man sieht auch unschwer ein, daß das gar nicht anders sein kann. Denn in den allgemeinen Absterbeordnungen enthalten die a_x Lebenden des Alters x, von denen man ausgeht, sowohl Schaffende als Feiernde; wenn man selbstredend Feiernden den Eintritt in eine Lebensversicherung verweigert, so wird sich das in einem Gewinn aus Untersterblichkeit fühlbar machen, in der Berechnung der Beiträge kommt diese Tatsache aber nicht zum Vorschein.

Nun könnte man einwenden, daß es bei jeder Versicherung auf den Lebens- und Todesfall richtiger wäre, nicht von a_x Lebenden überhaupt, sondern von d_x Schaffenden auszugehen, da, wie schon bemerkt, nur Schaffende zugelassen

werden: wenn aber bei der Versicherung der Unterschied zwischen Feiernden und Schaffenden gar keine Rolle spielt, so ist es nicht verwerflich, von a_x Lebenden überhaupt auszugehen und dadurch mit Bewußtsein eine rechnerische Grundlage zu wählen, die für die Gesellschaft etwas zu ungünstig ist. Wenn aber bei der Versicherung die Unterscheidung von Schaffenden und Feiernden eine wesentliche Rolle spielt, so wäre es widersinnig, wenn man nicht schon von Anfang an die Schaffenden von den Feiernden unterscheiden wollte.

§ 5. Beurteilung einer Feierzeitkasse.

1. Eine Aktiengesellschaft beabsichtigt für ihre Arbeiter eine Feierzeitkasse einzurichten. Dank einer Stiftung des Begründers der Fabrik ist ein Kapital von 36 500 Mark vorhanden, das sich zu $3^1/_2$ % verzinst, und aus dessen Erträgen, die sich auf jährlich 1277,5 Mark belaufen, Unterstützungen an feiernde Arbeiter, sowie in besondern Notstandsfällen, gewährt werden. Die Erträge dieser Stiftung sollen von nun an der Feierzeitkasse zugewendet werden.

Den gegenwärtigen Arbeitern soll der Zutritt zur Kasse freigestellt, und weder Eintrittsgeld noch Nachzahlung von Beiträgen von ihnen gefordert werden.

Allen Arbeitern, die nach der Begründung der Kasse von der Fabrikleitung eingestellt werden, sollen zum Beitritte zur Kasse verpflichtet sein.

Der jährliche Beitrag eines Arbeiters soll 15 Mark betragen. Ebensoviel wird aus den laufenden Einnahmen der Fabrik jährlich zur Feierzeitkasse gezahlt werden.

Die Fabrikleitung wird bemüht sein, für künftig neu einzustellende Arbeiter ein Durchschnittsalter von 25 Jahren möglichst festzuhalten, und Arbeiter, die erheblich älter als 25 Jahre sind, nur in den seltensten Ausnahmefällen anstellen. Wenn Arbeiter bei ihrem Arbeitsantritte über 25 Jahre alt sind, so haben sie die Jahresbeiträge vom 25. Jahre an nachzuzahlen. Diese Nachzahlungen können bis zum Anfange der Feierzeitrente gestundet werden, unter Anrechnung von $4^1/_2$ % Verzugszinsen.

Hiernach darf rechnerisch angenommen werden, daß alle neu eintretenden Arbeiter 25 Jahre alt sind.

Bei der Fabrik kam seit Jahren Arbeiterwechsel durch Kündigung seitens der Leitung oder des Arbeiters nur selten vor. Sollte in Zukunft ein Arbeiter nach ordnungsgemäßer Kündigung ausscheiden, so kann er Mitglied der Feierzeitkasse bleiben, hat aber jährlich den doppelten Beitrag (30 Mark) zu zahlen, und nur Anspruch auf $^2/_3$ der gewöhnlichen Feierzeitrente. Arbeiter, die von der Leitung entlassen werden, scheiden aus der Kasse aus und erhalten ihre Beiträge unverkürzt und unverzinst zurück. Arbeiter, die ohne ordnungsmäßige Kündigung die Arbeit verlassen, verlieren damit alle Ansprüche an die Feierzeitkasse.

Die Feierzeitrente wird nur an feiernde Arbeiter gewährt, die mindestens 15 Jahre lang bei der Fabrik in Arbeit standen bezw. 15 Jahresbeiträge geleistet haben. Wenn ein Kassenmitglied vor Ablauf dieser Zeit arbeitsunfähig wird, so werden ihm die gezahlten Beiträge unverkürzt und unverzinst zurückgewährt. Die gleiche Rückgewähr erhalten die Hinterlassenen von Arbeitern, die vor dem Genusse der Feierzeitrente sterben; nach dem Anfange des Rentengenusses findet keine Rückgewähr statt.

Die Feierzeitrente wird am Ende eines Jahres an die dann lebenden Feiernden bezahlt, die die Wartezeit (n Jahre) hinter sich haben; also an Arbeiter, die mit x Jahren eintreten, zum ersten Male an die lebenden Feiernden vom Alter $x+n+1$. Für die, die im Laufe des Lebensjahres $x+n+1$ erst feiern und dann sterben, bevor sie $x+n+1$ Jahre alt geworden sind, hat die Kasse die Beiträge zurückzuzahlen; der sehr unerhebliche Ausgabeposten für diese sehr wenig zahlreichen Fälle kann bei der Rechnung außer Betracht bleiben.

2. Die Fabrik beschäftigt gegenwärtig 61 Arbeiter, deren Lebensalter und gegenwärtige Arbeitsdauer aus folgender Tafel zu ersehen ist.

Nr.	Zahl der Arbeiter	Alter	Dauer	Nr.	Zahl der Arbeiter	Alter	Dauer	Nr.	Zahl der Arbeiter	Alter	Dauer	Nr.	Zahl der Arbeiter	Alter	Dauer
1	1	19	1	15	1	29	1	29	1	37	7	43	2	46	15
2	1	21	2	16	1	29	7	30	1	38	1	44	1	47	15
3	1	23	1	17	1	30	2	31	1	38	5	45	1	48	15
4	1	24	1	18	1	30	6	32	1	39	3	46	1	50	9
5	1	24	2	19	2	30	8	33	1	40	2	47	1	51	3
6	1	25	1	20	1	31	3	34	1	40	7	48	1	51	11
7	1	25	2	21	1	32	0	35	1	40	15	49	1	52	4
8	2	26	2	22	1	32	6	36	1	41	6	50	1	52	15
9	1	27	1	23	1	33	2	37	1	41	14	51	1	54	14
10	2	27	3	24	2	34	0	38	1	43	2	52	1	55	2
11	1	27	6	25	1	35	9	39	1	44	7	53	1	55	15
12	1	28	0	26	1	37	0	40	1	44	8	54	1	57	15
13	1	28	2	27	1	37	2	41	1	45	13	55	1	60	15
14	1	28	4	28	1	37	3	42	1	46	3	56	1	62	15

Da bei der Kasse in Anbetracht der nur kleinen Mitgliederzahl die zu gewährende Feierzeitrente erheblich hinter der theoretisch berechneten zurückbleiben muß, und es dann auf einige Prozente des Unterschiedes nicht ankommt, so darf man, um die Rechnung abzukürzen, die Arbeiter gruppenweise zusammenfassen, und mit mittleren Lebensaltern und mittleren Wartezeiten rechnen.

An Stelle des wirklich vorhandenen Bestandes wurde folgender Ersatzbestand zugrunde gelegt:

Ersatz für Nr.	Anzahl	Eintritts-alter	Wartezeit
1 bis 10	12	26	13
11, 16	2	28	9
12, 13, 15	3	28	14
14, 17	2	29	12
18, 19, 22	4	31	7
20, 21, 23, 24	5	33	13
26, 27, 28	3	37	13
25, 29, 31	3	36	8
30, 32, 33	3	39	13
34, 36	2	41	8
35, 37, 41	3	42	0
39, 40	2	44	7
38, 42	2	45	12
43, 44, 45	4	47	0
46, 48	2	50	5
47, 49, 52	3	52	12
50, 51, 53, 54	4	55	0
55, 56	2	61	0

3. Wir suchen nun den heutigen Wert aller Leistungen, zu denen die Kasse für eine Gruppe von d_x Arbeitern vom Lebensalter x und für alle diejenigen, die als Ersatz für Feiernde und Abgestorbene eintreten, verpflichtet ist. Bezeichnet man den Zeitwert der Kassenleistungen für einen Arbeiter und seinen Ersatz mit A_x^n, wobei n die Zahl der noch nicht abgelaufenen Wartejahre bezeichnet, so ist der Zeitwert der Kassenausgaben für die ganze Gruppe, übertragen auf ihren Nullpunkt,

$$s_x A_x^n \quad .$$

Während der Wartezeit hat man am Ende des Versicherungsjahres y für alle, die durch Arbeitsunfähigkeit oder Tod ausscheiden, also für

$$d_{x+y-1} - d_{x+y}$$

den $y$fachen Jahresbeitrag b, sowie, wegen der in gleicher Anzahl neu eintretenden 25 jährigen Arbeiter

$$(d_{x+y-1} - d_{x+y}) A_{25}^{15}$$

in Ausgabe zu stellen. Auf den Nullpunkt übertragen ergibt dies

$$y \cdot (d_{x+y-1} - d_{x+y}) r^{x+y} \cdot b + (d_{x+y-1} - d_{x+y}) r^{x+y} \cdot A_{25}^{15}$$

oder

$$y \cdot (r s_{x+y-1} - s_{x+y}) \cdot b + (r s_{x+y-1} - s_{x+y}) \cdot A_{25}^{15} \quad .$$

Setzt man zur Abkürzung

$$r s_x - s_{x+1} = \sigma_x \quad ,$$

so hat man daher bis zum Ende der Wartezeit die Ausgaben, übertragen auf den Nullpunkt:

$$(\sigma_x + 2\sigma_{x+1} + 3\sigma_{x+2} + \dots + n\sigma_{x+n-1}) b$$
$$+ (\sigma_x + \sigma_{x+1} + \sigma_{x+2} + \dots + \sigma_{x+n-1}) A_{25}^{15} \quad .$$

Vom Ablaufe der Wartezeit an erfolgt die Rückgewähr der Beiträge nur noch für die in Arbeit Gestorbenen, bis zum Ende des 64. Lebensjahres; der hierzu nötige, auf den Nullpunkt übertragene Betrag ist, wenn die auf den Nullpunkt übertragenen, schaffend im Laufe des x-ten Lebensjahres Sterbenden mit

$$\mathfrak{t}_x \; ^{*)}$$

bezeichnet werden,

$$[(n+1)\mathfrak{t}_{x+n+1} + (n+2)\mathfrak{t}_{x+n+2} + \dots + (65-x)\mathfrak{t}_{65}] \cdot b \quad .$$

Hierzu kommt die Ausgabe für die zum Ersatze der wegfallenden Schaffenden eintretenden 25 jährigen Arbeiter, nämlich

$$(\sigma_{x+n} + \sigma_{x+n+1} + \dots + \sigma_{64}) A_{25}^{15} \quad .$$

Ferner ist noch die Ausgabe für die aus den d_{x+n} Schaffenden vom Alter $x+n$ hervorgehenden Feiernden anzusetzen. Wird die Zahl dieser Feiernden, die im Lebensalter z vorhanden sind, übertragen auf den Nullpunkt, mit $\mathfrak{f}_z$, und die Höhe der jährlichen Feierzeitrente mit J bezeichnet, so hat man

$$(\mathfrak{f}_{x+n+1} + \mathfrak{f}_{x+n+2} + \dots + \mathfrak{f}_{64}) \cdot J \quad .$$

Endlich hat man noch die Ausgabe für sämtliche Arbeiter anzusetzen, die von der Gruppe der d_x Arbeiter das 65. Lebensjahr erreichen. Diese Ausgabe besteht aus zwei Teilen. Der erste ist eine lebenslängliche Rente von der Höhe J, und beträgt daher, auf den Nullpunkt übertragen,

$$\frac{a_{65} - \lambda_x \varepsilon_{65}}{a_{65}} L_{65} \cdot J \quad ,$$

oder

$$\delta_x L_{65} \cdot J \quad ,$$

---

*) Eine Verwechselung dieses Zeichens $\mathfrak{t}$ mit dem ähnlichen, in andrer Bedeutung in § 3, Nr. 11 bis 13 gebrauchten $\mathfrak{t}$ ist wohl nicht zu befürchten.

wobei abkürzungsweise gesetzt worden ist

$$\delta_x = \frac{a_{65} - \lambda_x \varepsilon_{65}}{a_{65}} = \frac{l_{65} - \lambda_x \varphi_{65}}{l_{65}} \quad .$$

Der andre Teil rührt her von den d_{65} eintretenden 25jährigen Arbeitern und beträgt

$$s_{65} A_{25}^{15} \quad .$$

Daher ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} s_x A_x^n &= (\sigma_x + 2\,\sigma_{x+1} + 3\,\sigma_{x+2} + \ldots + n\,\sigma_{x+n-1}) \cdot b \\ &+ [(n+1)\,\mathfrak{t}_{x+n+1} + (n+2)\,\mathfrak{t}_{x+n+2} + \ldots + (65-x)\,\mathfrak{t}_{65}] \cdot b \\ &+ (\sigma_x + \sigma_{x+1} + \ldots + \sigma_{64} + s_{65}) A_{25}^{15} \\ &+ (\mathfrak{f}_{x+n+1} + \mathfrak{f}_{x+n+2} + \ldots + \mathfrak{f}_{64}) \cdot J \\ &+ \delta_x \cdot L_{65} \cdot J \quad . \end{aligned}$$

4. Wir verwenden diese Formel zunächst zur Berechnung von A_{25}^{15}, indem wir $x = 25$, $n = 15$ setzen, und erhalten:

$$\begin{aligned} &(s_{25} - s_{65} - \sigma_{25} - \sigma_{26} - \ldots - \sigma_{64}) \cdot A_{25}^{15} \\ &= [\sigma_{25} + 2\,\sigma_{26} + \ldots + 15\,\sigma_{39} + 16\,\mathfrak{t}_{41} + 17\,\mathfrak{t}_{42} + \ldots + 40\,\mathfrak{t}_{65}] \cdot b \\ &+ (\mathfrak{f}_{41} + \mathfrak{f}_{42} + \ldots + \mathfrak{f}_{64} + \delta_{25} L_{65}) \cdot J \quad . \end{aligned}$$

Der erste Klammerinhalt ergibt

$$1) \quad \left\{ \begin{aligned} &s_{25} - s_{65} - r\,s_{25} + s_{26} - r\,s_{26} + s_{27} - \ldots - r\,s_{64} + s_{65} \\ &\quad = (1-r)(s_{25} + s_{26} + \ldots + s_{64}) \\ &\quad = (1-r)(S_{25} - S_{65}) \quad . \end{aligned} \right.$$

Um ferner die Summe

$$\sigma_{25} + 2\,\sigma_{26} + 3\,\sigma_{27} + \ldots + 15\,\sigma_{39}$$

und ähnliche, zwischen andern Lebensaltern ausgedehnte Summen, wie sie in

$$s_x A_x^n$$

vorkommen, zu berechnen, ist es zweckmäßig, die Summen zu ermitteln

$$2) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_{x+1} + \ldots + \sigma_{64} &= r\,s_x - s_{x+1} + r\,s_{x+1} - s_{x+2} + \ldots + r\,s_{64} - s_{65} \\ &= r(s_x + s_{x+1} + \ldots + s_{64}) - (s_{x+1} + s_{x+2} + \ldots + s_{65}) \\ &= s_x - s_{65} - (1-r)(S_x - S_{65}) \quad . \end{aligned} \right.$$

Bezeichnet man diese Zahl mit

$$\Sigma_x \quad ,$$

so hat man

$$3) \quad \sigma_x + 2\,\sigma_{x+1} + \ldots + n\,\sigma_{x+n-1} = \Sigma_x + \Sigma_{x+1} + \ldots + \Sigma_{x+n-1} - n\,\Sigma_{x+n} \quad .$$

Insbesondere also ist

$$4) \quad \sigma_{25} + 2\,\sigma_{26} + 3\,\sigma_{27} + \ldots + 15\,\sigma_{39} = \Sigma_{25} + \Sigma_{26} + \Sigma_{27} + \ldots + \Sigma_{39} - 15\,\Sigma_{40} \quad .$$

Ferner findet man sofort

$$\begin{aligned}&(n+1)\mathfrak{t}_{x+n+1}+(n+2)\mathfrak{t}_{x+n+2}+\dots+(65-x)\mathfrak{t}_{65}\\ &=n(\mathfrak{t}_{x+n+1}+\mathfrak{t}_{x+n+2}+\dots+\mathfrak{t}_{65})\\ &+\mathfrak{t}_{x+n+1}+2\,\mathfrak{t}_{x+n+2}+3\,\mathfrak{t}_{x+n+3}+\dots+(65-x-n)\mathfrak{t}_{65}\quad.\end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{aligned}U_x&=\mathfrak{t}_x+\mathfrak{t}_{x+1}+\dots+\mathfrak{t}_{65}\\ \mathfrak{U}_x&=\mathfrak{t}_x+2\,\mathfrak{t}_{x+1}+3\,\mathfrak{t}_{x+2}+\dots+(65-x)\mathfrak{t}_{65}\quad,\end{aligned}$$

so hat man

$$5)\quad (n+1)\mathfrak{t}_{x+n+1}+(n+2)\mathfrak{t}_{x+n+2}+\dots+(65-x)\mathfrak{t}_{65}=n\,U_{x+n+1}+\mathfrak{U}_{x+n+1}\;:$$

insbesondere ist

$$16\,\mathfrak{t}_{41}+17\,\mathfrak{t}_{42}+\dots+40\,\mathfrak{t}_{65}=15\,U_{41}+\mathfrak{U}_{41}\quad.$$

Endlich hat man

$$\mathfrak{f}_{z+1}+\mathfrak{f}_{z+2}+\dots+\mathfrak{f}_{64}=F_{z+1}-F_{65}-\lambda_z(\Phi_{z+1}-\Phi_{65})\quad,$$

und insbesondere

$$6)\qquad \mathfrak{f}_{41}+\mathfrak{f}_{42}+\dots+\mathfrak{f}_{64}=F_{41}-F_{65}-\lambda_{40}(\Phi_{41}-\Phi_{65})\quad.$$

Daher ergibt sich

$$7)\qquad \begin{cases}(1-r)(S_{25}-S_{65})A_{25}^{15}\\ =[\Sigma_{25}+\Sigma_{26}+\dots+\Sigma_{39}-15\,\Sigma_{40}+15\,U_{41}+\mathfrak{U}_{41}]\cdot b\\ +[F_{41}-F_{65}-\lambda_{40}(\Phi_{41}-\Phi_{65})+\delta_{25}L_{65}]\cdot J\quad.\end{cases}$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$8)\qquad A_{25}^{15}=M\cdot b+N\cdot J\quad,$$

wobei M und N aus 7) hervorgehen.

5. Mit Hilfe der Formel Nr. 4, 8) ergibt sich nun für das Eintrittsalter x und die noch zurückzulegende Wartezeit n die Kassenleistung

$$\begin{aligned}s_x A_x^n&=[\Sigma_x+\Sigma_{x+1}+\dots+\Sigma_{x+n-1}-n\,\Sigma_{x+n}+n\,U_{x+n+1}+\mathfrak{U}_{x+n+1}]\cdot b\\ &+[F_{x+n+1}-F_{65}-\lambda_{x+n}(\Phi_{x+n+1}-\Phi_{65})+k_x L_{65}]\cdot J\\ &+[s_x-(1-r)(S_x-S_{65})]\cdot(M\cdot b+N\cdot J)\quad.\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$1)\qquad A_x^n=M_x^n\cdot b+N_x^n\cdot J\quad,$$

wobei also

$$2)\qquad \begin{cases}s_x M_x^n\\ =\Sigma_x+\dots+\Sigma_{x+n-1}-n\,\Sigma_{x+n}+n\,U_{x+n+1}+\mathfrak{U}_{x+n+1}\\ \qquad+[s_x-(1-r)(S_x-S_{65})]\,M\quad,\\ s_x N_x^n\\ =F_{x+n+1}-F_{65}-\lambda_{x+n}(\Phi_{x+n+1}-\Phi_{65})+\delta_x L_{65}\\ \qquad+[s_x-(1-r)(S_x-S_{65})]\,N\quad.\end{cases}$$

6. Etwas einfacher gestaltet sich die Formel für die Ausgabe, wenn der eintretende $x$jährige Arbeiter die Wartezeit bereits hinter sich hat. Bezeichnen wir die auf den Eintrittstag übertragene Kassenleistung mit

$$A_x \quad ,$$

so ergibt sich sofort

$$1) \quad \begin{cases} s_x A_x = [\mathfrak{t}_{x+1} + 2\,\mathfrak{t}_{x+2} + \ldots + (65 - x)\,\mathfrak{t}_{65}] \cdot b \\ \qquad + [\mathfrak{f}_{x+1} + \mathfrak{f}_{x+2} + \ldots + \mathfrak{f}_{64} + k_x L_{65}] \cdot J \\ \qquad + (\sigma_x + \sigma_{x+1} + \ldots + \sigma_{64} + s_{65}) \cdot A_{25}^{15} \quad . \end{cases}$$

Daher ist

$$2) \qquad A_x = M_x \cdot b + N_x \cdot J \quad ,$$

wobei

$$s_x M_x = \mathfrak{U}_{x+1} + [s_x - (1 - r)(S_x - S_{65})]\, M \quad ,$$

$$s_x N_x = F_{x+1} - F_{65} + \lambda_x (\Phi_{x+1} - \Phi_{65}) + \delta_x L_{65} + [s_x - (1 - r)(S_x - S_{65})]\, N .$$

7. Um diese Zahlen zu berechnen, ist es zweckmäßig, der Haupttafel für Feierzeitversicherungen einige Spalten hinzuzufügen. Vermindert man die Anzahl der im x-ten Lebensjahre Sterbenden

$$a_{x-1} - a_x \quad ,$$

um die in diesem Jahre sterbenden Feiernden

$$(e_x + \tfrac{1}{2} i_x d_x)\, v_x \quad ,$$

so verbleibt die Anzahl der in diesem Jahre sterbenden Schaffenden (Spalte 2 der beifolgenden Tafel, S. 470).

Hieraus ergeben sich die Zahlen Spalte 3, 4,

$$\log \mathfrak{t}_x , \qquad \mathfrak{t}_x$$

und durch schrittweises Zusammenzählen vom Ende aus alsdann Spalte 5 und 6

$$U_x = \mathfrak{t}_x + \mathfrak{t}_{x+1} + \ldots + \mathfrak{t}_{65} \quad ,$$

$$\mathfrak{U}_x = \mathfrak{t}_x + 2\,\mathfrak{t}_{x+1} + 3\,\mathfrak{t}_{x+2} + \ldots = U_x + U_{x+1} + \ldots + U_{65} \quad .$$

Die Spalten 5 bis 12 bedürfen keiner Erläuterung.

Es ist ferner zweckmäßig, die Zahlen

$$\Sigma_x$$

vollständig beisammen zu haben, und die Berechnung der Summen

$$\Sigma_x + \Sigma_{x+1} + \ldots + \Sigma_y$$

wenigstens geeignet vorzubereiten, indem man etwa für $x = 25$, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60 die Summen ermittelt

$$\Sigma_x' = \Sigma_x + \Sigma_{x+1} + \Sigma_{x+2} + \Sigma_{x+3} + \Sigma_{x+4} \quad .$$

Um damit z. B.

$$\Sigma_{25} + \Sigma_{26} + \ldots + \Sigma_{39}$$

zu ermitteln, hat man nur die drei Zahlen

$$\Sigma_{25}' + \Sigma_{30}' + \Sigma_{35}'$$

zusammenzuzählen.

Die Berechnung von

$$\Sigma_{28} + \Sigma_{29} + \ldots + \Sigma_{43}$$

ergibt sich aus

$$\Sigma_{28} + \Sigma_{29} + \Sigma_{30}' + \Sigma_{35}' + \Sigma_{40}' - \Sigma_{44} \quad .$$

x	1 Im Lebensjahre x sterbende Schaffende	2 log 1)	3 log t_x	4 t_x	5 $U_x = t_x + \ldots + t_{65}$	6 $\mathfrak{U}_x = t_x + 2t_{x+1} + \ldots$
25						
26	357	2,55267	2,16422	146	4376	76694
27	369	56703	16364	146	4230	72318
28	399	60097	18264	152	4084	68088
29	413	61595	18268	152	3932	64004
30	434	63749	18928	155	3780	60072
31	425	62839	16524	146	3625	56292
32	433	63649	15840	144	3479	52667
33	444	64738	15435	143	3335	49188
34	479	68034	17237	149	3192	45853
35	451	65418	13127	135	3043	42661
36	486	68664	14879	141	2908	39618
37	472	67394	12115	132	2767	36710
38	490	69020	12247	133	2635	33943
39	482	68305	10038	126	2502	31308
40	497	69636	09875	126	2376	28806
41	482	68305	07050	118	2250	26430
42	485	68574	05825	114	2132	24180
43	496	69548	05305	113	2018	22048
44	480	68124	02387	106	1905	20030
45	497	69636	02405	106	1799	18125
46	498	69723	00998	102	1693	16326
47	482	68305	1,98086	96	1591	14633
48	537	72997	2.01284	103	1495	13042
49	520	71600	1,98393	96	1392	11547
50	541	73320	98619	97	1296	10155
51	494	69373	93177	85	1199	8859
52	585	76716	99026	98	1114	7660
53	592	77232	98048	96	1016	6546
54	592	77232	96554	92	920	5530
55	593	77305	95133	89	828	4610
56	574	75891	92225	84	739	3782
57	601	77887	92727	85	655	3043
58	599	77743	91089	81	570	2388
59	632	80072	91924	83	489	1818
60	655	81624	91982	83	406	1329
61	599	77743	86607	74	323	923
62	597	77597	84967	71	249	600
63	545	73640	79516	62	178	351
64	533	72673	77055	59	116	173
65	536	72916	75804	57	57	57

	7	8	9	10	11	12	13
x	$S_x - S_{65}$	log $(S_x - S_{65})$	$\log(1-r)\cdot(S_x - S_{65})$	$(1-r)\cdot(S_x - S_{65})$	$S_x - S_{65}$	Σ_x	$\Sigma_x + \ldots + \Sigma_{x+1}$
25	428517	5,63197	4,16110	14491	22306	7815	37402
26	404716	60715	13628	13686	21339	7653	
27	381882	58193	11106	12914	20401	7487	
28	359986	55628	08541	12173	19487	7314	
29	339004	53020	05933	11464	18597	7133	
30	318912	50367	03280	10785	17741	6956	33021
31	299676	47665	00578	10134	16916	6782	
32	281265	44912	3,97825	9511	16118	6607	
33	263652	42103	95016	8916	15346	6430	
34	246811	39237	92150	8346	14592	6246	
35	230724	36310	89223	7802	13873	6071	28552
36	215356	33316	86229	7283	13170	5887	
37	200691	30253	83166	6787	12497	5710	
38	186696	27114	80027	6314	11844	5530	
39	173360	23895	76808	5862	11216	5354	
40	160649	20588	73501	5433	10608	5175	24144
41	148546	17187	70100	5023	10026	5003	
42	137025	13680	66593	4634	9463	4829	
43	126067	10060	62973	4263	8917	4654	
44	115655	06317	59230	3911	8394	4483	
45	105766	02435	55348	3577	7885	4308	19754
46	96386	4,98401	51314	3259	7392	4133	
47	87499	94200	47113	2959	6917	3958	
48	79087	89811	42724	2675	6446	3771	
49	71146	85215	38128	2406	5990	3584	
50	63661	80388	33301	2153	5542	3389	14891
51	56624	75300	28213	1915	5113	3198	
52	50016	69911	22824	1691	4677	2986	
53	43844	64191	17104	1483	4252	2769	
54	38097	58089	11002	1288	3837	2549	
55	32765	51541	04454	1108	3434	2326	9336
56	27836	44461	2,97374	941	3044	2103	
57	23297	36730	89643	788	2660	1872	
58	19142	28199	81112	647	2286	1639	
59	15361	18642	71555	520	1916	1396	
60	11950	07737	60650	404	1553	1149	3370
61	8902	3,94949	47862	301	1208	907	
62	6199	79232	32145	210	876	666	
63	3828	58297	11210	130	565	435	
64	1768	24748	1,77661	60	273	213	

8. Die für den vorliegenden Fall nötigen Werte von δ_x erhält man aus folgender Rechnung:

x	$\log \lambda_x$	$\log \frac{\varphi_{65}}{l_{65}} \cdot \lambda_x$	$\log \delta_x$
26	8,34631	6,6418	9,99981
28	8,63056	6,9261	99963
29	8,75518	7,0507	99951
31	8,97808	7,2736	99918
33	9,17738	7,4729	99871
37	9,53197	7,8275	99707
36	9,44805	7,7436	99759
39	9,69338	7,9889	99574
41	9,84495	8,1405	99396
44	0,06187	8,3574	99000
45	0,13182	8,4274	98822
50	0,47710	8,7726	97348
52	0,61668	8,9122	96298
42	9,91849	8,2140	99283
47	0,26988	8,5654	98373
55	0,81896	9,1145	93944
61	1,18870	9,4842	84203
25	8,20645	6,5020	99986

9. Für A_{25}^{15} ergeben sich folgende Zahlen:

1.	$\Sigma_{25} + \ldots$	98975	15.	14) — 13)	17264
2.	$15\,\Sigma_{40}$	77625	16.	$\log \delta_{25}$	9,99986
3.	1) — 2)	21350	17.	$\log L_{65}$	4,39405
4.	$15\,U_{41}$	33750	18.	16) + 17)	3,39391
5.	$\mathfrak{U}_{41}$	26430	19.	num 18)	24769
6.	$(1-r)(S_{25}-S_{65})M$	81530	20.	15)	17264
7.	$\Phi_{41} - \Phi_{65}$	5001	21.	19) + 21)	42033
8.	log 7)	3,69906	22.	log 6)	4,91132
9.	$\log \lambda_{40}$	9,77029	23.	log 21)	4,62359
10.	8) + 9)	3,46935	24.	$\log(1-r)(S_{25}-S_{65})$	4,16110
11.	num 10)	2947	25.	$\log M$	0,75022
12.	F_{65}	13789	26.	$\log N$	0,46249
13.	11) + 12)	16736	27.	M	5,626
14.	F_{40}	34000	28.	N	2,901

Also hat man

$$A_{25}^{15} = 5{,}626 \cdot b + 2{,}901 \cdot J \;.$$

10. Die Ausrechnung der Zahlen

$$M_x^n \quad \text{und} \quad N_x^n$$

kann nach folgender Anordnung erfolgen.

1	x	26	28	28	29	31
2	$y = x + n$	39	37	42	41	38
3	z	12	2	3	2	4
4	s_x	22834	20982	20982	20092	18411
5	$(1-r)(S_x - S_{65})$	13686	12173	12173	11464	10134
6	4) — 5)	9148	8809	8809	8628	8277
7	log 6)	3,96133	3,94493	3,94493	3,93591	3,91787
8	7) + log M	4,71155	4,69515	4,69515	4,68613	4,66809
9	7) + log N	4,42382	4,40842	4,40742	4,39840	4,38036
10	$\Phi_{y+1} - \Phi_{65}$	5536	6782	4075	4516	6128
11	log 10)	3,74320	3,83136	3,61013	3,65475	3,78732
12	$\log \lambda_y$	9,69338	9,53197	9,91849	9,84495	9,61404
13	11) + 12)	3,43658	3,36333	3,52862	3,49970	3,40136
14	num 13)	2733	2309	3378	3160	2520
15	14) + F_{65}	16522	16098	17167	16949	16309
16	F_{y+1}	34000	34561	32980	33345	34292
17	$\log \delta_x L_{65}$	4,39386	4,39368	4,39368	4,39356	4,39323
18	$\delta_x L_{65}$	24766	24756	24756	24749	24731
19	num 9)	26535	25611	25552	25026	24008
20	16) — 15)	17478	18463	15813	16396	17983
21	$s_x N_x^n$	68779	68830	66121	66171	66722
22	$n U_{y+1}$	30888	23715	28252	25584	17514
23	$\mathfrak{U}_{y+1}$	28806	33943	22048	24180	31308
24	$\Sigma_x + \ldots$	16204	8036	18592	13845	5023
25	num 8)	51470	49562	49562	48543	46568
26	$s_x M_x^n$	127368	115256	118454	112152	100413
27	log 26)	5,10506	5,06166	5,07355	5,04981	5,00178
28	log 21)	4,83745	4,83778	4,82034	4,82067	4,82427
29	$\log s_x$	4,35858	4,32185	4,32185	4,30313	4,26507
30	$\log M_x^n$	0,74648	0,73981	0,75170	0,74668	0,73671
31	$\log N_x^n$	0,47887	0,51593	0,49849	0,51954	0,55920
32	M_x^n	5,578	5,493	5,646	5,581	5,454
33	N_x^n	3,012	3,280	3,151	3,308	3,624
34	$z M_x^n$	66,936	10,986	16,938	11,162	21,816
35	$z N_x^n$	36,144	6,560	9,453	6,616	14,496

1	x	33	37	36	39	41
2	$y = x + n$	46	50	44	52	49
3	z	5	3	3	3	2
4	s_x	16841	13992	14665	12711	11521
5	$(1-r)(S_x - S_{65})$	8916	6787	7283	5862	5023
6	4) — 5)	7925	7205	7382	6849	6498
7	log 6)	3,89900	3,85763	3,86817	3,83563	3,81278
8	7) + $\log M$	4,64922	4,60785	4,61839	4,58385	4,56300
9	7) + $\log N$	4,36149	4,32012	4,33066	4,29812	4,27527
10	$\Phi_{y+1} - \Phi_{65}$	2668	1682	3308	1304	1897
11	log 10)	3,42619	3,22583	3,51957	3,11528	3,27807
12	$\log \lambda_y$	0,20115	0,47710	0,06187	0,61668	0,40780
13	11) + 12)	3,62734	3,70293	3,58144	3,73196	3,68587
14	num 13)	4240	5046	3815	5395	4851
15	14) + F_{65}	18029	18835	17604	19184	18640
16	F_{x+1}	31226	28899	32165	27455	29545
17	$\log \delta_x L_{65}$	4,39276	4,39112	4,39164	4,38979	4,38801
18	$\delta_x L_{65}$	24704	24611	24640	24535	24435
19	num 9)	22987	20899	21412	19866	18848
20	16) — 15)	13197	10064	14561	8271	10905
21	$s_x N_x^n$	60888	55574	60613	52672	54188
22	$n U_{y+1}$	20683	15587	14392	13208	10368
23	$\mathfrak{U}_{y+1}$	14633	8859	18125	6546	10155
24	$\Sigma_x + \dots$	15951	16435	6278	17021	6467
25	num 8)	44588	40537	41533	38357	36559
26	$s_x M_x^n$	95855	81418	80328	75132	63549
27	log 26)	4,98162	4,91072	4,90487	4,87582	4,80311
28	log 21)	4,78453	4,74487	4,78256	4,72158	4,73390
29	$\log s_x$	4,22637	4,14589	4,16629	4,10419	4,06148
30	$\log M_x^n$	0,75525	0,76483	0,73858	0,77163	0,74163
31	$\log N_x^n$	0,55816	0,59898	0,61627	0,61739	0,67242
32	M_x^n	5,692	5,819	5,478	5,910	5,516
33	N_x^n	3,615	3,972	4,133	4,144	4,704
34	$z M_x^n$	28,470	17,457	16,434	17,730	11,032
35	$z N_x^n$	18,075	11,916	12,399	12,432	9,408

1	x	44	45	50	52
2	$y = x + n$	51	57	55	64
3	z	2	2	2	3
4	s_x	9889	9380	7037	6172
5	$(1 - r)(S_x - S_{65})$	3911	3577	2153	1691
6	4) — 5)	5978	5803	4884	4481
7	log 6)	3,77656	3,76365	3,68878	3,65137
8	7) + $\log M$	4,52678	4,51387	4,43900	4,40159
9	7) + $\log N$	4,23905	4,22614	4,15127	4,11386
10	$\Phi_{y+1} - \Phi_{65}$	1485	596	844	0
11	log 10)	3,17173	2,77525	2,92634	
12	$\log \lambda_y$	0,54681	0,94663	0,81896	
13	11) + 12)	3,71854	3,72188	3,74530	
14	num 13)	5231	5271	5563	
15	14) + F_{65}	19020	19060	19352	
16	F_{y+1}	28204	22819	24857	864
17	$\log \delta_x L_{65}$	4,38405	4,38227	4,36753	4,35703
18	$\delta_x L_{65}$	24213	24114	23309	22753
19	num 9)	17340	16832	14167	12998
20	16) — 15)	9184	3759	5505	864
21	$s_x N_x''$	50737	44705	42981	36615
22	$n U_{y+1}$	7798	6840	3695	684
23	$\mathfrak{U}_{y+1}$	7660	2388	3782	57
24	$\Sigma_x + \ldots$	5240	16610	3261	18241
25	num 8)	33634	32649	27479	25211
26	$s_x M_x''$	54332	58487	38217	44193
27	log 26)	4,73506	4,76706	4,58226	4,64535
28	log 21)	4,70533	4,65036	4,63328	4,56366
29	$\log s_x$	3,99516	3,97219	3,84738	3,79044
30	$\log M_x''$	0,73990	0,79487	0,73488	0,85491
31	$\log N_x''$	0,71017	0,67817	0,78590	0,77322
32	M_x''	5,494	6,235	5,431	7,160
33	N_x''	5,131	4,766	6,108	5,932
34	$z M_x''$	10,988	12,470	10,862	21,480
35	$z N_x''$	10,262	9,532	12,216	17,796

1	x	42	47	55	61
2	z	3	4	4	2
3	$\Sigma_x + s_{65}$	6324	5453	3821	2402
4	log 3)	3,80099	3,73664	3,58218	3,38057
5	4) + $\log M$	4,55121	4,48686	4,33240	4,13079
6	4) + $\log N$	4,26348	4,19913	4,04467	3,84306
7	num 5)	35580	30680	21498	13514
8	$\mathfrak{U}_{x+1}$	22048	13042	3782	600
9	$s_x M_x$	57628	43722	25280	14114
10	$\log \delta_x L_{65}$	4,38688	4,37778	4,33349	4,23608
11	$\Phi_{x+1} - \Phi_{65}$	4075	2388	844	211
12	log 11)	3,61013	3,37803	2,92634	2,32428
13	$\log \lambda_x$	9,91849	0,26988	0,81896	1,18870
14	12) + 13)	3,52862	3,64791	3,74530	3,51298
15	num 14)	3378	4445	5563	3258
16	$F_{x+1} - F_{65}$	19191	16916	11068	4197
17	num 10)	24371	23866	21552	17222
18	num 6)	18343	15817	11083	6967
19	$s_x N_x$	65283	61044	49266	31644
20	$\log s_x M_x$	4,76063	4,64070	4,40278	4,14965
21	$\log s_x N_x$	4,81480	4,78564	4,69254	4,50029
22	$\log s_x$	4,03974	3,92490	3,69273	3,43185
23	$\log M_x$	0,72089	0,71580	0,71005	0,71780
24	$\log N_x$	0,77506	0,86074	0,99981	1,06845
25	M_x	5,259	5,198	5,129	5,222
26	N_x	5,956	7,257	9,996	11,707
27	$z M_x$	15,777	20,792	20,516	10,444
28	$z N_x$	17,868	29,028	39,984	23,414

11. Die Ergebnisse dieser Rechnung sind in folgender Tafel zusammengestellt:

x	y	z	M_x^n	N_x^n	$z M_x^n$	$z N_n^x$
26	39	12	5,578	3,012	66,94	36,14
28	37	2	5,493	3,280	10,99	6,56
28	42	3	5,646	3,151	16,94	9,45
29	41	2	5,581	3,308	11,16	6,62
31	38	4	5,454	3,624	21,82	14,50
33	46	5	5,692	3,615	28,46	18,08
37	50	3	5,819	3,972	17,46	11,92
36	44	3	5,478	4,133	16,43	12,40
39	52	3	5,910	4,144	17,73	12,43
41	49	2	5,516	4,704	11,03	9,41
44	51	2	5,494	5,131	10,99	10,26
45	57	2	6,235	4,766	12,47	9,53
50	55	2	5,431	6,108	10,86	12,22
52	64	3	7,160	5,932	21,48	17,80
42	42	3	5,259	5,956	15,78	17,87
47	47	4	5,198	7,257	20,79	29,03
55	55	4	5,129	9,996	20,52	39,98
61	61	2	5,222	11,707	10,44	23,41
					342,29	297,61

12. Die Arbeiter tragen jährlich 915 Mark bei; da die Fabrik den gleichen Betrag zuschießt, so stehen aus beiden Quellen zusammen 1830 Mark zur Verfügung; dies entspricht bei $3^1/_2{}^0/_0$ Verzinsung dem Kapitale

$$52143 \text{ Mark} .$$

Mit dem Stiftungskapitale

$$36500 \text{ Mark}$$

gibt dies zusammen

$$88643 \text{ Mark} .$$

Man hat daher die Gleichung

$$342{,}29 \cdot 15 + 297{,}61 \cdot J = 88643$$

$$297{,}61 \cdot J = 88643 - 5134$$

$$= 83509 ,$$

$$J = 280{,}9 .$$

Die Feierzeitrente kann unbedenklich auf 260 Mark festgesetzt werden, sobald sich die Fabrik bereit erklärt, im Bedarfsfalle das Fehlende zuzuschießen; zum Ausgleiche könnte die Bestimmung getroffen werden, daß diese etwaigen Zuschüsse in Jahren, wo die Kasse Überschüsse macht, zurückgezahlt werden. Jedenfalls aber ist es nötig, daß wenigstens von vier zu vier Jahren die Kasse durch einen Versicherungsmathematiker geprüft und die Höhe der Feierzeitrente für die nächsten vier Jahre von neuem festgestellt wird.

§ 6. Renten- und Kapitalversicherungen für zwei verbundene Leben.

1. Wenn Einnahmen und Ausgaben der Bank in einem bestimmten Versicherungsfalle davon abhängen, ob zwei heute lebende Personen nach einer gewissen Anzahl von Jahren noch leben, oder eine bestimmte der beiden Personen, oder irgend eine, oder keine noch lebt, so ist es nötig, eine Absterbeordnung für Paare aufzustellen.

Wir gehen von $a_x \cdot a_y$ Paaren aus, deren jedes aus einer $x$jährigen und einer $y$jährigen Person besteht. Im Laufe des nächsten Jahres sterben von den $x$jährigen $c_{x+1} \cdot a_y$, und von den $y$jährigen $a_x c_{y+1}$. Die Summe $c_{x+1} a_y + a_x c_{y+1}$ ist größer als die Anzahl der in diesem Jahre sich auflösenden Paare, denn in beiden Posten ist die Zahl der Paare enthalten, bei denen in diesem Jahre beide Teile sterben. Daher lösen sich im ersten Jahre

$$c_{x+1} a_y + a_x c_{y+1} - c_{x+1} c_{y+1}$$

Paare auf. Hierfür kann man setzen

$$c_{x+1}(a_y - c_{y+1}) + a_x c_{y+1} = (a_x - a_{x+1}) a_{y+1} + a_x (a_y - a_{y+1})$$
$$= a_x a_y - a_{x+1} a_{y+1} \quad .$$

Hieraus folgt, daß von $a_x a_y$ Paaren, deren jedes aus einer $x$jährigen und einer $y$jährigen Person besteht, nach einem Jahre noch $a_{x+1} a_{y+1}$ Paare vollständig sind.

Die Absterbeordnung der Paare besteht also aus der Reihe

$$a_x a_y \,, \quad a_{x+1} a_{y+1} \,, \quad a_{x+2} a_{y+2} \,, \quad \ldots$$

Setzen wir

$$a_u a_v \equiv a_{u,v} \quad ,$$

so haben wir die Absterbeordnung

$$a_{x,y} \,, \quad a_{x+1,y+1} \,, \quad a_{x+2,y+2} \,, \quad \ldots$$

Handelt es sich darum, die Beiträge für alle Wertpaare x, y zu berechnen, die innerhalb gewisser, durch die Versicherungsbedingungen festgestellten Grenzen liegen, so hat man die umständliche Arbeit vor sich, für jedes zulässige Wertpaar x, y eine besondere Absterbeordnung, und mit deren Hilfe auch eine besondere Haupttafel zu berechnen. Wir werden weiter unten zeigen, wie man diese großen Rechenarbeiten abkürzen kann; übrigens darf bei dieser Gelegenheit bemerkt werden, daß richtige und ausreichende mathematische Grundlagen für jedes Versicherungsunternehmen ganz unerläßlich notwendig sind. Man wird selbstredend diese Rechnungen, wie alle andern Arbeiten, möglichst zweckmäßig und sparsam einrichten; man darf sich aber keinesfalls aus übel angebrachter Sparsamkeit dazu verleiten lassen, behufs einer Verringerung des Aufwandes für Rechnungen die sichern mathematischen Grundlagen zu verlassen.

Dazu kommt, daß der Aufwand für die mathematischen Zahlen nur einmal nötig ist; denkt man ihn auf eine Reihe von Jahren verteilt, so kommt er gegenüber dem Verwaltungsaufwande einer nur einigermaßen entwickelten Gesellschaft kaum in Betracht.

2. Wie groß ist der heutige Wert $R_{x,y}$ einer Leibrente 1, zahlbar an ein Paar, dessen Bestandteile x und y Jahre alt sind, solange das Paar vollständig ist?

Man hat unter den bekannten Voraussetzungen, wenn man auf den Nullpunkt der $x$jährigen Person überträgt,

$$a_{x,y} r^x R_{x,y} = a_{x,y} r^x + a_{x+1,y+1} r^{x+1} + \ldots$$

$$R_{x,y} = \frac{a_{x,y} r^x + a_{x+1,y+1} r^{x+1} + a_{x+2,y+2} r^{x+2} + \ldots}{a_{x,y} r^x}$$

Setzt man zur Abkürzung

1) $$l_{x,y} = a_{x,y} r^x, \quad L_{x,y} = l_{x,y} + l_{x+1,y+1} + \cdots$$

so hat man

2) $$R_{x,y} = \frac{L_{x,y}}{l_{x,y}} .$$

3. Soll die Rente gezahlt werden, solange von dem Paare überhaupt noch eine Person am Leben ist, also bis zum Tode der zuletzt sterbenden, so bemerke man, daß von den x jährigen Personen der $a_x a_y$ Paare das Alter $x+n$ erreichen $a_{x+n} a_y$, und von den y jährigen das Alter $y+n$ von $a_x a_{y+n}$ erreicht wird; die Summe beider Zahlen

$$a_{x+n} a_y + a_x a_{y+n}$$

übertrifft die Summe aller nach n Jahren Rentenberechtigten um die Anzahl der in n Jahren noch vollständigen Paare, weil diese Zahl in jedem der beiden Posten vorkommt, jedem Paare aber doch ebenso, wie jedem überlebenden Bestandteile, nur die Rente 1 gezahlt wird. Die Rente 1 ist daher nach n Jahren zahlbar an

$$a_{x+n} a_y + a_{y+n} a_x - a_{x+n} a_{y+n}$$

Empfangsberechtigte.

Der Zeitwert der Rente bei ihrem Anfange ist daher

$$R_x + R_y - R_{x,y} .$$

4. Die Rente 1 Mark wird gezahlt, wenn die heute x jährige Person gestorben ist, der andre Bestandteil aber noch lebt (Überlebensrente).

Von $a_x a_y$ Personen, die heute x jährig sind, leben in n Jahren noch $a_{x+n} a_y$, sind also vorher verstorben $(a_x - a_{x+n}) a_y$. Von den andern Bestandteilen der dadurch aufgelösten Paare leben nach n Jahren noch

$$(a_x - a_{x+n}) a_{y+n} = a_x a_{y+n} - a_{x+n, y+n} .$$

Die Überlebensrente ist daher

$$U_{x,y} = R_y - R_{x,y} .$$

5. Der Zeitwert einer stetigen Leibrente von 1 Mark Höhe ergibt sich, wenn stetige Kapitalbildung vorausgesetzt wird (§ 2, Nr. 14) zu

1) $$\mathrm{R}_x = \int_0^\infty \frac{a_{x+z}}{a_x} v^z \, dz \quad ;$$

ebenso hat man für die stetige Rente zahlbar an ein Paar

2) $$\mathrm{R}_{x,y} = \int_0^\infty \frac{a_{x+z, y+z}}{a_{x,y}} v^z \, dz .$$

Um diese Integrale berechnen zu können, muß man a_{x+z} bezw. $a_{x+z, y+z} = a_{x+z} a_{y+z}$ als Funktion von z kennen.

Legt man das GOMPERTZ-MAKEHAMsche Gesetz zugrunde (§ 1, Nr. 7), so hat man

$$a_{x+z} = c K^{q^{x+z}} h^{x+z}, \quad a_x = c K^{q^x} h^x ,$$

$$\frac{a_{x+z}}{a_x} = \frac{B_x^{q^z}}{B_x} h^z ,$$

wenn zur Abkürzung

$$B_x = K^{q^x}$$

gesetzt wird. Hierdurch verwandeln sich 1) und 2) in

$$3)\qquad \mathrm{R}_x = \frac{1}{B_x}\int_0^\infty B_n^{q^z}(h\cdot v)^z\,dz \quad ,$$

$$4)\qquad \mathrm{R}_{x,y} = \frac{1}{B_x B_y}\int_0^\infty (B_x B_y)^{q^z}(h^z v)^z\,dz \quad .$$

Zur vollständigen Berechnung der Verbindungsrenten $S_{x,y}$ für alle Alter x und y hat man hier nicht nötig, die Auswertung des Integrals Nr. 4 für alle Wertpaare x und y durchzuführen, die innerhalb der durch die Versicherungsbedingungen bestimmten Grenzen liegen; man erkennt vielmehr ohne Schwierigkeit, daß es genügt, die Verbindungsrenten für Personen gleichen Alters zu berechnen.

Hat man nämlich für alle Zahlen x die Renten

$$\mathrm{R}_{x,x}$$

berechnet, und will man dann $\mathrm{R}_{u,v}$ bestimmen, so berechne man x aus der Gleichung

$$5)\qquad B_x^2 = B_u B_v \quad .$$

Ist der hieraus folgende Wert von B_x unter denen für ganzzahlige x, so ist offenbar

$$6)\qquad \mathrm{R}_{u,v} = \frac{1}{B_x^2}\int_0^\infty (B_x^2)^{q^z}(h^2 v)^z\,dz = \mathrm{R}_{x,x} \quad .$$

Im allgemeinen ergibt sich aus 5) ein Wert für B_x, der zwischen zwei zu ganzen Zahlen gehörigen B liegt; alsdann schaltet man den gesuchten Wert $\mathrm{R}_{u,v}$ zwischen die zugehörigen Rentenwerte $\mathrm{R}_{x,x}$ und $\mathrm{R}_{x+1,x+1}$ geradlinig ein.

Für die Berechnung der einfachen Renten sowie der Beiträge für Kapitalversicherungen auf den Todes- und Lebensfall einer einzelnen Person bietet es keinen erheblichen Vorteil, die Absterbeordnung nach der Methode der kleinsten Quadrate dem GOMPERTZ-MAKEHAMschen Gesetze anzupassen und dann die Summen L_x, T_x u. s. w. durch geeignete Integrale zu ersetzen; man kommt mit der gewöhnlichen Haupttafel ebenso rasch zum Ziele und erspart sich die recht umständliche Berechnung der Konstanten des GOMPERTZ-MAKEHAMschen Gesetzes. Für Verbindungsrenten dagegen ist es von ganz erheblichem Vorteile, die Berechnung dieser Konstanten durchzuführen; hat man z. B. für alle Werte x und y zwischen 21 und 60 die Renten berechnet, so erfordert dies nach dem gewöhnlichen Verfahren die Berechnung von 40 Rententafeln, während, wenn mit den Integralformeln gerechnet wird, außer der Berechnung der Zahlen K, q und h nur eine einzige Rententafel für $\mathrm{R}_{x,x}$ von $x = 21$ bis 60 herzustellen ist.

Noch viel größer ist der Vorteil, wenn es sich um Berechnung von Renten für drei verbundene Leben handelt*).

6. Ehe wir zur Kapitalversicherung für zwei verbundene Leben übergehen, geben wir noch die Formeln für seltener vorkommende Arten von Verbindungsrenten.

Aufgeschobene Rente 1 für zwei verbundene Leben.

Der Zeitwert ${}^nR_{x,y}$ beim Beginne der Versicherung, und damit der einmalige Beitrag ergibt sich, wenn die erste Rente nach n Jahren bezahlt wird, aus

$$a_{x,y}\cdot {}^nR_{x,y} = a_{x+n,\,y+n}\,r^n + a_{x+n+1,\,y+n+1}\cdot r^{n+1} + \dots$$

---

*) In KARUPs Lehrbuch findet man einige Zahlen (nicht vollständige Tafeln) zur Berechnung von Beispielen für Renten- und Kapitalversicherungen für zwei verbundene Leben. Vergleiche unter Beachtung der Fußbemerkung zu S. 434 auch MORGENBESSER, Die mathematischen Grundlagen des gesamten Versicherungswesens, Leipzig 1882.

Daher ist

$$1)\qquad {}^{n}R_{x,y} = \frac{L_{x+n,\,y+n}}{l_{x,y}} \quad .$$

Werden jährliche Beiträge $b_{x,y}$ bis zum Tode eines Teils, höchstens aber n mal bezahlt, so hat man

$$(a_{x,y}r^x + a_{x+1,\,y+1}r^{x+1} + \ldots + a_{x+n-1,\,y+n-1}r^{x+n-1}) \cdot b_{x,y} = a_{x,y}r^x \cdot {}^{n}R_{x,y} \;,$$

oder kürzer

$$(L_{x,y} - L_{x+n,\,y+n}) \cdot b_{x,y} = l_{x,y} \cdot {}^{n}R_{x,y} \quad .$$

Daher folgt

$$2)\qquad b_{x,y} = \frac{L_{x+n,\,y+n}}{L_{x,y} - L_{x+n,\,y+n}} \quad .$$

Soll Beitragsfreiheit bereits nach m Versicherungsjahren eintreten, wobei also $m < n$ ist, so hat man

$$3)\qquad b_{x,y} = \frac{L_{x+n,\,y+n}}{L_{x,y} - L_{x+m,\,y+m}} \quad .$$

7. Für eine n Jahre aufgeschobene und beim Ablaufe von $\nu - 1$ Versicherungsjahren zum letzten Male, im ganzen also höchstens $\nu - n$ mal zahlbare Rente ist der einmalige Beitrag

$$1)\qquad {}^{n}R^{\nu}_{x,y} = \frac{L_{x+n,\,y+n} - L_{x+\nu,\,y+\nu}}{l_{x,y}} \quad .$$

Für den jährlichen Beitrag findet sich, wenn Beitragsfreiheit vom m-ten Versicherungsjahre an eintritt,

$$2)\qquad b_{x,y} = \frac{L_{x+n,\,y+n} - L_{x+\nu,\,y+\nu}}{L_{x,y} - L_{x+m,\,y+m}} \quad .$$

8. Gegenseitige Überlebensrente. Die Rente 1 wird ausgezahlt, sobald ein Bestandteil des versichernden Paares gestorben ist, bis zum Tode des andern.

Von $a_x a_y$ $x$jährigen leben in n Jahren noch $a_{x+n} a_y$, von den $y$jährigen $a_x a_{y+n}$; um die Überlebenden aufgelöster Paare zu erhalten, muß man die in jeder dieser Zahlen enthaltene Anzahl überlebender Paare, $a_{x+n} a_{y+n}$, von jeder der Zahlen abziehen und dann zusammenzählen. Man erhält so für die nach n Versicherungsjahren vorhandenen Rentenempfänger die Anzahl

$$a_{x+n}a_y + a_x a_{y+n} - 2\,a_{x+n}a_{y+n} \quad .$$

Die gegenseitige Überlebensrente 1 hat also beim Beginne der Versicherung den Wert

$$1)\qquad V_{x,y} = R_x + R_y - 2\,R_{x,y} \quad .$$

Die jährlichen Beiträge bis zum Eintritte des Rentengenusses, oder bis zum frühern Tode des Paares für den Fall, daß beide Teile des Paares in demselben Versicherungsjahre sterben, werden gezahlt, solange das Paar noch vollständig ist; daher ist ihr Zeitwert am Nullpunkte des $x$jährigen Teils

$$(a_x a_y r^x + a_{x+1}a_{y+1}r^{x+1} + \ldots)\,b_{x,y} = L_{x,y}\,b_{x,y} \quad .$$

Folglich hat man

$$2)\qquad b_{x,y} = \frac{R_x + R_y - 2\,R_{x,y}}{R_{x,y}} = \frac{R_x + R_y}{R_{x,y}} - 2 \quad .$$

Der einmalige, wie der jährliche Beitrag für eine aufgeschobene gegenseitige Überlebensrente lassen sich an das hier Mitgeteilte leicht anschließen.

9. Verbindungsrenten können mit Rückgewähr eingerichtet werden; wir beschränken uns auf die Bemerkung, daß auch hier die Berechnung der Formeln die Kenntnis der Zuschläge voraussetzt, durch die aus dem theoretischen (Rein-)Beitrag der Tarifbeitrag hergestellt wird, und verweisen im übrigen auf die verwandten Formeln in § 2, Nr. 13 bis 16, an die sich die Formeln für den vorliegenden Fall leicht angliedern lassen.

10. Wir wenden uns nun zu einigen Fällen der Kapitalversicherung auf den Todes- und Lebensfall für zwei verbundene Leben.

Die versicherte Summe wird beim Tode des gegenwärtig $x$jährigen Versorgers fällig, falls der gegenwärtig $y$jährige Versorgte den Versorger überlebt (einseitige Überlebensversicherung).

Von den ursprünglich vorhandenen $a_x a_y$ Paaren bestehen am Ende des n-ten Versicherungsjahres noch $a_{x+n} a_{y+n}$; am Ende des $(n+1)$-ten hat die Bank die Summe 1 so oft zu zahlen, als in diesem Jahre von diesen Paaren die Versorger vor den Versorgten gestorben sind. Würden nur Versorger in diesem Jahre sterben, so würde die Versicherungssumme in $c_{x+n+1} a_{y+n}$ Fällen zahlbar werden. Davon geht aber noch die Zahl ab, die angibt, wie oft von den Paaren, die in diesem Jahre durch Tod beider Teile weggefallen sind, der Versorger vor dem Versorgten gestorben ist. Hierfür fehlen die statistischen Grundlagen; auch theoretische Betrachtungen können nicht ohne Hilfe willkürlicher Voraussetzungen durchgeführt werden.

Man wird von der Wahrheit nicht erheblich abweichen, wenn man annimmt, daß es im Laufe eines Versicherungsjahres bei vollständig aussterbenden Paaren ebenso oft vorkommt, daß der Versorger, als daß der Versorgte zuerst stirbt. Alsdann hat die Bank am Ende des Jahres zu zahlen an Fälle

$$1)\qquad c_{x+n+1} a_{y+n} - \tfrac{1}{2} c_{x+n+1} c_{y+n+1}\quad,$$

denn $c_{x+n+1} c_{y+n+1}$ ist offenbar die Anzahl der im $(n+1)$-ten Versicherungsjahre durch Absterben beider Teile wegfallenden Paare.

Die Bankleistungen, übertragen auf den Nullpunkt des Versorgers, sind daher

$$2)\qquad \begin{cases} c_{x+1}(a_y - \tfrac{1}{2} c_{y+1}) r^{x+1} + c_{x+2}(a_{y+1} - \tfrac{1}{2} c_{y+2}) r^{x+2} + \ldots \\ = \tfrac{1}{2}[c_{x+1}(a_y + a_{y+1}) r^{x+1} + c_{x+2}(a_{y+1} + a_{y+2}) r^{x+2} + \ldots] \end{cases}.$$

Man kommt bei dieser Rechnung mit den für Verbindungsrenten berechneten Zahlen nicht aus, sondern hat neue Tafeln für die Produkte $c_{x+1}(a_y + a_{y+1})$ anzulegen.

Es mag noch bemerkt werden, daß man auf die obige Annahme kommt, wenn man voraussetzt, daß das Absterben im Laufe des Jahres gleichmäßig und stetig erfolgt. Die in jedem unendlich kleinen Zeitabschnitte vollständig aussterbenden Paare bilden dann eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung, da ihre Zahl das Produkt zweier unendlich kleiner erster Ordnung ist, und kommen daher nicht in Betracht. Teilt man das Jahr in m gleiche Teile, so hat man in der Formel 1) c_{x+n+1}, a_{y+n}, c_{y+n+1} der Reihe nach zu ersetzen durch

$$\frac{1}{m} c_{x+n+1}\,,\qquad a_{y+n} - \frac{k}{m} c_{y+n+1}\,,\qquad \frac{1}{m} c_{y+n+1}\quad,$$

und erhält als Bankleistung für das Jahr

$$\frac{1}{m}\sum_{1}^{m}{}^{k}\, c_{x+n+1}\left(a_{y+n} - \frac{k}{m} c_{y+n+1}\right) = c_{x+n+1} a_{y+n} - \frac{m+1}{2m} c_{x+n+1} c_{y+n+1}\,.$$

Geht man hier zur Grenze $m = \infty$ über, so erhält man die Formel 1).

Aus 2) folgt nun der einmalige Beitrag

$$3)\qquad B_{x,y} = \frac{1}{2\,l_{x,y}}[c_{x+1}(a_y + a_{y+1}) r^{x+1} + c_{x+2}(a_{y+1} + a_{y+2}) r^{x+2} + \ldots]$$

Der jährliche Beitrag $b_{x,y}$ wird so lange gezahlt, als der Versorger und der Versorgte leben; daher hat man für die Bankeinnahmen, übertragen auf den Nullpunkt des Versorgers,

$$(a_x a_y r^x + a_{x+1} a_{y+1} r^{x+1} + \ldots) b_x = L_{x,y} \cdot b_x \quad .$$

Hieraus und aus 3) folgt

$$4) \qquad b_{x,y} = \frac{c_{x+1}(a_y + a_{y+1}) r^{x+1} + \ldots}{2 L_{x,y}} \quad .$$

11. Wenn der Vertrag Nr. 10 höchstens u Jahre dauert, so daß nach Ablauf dieser Zeit die versicherte Summe an alle noch vollständigen Paare gezahlt wird, so ist die auf den Nullpunkt des Versorgers übertragene Bankausgabe

$$1) \quad \tfrac{1}{2}[c_{x+1}(a_y + a_{y+1}) r^{x+1} + \ldots + c_{x+u}(a_{y+u-1} + a_{y+u}) r^{x+u}] + a_{x+u} a_{y+u} r^{x+u} \; .$$

Daher ist der einmalige Beitrag

$$2) \quad \begin{cases} B_{x,y} = \dfrac{1}{2 l_{x,y}} \{ c_{x+1}(a_y + a_{y+1}) r^{x+1} + \ldots \\ \qquad + c_{x+u}(a_{y+u-1} + a_{y+u}) r^{x+u} + l_{x+u,\,y+u} \} \quad . \end{cases}$$

Für den jährlichen Beitrag erhält man

$$3) \quad b_{x,y} = \frac{c_{x+1}(a_y + a_{y+1}) r^{x+1} + \ldots + c_{x+u}(a_{y+u-1} + a_{y+u}) r^{x+u} + l_{x+u,\,y+u}}{2(L_{x,y} - L_{x+u,\,y+u})} \; .$$

12. Gegenseitige Überlebensversicherung auf den Todesfall. Die versicherte Summe wird beim Tode des zuerst sterbenden Teils bezahlt. Nach n Versicherungsjahren bestehen noch $a_{x+n} a_{y+n}$ vollständige Paare, nach $n+1$ noch $a_{x+n+1} a_{y+n+1}$. Für alle die Paare, die im Laufe des $(n+1)$-ten Jahres sich aufgelöst haben, also für

$$a_{x+n} a_{y+n} - a_{x+n+1} a_{y+n+1}$$

ist die versicherte Summe am Ende dieses Jahres fällig. Die Bankausgabe ist also, übertragen auf den Nullpunkt des $x$jährigen Teils,

$$\begin{gathered} (a_{x,y} - a_{x+1,\,y+1}) r^{x+1} + (a_{x+1,\,y+1} - a_{x+2,\,y+2}) r^{x+2} + \ldots \\ = r L_{x,y} - L_{x,y} + l_{x,y} = l_{x,y} - (1-r) L_{x,y} \quad . \end{gathered}$$

Der einmalige Beitrag ist daher

$$1) \qquad B_{x,y} = 1 - (1-r) R_{x,y} \quad .$$

Bei jährlichen Beiträgen ist die Bankeinnahme

$$(a_{x,y} r^x + a_{x+1,\,y+1} r^{x+1} + \ldots) b_{x,y} = L_{x,y} b_{x,y} \quad ,$$

daher hat man

$$2) \qquad b_{x,y} = \frac{1}{R_{x,y}} - (1-r) \quad .$$

13. Wird die gegenseitige Überlebensversicherung auf den Todes- und Lebensfall abgeschlossen, so daß die versicherte Summe spätestens am Ende des u-ten Versicherungsjahres fällig ist, so hat man die Bankausgabe

$$\begin{gathered} (a_{x,y} - a_{x+1,\,y+1}) r^{x+1} + \ldots + (a_{x+u-1,\,y+u-1} - a_{x+u,\,y+u}) r^{x+u} + a_{x+u,\,y+u} r^{x+u} \\ = l_{x,y} - (1-r)(L_{x,y} - L_{x+u,\,y+u}) \quad . \end{gathered}$$

Der einmalige Beitrag ist daher

$$1) \qquad B_{x,y} = 1 - (1-r) \frac{L_{x,y} - L_{x+u,\,y+u}}{l_{x,y}} \quad .$$

Bei jährlichen Beiträgen ist die Bankeinnahme, übertragen auf den Nullpunkt des beim Abschlusse $x$jährigen Teils

$$(a_{x,y} r^x + \dots + a_{x+u-1,\,y+u-1} r^{x+u-1}) b_{x,y} = (L_{x,y} - L_{x+u,\,y+u}) b_{x,y} \quad .$$

Daher ist

$$2) \qquad b_{x,y} = \frac{l_{x,y}}{L_{x,y} - L_{x+u,\,y+u}} - (1 - r) \quad .$$

§ 7. Rücklagen.

1. Wenn eine Gruppe von Personen, oder Personenpaaren gleichen Alters mit der Bank gleichlautende Versicherungsverträge abgeschlossen haben, so hat die Bank die einmaligen oder alljährlich fälligen Reinbeiträge entgegenzunehmen und zu dem rechnungsmäßigen Zinsfuße zu vermehren, und hiervon die vertragsmäßigen Leistungen an die Versicherten in Gestalt von Leibrenten oder Kapitalzahlungen im Todes- oder Lebensfalle zu bestreiten. Der Unterschied von Einnahme und Ausgabe ist die Rücklage (Reserve), die die Bank zur Erfüllung ihrer Verpflichtungen gegen die Versicherten noch braucht.

Berechnet man die nach Ablauf von n Versicherungsjahren vorhandene Gesamtrücklage der Gruppe, und verteilt sie gleichmäßig auf die zu diesem Zeitpunkte noch Lebenden, so erhält man die Rücklage für den einzelnen Versicherten.

Wir wollen die Rücklage für einen Versicherten, der mit x Jahren die Versicherung begann, nach n Versicherungsjahren mit $Rü_{x,n}$ bezeichnen; es bedarf wohl kaum der Bemerkung, daß $Rü_{x,n}$ nicht bloß eine Funktion von x und n ist, sondern außerdem von der Art der Versicherung abhängt; es ist aber nicht gut tunlich, alle diese Bedingungen durch Bezeichnungen zum Ausdrucke zu bringen.

2. Welcher Art aber die Versicherung auch sein mag, so ergeben sich doch in jedem Falle für die Rücklage einige ganz allgemeine Formeln.

Bezeichnet $E_{x,n}$ die Summe aller von der Gruppe in den n Versicherungsjahren herrührenden Reineinnahmen, $A_{x,n}$ die in derselben Zeit fällig gewordenen Leistungen der Bank, alles übertragen auf den Nullpunkt, so ist

$$1) \qquad l_{x+n} Rü_{x,n} = E_{x,n} - A_{x,n} \quad .$$

Bezeichnet ferner $E'_{x,n}$ die Summe aller von der Gruppe noch zu erwartenden Reineinnahmen, und $A'_{x,n}$ die Summe der in Zukunft fälligen Leistungen der Bank an die Versicherten, alles wieder übertragen auf den Nullpunkt, so ist auch

$$2) \qquad l_{x+n} Rü_{x,n} = A'_{x,n} - E'_{x,n} \quad .$$

Daß beide Formeln übereinstimmen, erkennt man sofort durch Gleichsetzung, die auf eine Identität führt; denn aus

$$E_{x,n} - A_{x,n} = A'_{x,n} - E'_{x,n}$$

folgt

$$3) \qquad E_{x,n} + E'_{x,n} = A'_{x,n} + A_{x,n} \quad .$$

Da nun die Reinbeiträge so bestimmt sind, daß die Bankeinnahmen und die Bankausgaben für den Nullpunkt einander gleich sind, und die Gleichheit für den Nullpunkt auch die Gleichheit für das Ende jedes beliebigen Versicherungsjahres nach sich zieht, so folgt, daß 3) erfüllt ist.

3. A) Bei allen Versicherungen mit einmaligem Beitrage ist die Rücklage für das Ende des n-ten Versicherungsjahres gleich dem einmaligen Beitrage für den Anfang des $(n + 1)$-ten Versicherungsjahres.

Denn in diesen Fällen hat die Bank keine Einnahmen von dem Versicherten mehr zu erwarten, die Rücklage am Schlusse eines bestimmten Jahres ist also der Zeitwert der Ausgabe, berechnet für denselben Zeitpunkt, aufgefaßt als Anfang des folgenden Jahres.

B) Bei Versicherungen mit jährlichen Beiträgen findet man die Rücklage für das Ende des n-ten Versicherungsjahres, wenn man den einmaligen Beitrag für das zugehörige Lebensalter um das Produkt aus dem jährlichen Beitrag und dem Werte einer sofort beginnenden und mit dem jährlichen Beitrage zugleich endenden Rente vom Betrage 1 vermindert. Denn der einmalige Beitrag ist der Zeitwert der bevorstehenden Bankausgabe, und das abzuziehende Produkt ist der Zeitwert der zu erwartenden Einnahme.

C) Bei jährlichen Beiträgen mit Beitragsfreiheit von einem bestimmten Alter an bewendet es nach dem Eintritte der Beitragsfreiheit bei der Regel A). Denn von diesem Zeitpunkte an ist keine Einnahme mehr zu erwarten.

D) Bei aufgeschobenen Renten ohne Rückgewähr oder bei Kapitalversicherungen mit Wartezeit, wenn während dieser Zeit die Bank nichts zu leisten hat, kann man für die Dauer des Aufschubs bezw. der Wartezeit die Rücklage aus der Vergangenheit als ein Produkt aus drei Faktoren berechnen; der erste ist der jährliche Beitrag, der zweite ist der Zeitwert einer Rente vom Betrage 1, zahlbar vom Beginne der Versicherung bis zu dem Abschlußtage, für den die Rücklage berechnet werden soll, berechnet für den Beginn der Versicherung, und der dritte ist das Verhältnis $l_x : l_{x+n}$, wenn die Rücklage für den Schluß des n-ten Versicherungsjahres gesucht wird. Wir wollen dies mit einigen Zahlen erläutern.

Zu A). Wenn eine 35jährige Person ein Kapital für den Todesfall gegen einmaligen Beitrag versichert hat, so ist am Ende des 10. Versicherungsjahres für sie, falls sie dann noch am Leben ist, als Rücklage der einmalige Beitrag einzustellen, durch den eine 45jährige Person dasselbe Kapital für den Todesfall versichert.

Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, daß hier, wie in diesem ganzen Abschnitte, unter einmaligen und jährlichen Beiträgen nur die den gegebenen Formeln entspringenden Reinbeiträge, **nicht aber** die um die Sicherheitszuschläge erhöhten Tarifbeiträge zu verstehen sind.

Zu B). Wenn eine Person im Alter von 28 Jahren gegen jährliche Beiträge b_{28} ein Kapital von 10 000 Mark auf Erlebensfall, zahlbar dann und nur dann, wenn die Person das 60. Lebensjahr erreicht, versichert hat, so ist für sie bei Vollendung des 42. Jahres, also beim Abschlusse des 14. Versicherungsjahres, eine Rücklage einzustellen, die man findet, wenn man den einmaligen Beitrag, den eine beim Eintritte 42jährige Person für eine Versicherung von 10 000 Mark, zahlbar dann und nur dann, wenn der Versicherte das 60. Lebensjahr vollendet, zahlen muß, um den Zeitwert vermindert, den eine Rente vom Betrage b_{28} am Tage des Versicherungsbeginns für eine beim Eintritte 42jährige Person hat, wenn diese Rente sofort anfängt und mit dem Alter 59 zum letzten Male zahlbar ist.

Zu C). Wäre in dem vorigen Beispiele Beitragsfreiheit vom 50. Jahre an ausbedungen, so würde die Rücklage bei 25jähriger Dauer der Versicherung dem einmaligen Beitrage gleich sein, durch den eine 53jährige Person das Kapital 10 000 Mark für den Fall versichert, daß die Person das 60. Lebensjahr erfüllt.

Zu D). Hat eine 30jährige Person eine jährliche, mit Vollendung des 55. Lebensjahres beginnende Leibrente versichert, und zwar gegen jährliche Beiträge b_{30}, so findet man die Rücklage für das Ende des 8. Versicherungsjahres, wenn man die abgebrochene Rente R_{30}^{38} zunächst mit $\frac{1}{r^8}$ multipliziert, um

sie vom Beginne der Versicherung auf das Ende des 8. Versicherungsjahres zu übertragen. Diese übertragene Rente hat man mit dem jährlichen Beitrage b_{30}, sowie mit dem Verhältnisse $\frac{a_{30}}{a_{38}}$ zu multiplizieren, hat also

$$Rü_{38} = \frac{R_{30}^{38}}{r^8} \cdot b_{30} \cdot \frac{a_{30}}{a_{38}} = R_{30}^{38} \cdot b_{30} \cdot \frac{l_{30}}{l_{38}} \quad .$$

4. Wir gehen nun dazu über, für Versicherungsarten, für die wir in § 3 und 6 die Beiträge berechnet haben, die vollständigen Rücklageformeln aufzustellen. Dabei soll bei einfachen Versicherungen das Beitrittsalter des Versicherten mit x, das Alter, für das die Rücklage zu berechnen ist, mit $x+n$ bezeichnet werden. Bei Versicherungen für zwei verbundene Leben sollen x und y die Beitrittsalter der Verbundenen, $x+n$ und $y+n$ die Alter bezeichnen, für die die Rücklage gilt.

Sofort beginnende Leibrente. Nach Satz A) hat man

$$Rü_{x,n} = R_{x+n} \quad .$$

Die Rücklage ist der Rentenwert für das Beitrittsalter $x+n$; sie nimmt stetig ab.

5. Aufgeschobene Leibrente. Bei einmaligem Beitrage ist nach Satz A):

a) Vor Beginn des Rentengenusses

$$1) \qquad Rü_{x,n} = \frac{L_y}{l_{x+n}} \quad .$$

Die Rücklage ist gleich dem einmaligen Beitrage für eine mit dem Lebensalter y beginnende Leibrente, für das Beitrittsalter $x+n$.

Da l_{x+n} abnimmt, so nimmt die Rücklage bis zum Höchstbetrage zu, der unmittelbar vor Beginn des Genusses, für $x+n=y$, erreicht wird.

b) Vom Beginne des Rentengenusses an ist

$$2) \qquad Rü_{x+n} = R_{x+n} \quad ,$$

die Rücklage ist der Rentenwert für das Beitrittsalter $x+n$.

Die Rücklage nimmt nun stetig ab.

Bei jährlichen Beiträgen hat man:

a) Rücklage während der Beitragszeit. Rechnet man aus der Vergangenheit, so findet man

$$3) \qquad Rü_{x,n} = \frac{L_x - L_{x+n}}{l_{x+n}} \cdot b_x \quad .$$

Aus der Zukunft berechnet, ergibt sich

$$4) \qquad Rü_{x,n} = \frac{L_y - (L_{x+n} - L_z)\, b_x}{l_{x+n}} \quad .$$

Ersetzt man in beiden Ausdrücken

$$b_x = \frac{L_y}{L_x - L_z} \quad ,$$

so erhält man vollständige Übereinstimmung; für die Zahlenrechnung ist 3) die einfachere Formel.

b) Während der Beitragsfreiheit und vor Anfang des Rentengenusses. Hier ist nach Satz A)

$$5) \qquad Rü_{x,n} = {}^{y}R_{x+n} \quad .$$

c) Während des Rentengenusses hat man

$$6) \qquad Rü_{x,n} = R_{x+n} \quad .$$

6. Sofort beginnende abgebrochene Leibrente. Hier kann nur ein einmaliger Beitrag in Frage kommen; nach A) ergibt sich:

$$Rü_{x,n} = R^{s}_{x+n} \quad .$$

7. Aufgeschobene abgebrochene Leibrente (§ 2, Nr. 5). Bei einmaligem Beitrage hat man:

a) Während der Aufschubzeit

$$1) \qquad Rü_{x,n} = {}^{y}R^{s}_{x+n} \quad ;$$

b) während des Rentengenusses

$$2) \qquad Rü_{x,n} = R^{s}_{x+n} \quad .$$

Bei jährlichen Beiträgen mit Beitragsfreiheit vom Alter u an ist die Rücklage:

a) Während der Beitragszeit, aus der Vergangenheit berechnet,

$$3) \qquad Rü_{x,n} = \frac{L_x - L_{x+n}}{l_{x+n}} \cdot b_x \quad ;$$

b) während der Beitragsfreiheit

$$4) \qquad Rü_{x,n} = {}^{y}R^{s}_{x+n} \quad ;$$

c) während des Rentengenusses

$$5) \qquad Rü_{x,n} = R^{s}_{x+n} \quad .$$

8. Sofort beginnende $\frac{m}{m}$ Leibrente (§ 2, Nr. 7). Hier hat man nach A)

$$Rü_{x,n} = R_{x+n} - \sigma_m \quad .$$

9. Aufgeschobene $\frac{m}{m}$ Leibrente (§ 2, Nr. 8).

a) Während der Aufschubzeit ist

$$Rü_{x,n} = {}^{y}_{\frac{m}{m}}R_{x+n} = {}^{y}R_{x+n} - \frac{l_y}{l_{x+n}}\sigma_m \quad .$$

b) Während des Rentengenusses ist

$$Rü_{x,n} = {}_{\frac{m}{m}}R_{x+n} = R_{x+n} - \sigma_m \quad .$$

10. Sofort beginnende, vom Lebensalter z an wegfallende $\frac{m}{m}$ Leibrente (§ 2, Nr. 9).

$$Rü_{x,n} = R^{s}_{x+n} - \left(1 - \frac{l_z}{l_{x+n}}\right)\sigma_m \quad .$$

11. Leibrenten mit Rückgewähr (§ 2, Nr. 14).

a) Innerhalb der Rückgewährzeit hat man

$$l_{x+n}\, Rü_{x,n} = L_{x+n} + t_{x+n+1}(\mathfrak{R}'_x - n - 1) + \ldots + t_{x+g}(\mathfrak{R}'_x - g) \quad ,$$

wenn $\mathfrak{R}'_x$ der Tarifbeitrag ist; daher folgt

$$Rü_{x,n} = R_{x+n} + \frac{1}{l_{x+n}}\left[(T_{x+n} - T_{x+g})\,\mathfrak{R}'_x - (\overline{n+1} \cdot t_{x+n+1} + \ldots + g\, t_{x+g})\right] \quad .$$

b) Nach Ablauf der Rückgewährzeit ist

$$Rü_{x,n} = R_{x+n} \quad .$$

12. Aufgeschobene Rückgewährrente (§ 2, Nr. 15).

A) Einmaliger Beitrag.

a) Während der Aufschubszeit erhält man am einfachsten aus der Vergangenheit

$$l_{x+n} Rü_{x,n} = l_x \mathfrak{R}_x - (t_{x+1} + t_{x+2} + \dots + t_{x+n}) \mathfrak{R}'_x$$

$$Rü_{x,n} = \frac{1}{l_{x+n}} [l_x \mathfrak{R}_x - (T_x - T_{x+n}) \mathfrak{R}'_x] \quad .$$

b) Während des Genusses, doch vor Ablauf der Rückgewährzeit, aus der Zukunft:

$$\begin{aligned} l_{x+n} Rü_{x,n} &= L_{x+n} + t_{x+n+1} (\mathfrak{R}'_x - x + y - n - 1) + \dots + t_{y+g} (\mathfrak{R}'_x - g) \\ &= L_{x+n} + (T_{x+n} - T_{y+g}) \mathfrak{R}'_x - [(x + n + 1 - y) t_{x+n+1} + \dots \\ &\quad + g\, t_{y+g}] \quad , \end{aligned}$$

$$Rü_{x,n} = R_{x+n} + \frac{1}{l_{x+n}} \{(T_{x+n} - T_{y+g}) \mathfrak{R}'_x - [(x+n+1-y) t_{x+n+1} + \dots + g\, t_{y+g}]\} \; .$$

c) Nach Ablauf der Rückgewährzeit ist wieder

$$Rü_{x,n} = R_{x+n} \quad .$$

B) Jährliche Beiträge, mit Beitragsfreiheit vom Alter u an.

a) Während der Beitragszeit erhält man aus der Vergangenheit:

$$\begin{aligned} l_{x+n} Rü_{x,n} &= (L_x - L_{x+n}) b_x - (t_{x+1} + 2\, t_{x+2} + \dots + n\, t_{x+n}) (1 + \mu) b_x \quad , \\ &= (L_x - L_{x+n}) b_x - (\mathfrak{T}_x - \mathfrak{T}_{x+n} - n\, T_{x+n}) (1 + \mu) b_x \quad , \end{aligned}$$

$$Rü_{x,n} = \frac{b_x}{l_{x+n}} [L_x - L_{x+n} - (\mathfrak{T}_x - \mathfrak{T}_{x+n} - n\, T_{x+n}) (1 + \mu)] \quad .$$

b) Nach der Beitragszeit, doch vor der Genußzeit, ebenfalls aus der Vergangenheit berechnet, ist

$$\begin{aligned} l_{x+n} Rü_{x,n} &= (L_x - L_u) b_x - [t_{x+1} + 2\, t_{x+2} + \dots + (u - x) t_u] (1 + \mu) b_x \\ &\quad - (t_{u+1} + t_{u+2} + \dots + t_{x+n}) (u - x) (1 + \mu) b_x \\ &= (L_x - L_u) b_x - [\mathfrak{T}_x - \mathfrak{T}_u - (u - x) T_{x+n}] (1 + \mu) b_x \quad , \end{aligned}$$

$$Rü_{x,n} = \frac{b_x}{l_{x+n}} \{L_x - L_u - [\mathfrak{T}_x - \mathfrak{T}_u - (u - x) T_{x+n}] (1 + \mu)\} \quad .$$

c) Während der Genußzeit, doch vor Ablauf der Rückgewährzeit, hat man, aus der Zukunft berechnet:

$$\begin{aligned} l_{x+n} Rü_{x,n} &= L_{x+n} + \{(u+y-2x-n-1) t_{x+n+1} + (u+y-2x-n-2) t_{x+n+2} + \dots \\ &\quad + t_{u+y-x-1}\} (1 + \mu) b_x \\ &= L_{x+n} + [(u + y - 2x - n) (T_{x+n} - T_{u+y-x-1}) - \mathfrak{T}_{x+n} + \mathfrak{T}_{u+y-x-1} \\ &\quad + (u + y - 2x - n - 1) T_{u+y-x-1}] (1 + \mu) b_x \\ &= L_{x+n} + [(u + y - 2x - n) T_{x+n} + T_{u+y-x-1} - \mathfrak{T}_{x+n} \\ &\quad + \mathfrak{T}_{u+y-x-1}] (1 + \mu) b_x \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Rü_{x,n} = \frac{L_{x+n}}{l_{x+n}} + \frac{(1 + \mu) b_x}{l_{x+n}} [(u + y - 2x - n) T_{x+n} + T_{u+y-x-1} \\ - \mathfrak{T}_{x+n} + \mathfrak{T}_{u+y-x-1}] \quad . \end{aligned}$$

d) Während der Genußzeit und nach der Rückgewährzeit ist

$$R_{x,n} = \frac{L_{x+n}}{l_{x+n}} \quad .$$

13. Kapitalversicherung auf den Todesfall (§ 3, Nr. 1).

Bei einmaligem Beitrage hat man nach Satz A)

$$Rü_{x,n} = \frac{T_{x+n}}{l_{x+n}} \quad .$$

Bei jährlichen Beiträgen bis zum Tode ist

$$l_{x+n} \cdot Rü_{x,n} = T_{x+n} - L_{x+n} \cdot b_x \quad ,$$

$$Rü_{x+n} = \frac{T_{x+n} - L_{x+n} \cdot b_x}{l_{x+n}} \quad .$$

Bei jährlichen Beiträgen mit Beitragsfreiheit vom Alter u an hat man:

a) Während der Beitragszeit

$$Rü_{x,n} = T_{x+n} - (L_{x+n} - L_u)\, b_x \quad ;$$

b) während der Beitragsfreiheit gilt dieselbe Formel, wie bei einmaligem Beitrage.

14. Das versicherte Kapital wird beim Tode, spätestens bei Erfüllung des 85. Lebensjahres gezahlt.

Bei einmaligem Beitrage ist

$$Rü_{x,n} = B_{x+n} = \frac{T_{x+n} - T_{85} + l_{85}}{l_{x+n}} \quad .$$

Bei jährlichen Beiträgen bis zum Tode, spätestens bis zur Erfüllung des 84. Lebensjahres, hat man

$$l_{x+n}\, Rü_{x,n} = T_{x+n} - T_{85} + l_{85} - (L_{x+n} - L_{85})\, b_x \quad ,$$

also ergibt sich

$$Rü_{x,n} = \frac{T_{x+n} - T_{85} + l_{85} - (L_{x+n} - L_{85})\, b_x}{l_{x+n}} \quad .$$

Bei jährlichen Beiträgen mit Beitragsfreiheit vom Alter u an hat man:

a) Während der Beitragszeit

$$Rü_{x,n} = \frac{T_{x+n} - T_{85} + l_{85} - (L_{x+n} - L_u)\, b_x}{l_{x+n}} \quad ;$$

b) nach Ablauf der Beitragszeit gilt dieselbe Formel, wie bei einmaligem Beitrage.

Beispiele: A) Wie groß sind bei § 3, Nr. 3, Beispiel A) die Rücklagen am Ende des 10. Versicherungsjahres a) bei einmaligem Beitrage; b) bei jährlichen Beiträgen bis zum Ende des Vertrags?

a) $$Rü_{42,10} = \frac{T_{52} - T_{85} + l_{85}}{l_{52}} \cdot 9000$$

T_{52}	3905,2
l_{85}	102,8
$T_{52} + l_{85}$	4008,0
T_{85}	91,5
$T_{52} - \ldots$	3916,5
$Rü$	5092,5

$\log T_{52} - \ldots$	3,59290
$\log 9000$	3,95424
$\log$ Prod.	7,54714
$\log l_{52}$	3,84021
$\log Rü$	3,70693

b) Bei jährlichen Beiträgen bis zum Ende des Vertrags hat man für 1 Mark Versicherungssumme $\log b = 8{,}45844$, und

$$Rü_{42,10} = \frac{T_{52} - T_{85} + l_{85} - (L_{52} - L_{85})\,b}{l_{52}} \cdot 9000$$

L_{52}	89209,8	$\log(L_{52} - \ldots)$	4,94879
L_{85}	332	$\log b$	8,45844
$L_{52} - \ldots$	88878	log Prod.	3,40723
Prod.	2554,1	log Zähler	3,13431
$T_{52} - \ldots$	3916,5	log Nenner	3,84021
Zähler	1362,4	log Bruch	9,29410
$Rü$	1771,5	log 9000	3,95424
		$\log Rü$	3,24834

B) Bei § 3, Nr. 3, Beispiel B) ist a) die Rücklage am Ende des 12. Versicherungsjahres

$$R_{29,12} = \frac{T_{41} - T_{85} + l_{85} - (L_{41} - L_{50})\,b}{l_{41}} \cdot 7500 \quad ,$$

wobei

$$\log b = 2{,}22875 - 3{,}87506 = 8{,}35369 \quad .$$

T_{41}	5326,6	$\log(L_{41} - \ldots)$	5,09230
$-T_{85} + l_{85}$	11,3	$\log b$	8,35369
L_{41}	193217	log Prod.	3,44599
L_{55}	69537	log Zähler	3,40576
$L_{41} - L_{55}$	123680	log 7500	3,87506
Prod.	2792,5	log Prod.	7,28082
$T_{41} - \ldots$	5337,9	$\log l_{41}$	4,07409
Zähler	2545,4	$\log Rü$	3,20673
$Rü$	1609,6		

15. Versicherung auf den Lebens- und Todesfall (§ 3, Nr. 4). Bei einmaligem Beitrage ist

$$Rü_{x,n} = B_{x+n} = \frac{T_{x+n} - T_y + l_y}{l_{x+n}} \quad .$$

Bei jährlichen Beiträgen bis zum Tode, spätestens bis zum Lebensalter $y - 1$, ist

$$l_{x+n}\,Rü_{x,n} = T_{x+n} - T_y + l_y - (L_{x+n} - L_y)\,b_x \quad ,$$

$$Rü_{x,n} = \frac{T_{x+n} - T_y + l_y - (L_{x+n} - L_y)\,b_x}{l_{x+n}}$$

$$= B_{x+n} - R^y_{x+n}\,b_x \quad .$$

Bei jährlichen Beiträgen mit Beitragsfreiheit vom Alter u an hat man:

a) Während der Beitragszeit

$$l_{x+n}\,Rü_{x,n} = T_{x+n} - T_x + l_y - (L_{x+n} - L_u)\,b_x \quad ,$$

$$Rü_{x,n} = B_{x+n} - R^u_{x+n}\,b_x = \frac{T_{x+n} - T_y + l_y - (L_{x+n} - L_u)\,b_x}{l_{x+n}} \quad ;$$

b) während der Beitragsfreiheit gilt dieselbe Formel, wie bei einmaligem Beitrage.

16. Kurze Todesfallversicherung (§ 3, Nr. 5).

Bei einmaligem Beitrage ist

$$Rü_{x,n} = B_{x+n} = \frac{T_{x+n} - T_y}{l_{x+n}} .$$

Bei jährlichen Beiträgen bis zum Ende der Versicherung, d. i. längstens bis zum Alter $y - 1$, hat man

$$l_{x+n} \cdot Rü_{x,n} = T_{x+n} - T_y - (L_{x+n} - L_y) b_x$$

$$Rü_{x,n} = B_{x+n} - R^y_{x+n} b_x = \frac{T_{x+n} - T_y - (L_{x+n} - L_y) b_x}{l_{x+n}} .$$

Beispiel: Wie groß ist in Beispiel § 3, Nr. 5 die Rücklage am Ende des 4. Versicherungsjahres?

a) Bei einmaligem Beitrage ist

$$Rü_{44,4} = \frac{T_{48} - T_{51}}{l_{48}} \cdot 25000 \quad ;$$

b) bei jährlichen Beiträgen b bis zum Ende des Vertrags ist

$$Rü'_{44,4} = \frac{T_{48} - T_{51}}{l_{48}} \cdot 25000 - \frac{L_{48} - L_{51}}{l_{48}} \cdot b$$

$$= Rü_{44,4} - \frac{L_{48} - L_{51}}{l_{48}} \cdot b \quad .$$

T_{48}	4415,3	1.	$\log(T_{48} - \ldots)$	2,57496
T_{51}	4039,5	2.	$\log 25000$	4,39794
$T_{48} - \ldots$	375,8	3.	$\log(L_{48} - \ldots)$	4,38502
L_{48}	120780	4.	$\log b$	2,54843
L_{51}	96513	5.	$1) + 2)$	6,97290
$L_{48} - \ldots$	24267	6.	$3) + 4)$	6,93345
$Rü$	1105,4	7.	$\log l_{48}$	3,92939
num 9)	1009,4	8.	$\log Rü$	3,04351
$Rü'$	96,0	9.	$6) - 7)$	3,00406

17. Versicherung auf den Lebensfall (Militärdienst-, Aussteuer- und Altersversicherung) (§ 3, Nr. 6).

Bei einmaligem Beitrage hat man

$$Rü_{x,n} = B_{x+n} = \frac{l_y}{l_{x+n}} .$$

Bei jährlichen Beiträgen bis zum Ende des Vertrags ist

$$l_{x+n} Rü_{x,n} = l_y - (L_{x+n} - L_y) b_x$$

$$Rü_{x,n} = B_{x+n} - R^y_{x+n} b_x = \frac{l_y - (L_{x+n} - L_y) b_x}{l_{x+n}} .$$

Beispiel: Wie groß ist im Beispiel zu § 3, Nr. 6 A) die Rücklage am Ende des 17. Versicherungsjahres?

a) Bei einmaligem Beitrage ist

$$Rü_{28,17} = \frac{l_{60}}{l_{45}} \cdot 4000 \quad ;$$

b) bei jährlichen Beiträgen b bis zum Ende des Vertrags ist

$$Rü'_{28,17} = Rü_{28,17} - \frac{L_{45} - L_{60}}{l_{45}} \cdot b \quad ,$$

wobei $\log b = 1{,}67379$.

1.	$\log l_{60}$	3,63240	9.	7) − 8)	105451
2.	log 4000	3,60206	10.	log 9)	5,02305
3.	1) + 2)	7,23446	11.	$\log b$	1,67379
4.	$\log l_{45}$	3,99265	12.	10) + 11)	6,69684
5.	$\log Rü$	3,24181	13.	$\log l_{45}$	3,99265
6.	$Rü$	1745,0	14.	12) − 13)	2,70419
7.	L_{45}	148918	15.	num 14)	506,0
8.	L_{60}	43467	16.	$Rü'$	1239,0

18. Volksversicherung mit dreijähriger Wartezeit. Auf 1 Mark Versicherungssumme wird für die Todesfälle im 1. Versicherungsjahre $^1/_4$ Mark, für die im 2. Jahre $^1/_2$ Mark, für die im 3. Jahre $^3/_4$ Mark, von da ab die volle Versicherungssumme gezahlt; nur jährliche Beiträge kommen in Betracht.

a) Rücklage am Ende des 1. Versicherungsjahres:

$$l_{x+1} Rü_{x,1} = l_x b_x - \tfrac{1}{4} t_{x+1} \quad ,$$

$$R_{x,1} = \frac{l_x b_x - \frac{1}{4} t_{x+1}}{l_{x+1}} \quad .$$

b) Rücklage am Ende des 2. Versicherungsjahres:

$$R_{x,2} = \frac{(l_x + l_{x+1}) b_x - \frac{1}{4}(t_{x+1} + 2 t_{x+2})}{l_{x+2}} \quad .$$

c) Rücklage am Ende des 3. Versicherungsjahres:

$$Rü_{x,n} = \frac{(l_x + l_{x+1} + l_{x+2}) b_x - \frac{1}{4}(t_{x+1} + 2 t_{x+2} + 3 t_{x+3})}{l_{x+3}} \quad ,$$

d) Rücklage vom Ende der Wartezeit an:

$$Rü_{x,n} = \frac{T_{x+n} - T_y + l_y - (L_{x+n} - L_y) b_x}{l_{x+n}} \quad .$$

Beispiel. Wie groß ist im Beispiel § 3, Nr. 9 die Rücklage a) am Ende des 2. Versicherungsjahres, b) am Ende des 16.?

$$\log b = 8{,}56967 + 2{,}95424 = 1{,}52391 \quad .$$

a) $$Rü_{38,2} = \frac{(l_{38} + l_{39}) b - (t_{39} + 2 t_{40}) \cdot 225}{l_{40}}$$

1.	$l_{38} + l_{39}$	26611	10.	8) + 9)	4,98993
2.	log 1)	4,42506	11.	num 4)	889140
3.	$\log b$	1,52391	12.	num 10)	97708
4.	2) + 3)	5,94897	13.	11) − 12)	791432
5.	t_{39}	144,30	14.	log 13)	5,89842
6.	$2 t_{40}$	289,96	15.	$\log l_{40}$	4,09407
7.	5) + 6)	434,26	16.	$\log Rü$	1,80435
8.	log 7)	2,63775	17.	$Rü$	63,731
9.	log 225	3,35218			

b) $$Rü_{38,16} = \frac{(T_{54} - T_{60} + l_{60})\,900 - (L_{54} - L_{60})\,b}{l_{54}}$$

1.	$-T_{60} + l_{60}$	1469,6	10.	log 9)	4,50879
2.	T_{54}	3637,2	11.	$\log b$	1,52391
3.	2) + 1)	5106,8	12.	10) + 11)	6,03270
4.	log 3)	3,70815	13.	num 6)	4596100
5.	log 900	2,95424	14.	num 12)	1078200
6.	4) + 5)	6,66239	15.	13) — 14)	3517900
7.	L_{54}	75735,1	16.	log 15)	6,54629
8.	L_{60}	43466,5	17.	$\log l_{54}$	3,79226
9.	7) — 8)	32269	18.	log *Rü*	2,75403
			19.	*Rü*	567,59

19. Volksversicherung mit zweijähriger Wartezeit (§ 3, Nr. 10). Für Todesfälle im 1. Versicherungsjahre werden die Beiträge rückgewährt; für Todesfälle im 2. Versicherungsjahre wird auf 1 Mark Versicherungssumme $^1/_2$ Mark gezahlt, von da an die volle Versicherungssumme. Nur jährliche Beiträge.

a) Rücklage am Ende des 1. Versicherungsjahres:

$$l_{x+1} Rü_{x,1} = l_x b_x - t_{x+1} \cdot n \beta'_x \quad ,$$

$$Rü_{x,1} = \frac{l_x b_x - t_{x+1} \cdot n \beta'_x}{l_{x+1}} \quad .$$

b) Rücklage am Ende des 2. Versicherungsjahres:

$$Rü_{x,2} = \frac{(l_x + l_{x+1})\,b_x - t_{x+1} \cdot n \beta'_x - \frac{1}{2} t_{x+2}}{l_{x+2}} \quad .$$

c) Rücklage vom Ende der Wartezeit an wie bei Nr. 18, d).

20. Kinderversicherung mit dreijähriger Wartezeit, während der die unverkürzten Beiträge rückgezahlt werden; der jährliche Beitrag hängt nur von der Versicherungsdauer, nicht vom Eintrittsalter ab; Versicherung auf den Todes- und Lebensfall (§ 3, Nr. 11).

a) Rücklage am Ende des 1. Versicherungsjahres:
Überträgt man auf den Anfang der Versicherung, so ist

$$\mathfrak{l}_1 Rü_{y,1} = \mathfrak{l}_0 b_y - \mathfrak{t}_1 n \beta'_y \quad ,$$

$$Rü_{y,1} = \frac{\mathfrak{l}_0 b_y - \mathfrak{t}_1 n \beta'_y}{\mathfrak{l}_1} \quad .$$

b) Rücklage am Ende des 2. Versicherungsjahres:

$$Rü_{y,2} = \frac{\mathfrak{L}_1 b_y - \mathrm{T}_2 n \beta'_y}{\mathfrak{l}_2} \quad .$$

c) Rücklage am Ende des 3. Versicherungsjahres:

$$Rü_{y,3} = \frac{\mathfrak{L}_2 b_y - \mathrm{T}_3 n \beta'_y}{\mathfrak{l}_3} \quad .$$

d) Für die Rücklage nach Abschluß der Wartezeit berechnen wir hier die noch zu erwartenden Ausgaben und Einnahmen und erhalten

$$\mathfrak{l}_m Rü_{y,m} = \mathfrak{t}_{m+1} + \cdots + \mathfrak{t}_y + \mathfrak{l}_y - (\mathfrak{l}_m + \cdots + \mathfrak{l}_{y-1})\,b_y \quad ,$$

$$Rü_{y,m} = \frac{\mathfrak{T}_y - \mathfrak{T}_m + \mathfrak{l}_y - (\mathfrak{L}_{y-1} - \mathfrak{L}_{m-1})\,b_y}{\mathfrak{l}_m} \quad .$$

Beispiel. Wie groß ist im Beispiel zu § 3, Nr. 11 die Rücklage a) am Ende des 3., b) am Ende des 11. Versicherungsjahres?

a) $$R_{15,3} = \frac{\mathfrak{C}_2\, b - \mathrm{T}_3\, n\beta'}{\mathfrak{l}_3} \cdot 1500$$

Hierbei ist b der jährliche Reinbeitrag,

$$\log b = 8{,}71383 + 3{,}17609 = 1{,}88992 \quad ;$$

$n\beta'$ dagegen ist der jährliche Tarifbeitrag

$$\log n\beta' = 1{,}98566 \quad .$$

1.	$\log \mathfrak{C}_2$	6,27041	7.	num 3)	144650000
2.	$\log b$	1,88992	8.	num 6)	7737300
3.	1) + 2)	8,16033	9.	7) — 8)	136912700
4.	$\log \mathrm{T}_3$	4,90293	10.	log 9)	8,13644
5.	$\log n\beta'$	1,98566	11.	$\log \mathfrak{l}_3$	5,74325
6.	4) + 5)	6,88859	12.	$\log Rü$	2,39319
			13.	$Rü$	247,28

b) $$Rü_{15,11} = \frac{(\mathfrak{T}_{15} - \mathfrak{T}_{11} + \mathfrak{l}_{15})\, 1500 - (\mathfrak{C}_{14} - \mathfrak{C}_{10})\, b}{\mathfrak{l}_{11}}$$

1.	$\mathfrak{T}_{15}$	79967,5	12.	log 11)	6,18797
2.	$\mathfrak{l}_{15}$	347230	13.	log 6)	1,88992
3.	1) + 2)	427198	14.	12) + 13)	8,07789
4.	$\mathfrak{T}_{11}$	73837,9	15.	num 8)	529940000
5.	$\mathfrak{T}_{15} - \ldots$	353392	16.	num 14)	119640000
6.	log 5)	5,54813	17.	15) — 16)	410300000
7.	log 1500	3,17609	18.	log 17)	8,61310
8.	6) + 7)	8,72422	19.	$\log \mathfrak{l}_{11}$	5,60761
9.	$\mathfrak{C}_{14}$	7271180	20.	$\log Rü$	3,00549
10.	$\mathfrak{C}_{10}$	5729580	21.	$Rü$	1012,7
11.	9) — 10)	1541600			

21. Die Rücklagen für Feierzeitversicherungen wie für Versicherungen auf den Lebens- und Todesfall mit Bezugnahme auf die Feierzeit lassen sich nach den angegebenen Grundsätzen ohne Schwierigkeit berechnen; wir sehen von deren Mitteilung an dieser Stelle ab.

22. Rücklage für eine sofort beginnende Verbindungsrente 1 an ein Paar, solange es vollständig ist (§ 6, Nr. 2).

Hier ist, wieder nach Satz A),

$$Rü_{x,y,n} = R_{x+n,y+n} = \frac{L_{x+n,y+n}}{l_{x+n,y+n}} \quad .$$

23. Rücklage für eine sofort beginnende Verbindungsrente 1, zahlbar an ein Paar bis zum vollständigen Aussterben (§ 6, Nr. 3).

a) Wenn das Paar noch vollständig ist, so hat man

$$Rü_{x,y,n} = R_{x+n} + R_{y+n} - R_{x+n,y+n} \quad ;$$

b) wenn nur noch ein Bestandteil am Leben und bei Berechnung der Rücklage z Jahre alt ist, so ist für ihn die Rücklage

$$Rü_z = R_z \quad .$$

24. Rücklage für eine Überlebensrente, zahlbar, wenn ein bestimmter Bestandteil des Paares (der Versorger) verstorben ist, der andre Bestandteil (der Versorgte) aber noch lebt (§ 6, Nr. 4).

a) Ist das Paar noch vollständig, so ist

$$Rü_{x,y,n} = U_{x+n,y+n} = R_{y+n} - R_{x+n,y+n} \quad ;$$

b) ist der Versorger gestorben, so hat man als Rücklage für den noch lebenden Versorgten

$$Rü_{y,n} = R_{y+n} \quad .$$

§ 8. Zuschläge, Änderungen, Rückkäufe, Darlehen.

1. Wie schon in § 2, Nr. 13 bemerkt worden ist, werden die Versicherungen nicht durch die Reinbeiträge erworben, sondern durch die Tarifbeiträge, die aus den Reinbeiträgen durch Erhöhung um geeignete, wegen der Verwaltungskosten und in Rücksicht auf die Sicherheit des Betriebes nötige Zuschläge hervorgehen. Das Maß dieser Erhöhung ist nach der Art der Versicherung verschieden; bei Volksversicherungen, die mit größern Kosten und mehr Wagnis verbunden sind, als andre Kapitalversicherungen auf den Todes- und Lebensfall, sind die Zuschläge beträchtlich höher.

Die Zuschläge stellen den Gegenwert für die Verwaltungskosten und für die der Bank aus gewissen Umständen und Möglichkeiten drohende Gefahr dar. Hiernach müßten sie sich zunächst aus zwei Gliedern zusammensetzen — dem Gefahrenzuschlage und dem Verwaltungszuschlage. Um den Gefahrenzuschlag zu bemessen, müßte eine geeignete Abschätzung der mit jeder Versicherungsart verbundenen Gefahr statthaben.

Der Verwaltungszuschlag würde wieder aus einigen Gliedern bestehen. Denn man kann allgemeine Verwaltungskosten unterscheiden, die für jeden Vertrag wesentlich die gleichen sind, und nicht von der Art der Versicherung oder der Höhe der Versicherungssumme, bezw. der jährlichen Beiträge abhängen; ferner hat man Kosten für die Einhebung und Verrechnung der jährlichen Beiträge zu bemerken, die der Höhe dieser Beiträge verhältnisgleich anzusetzen wären; endlich gibt es Kosten für die Verwaltung der Rücklagen, die der Größe der Rücklage verhältnisgleich sein müßten. Diese einzelnen Glieder sind, wie man sieht, zum Teil von Fall zu Fall und von Jahr zu Jahr veränderlich, und ihre genaue Feststellung und Verteilung würde das Rechnungswesen erheblich belasten.

Da nun aber bereits die gegenseitige Abschätzung der einzelnen Bestandteile jedes Gesamtzuschlags ohne willkürliche Annahmen gar nicht möglich ist, so würde damit auch das ganze, die Zuschläge betreffende Rechenwerk auf willkürlichen Grundlagen beruhen, und ein größerer Zeit- und Müheaufwand sich kaum rechtfertigen lassen. Man vereinfacht daher die Sache, indem man die Zuschläge nach Gutdünken festsetzt, und die in einem Geschäftsjahre vereinnahmten Zuschläge als verfügbare Deckungsmittel für die Verwaltungskosten dieses Jahres, sowie für die Bankleistungen ansieht, die über die rechnungsmäßig erwarteten hinaus fällig geworden sind. Soweit die Einnahme aus den Zuschlägen hierfür nicht in Anspruch genommen wird, sieht man sie als Geschäftsgewinn an.

Wir wollen nicht unterlassen, an dieser Stelle ausdrücklich darauf hinzuweisen, daß dieses, soweit uns bekannt, allgemein eingehaltene Verfahren vor einer sorgfältigen Beurteilung nicht bestehen kann. Wird eine Versicherung gegen einmaligen Beitrag abgeschlossen, so ist der einmal gezahlte Zuschlag die einzige Entschädigung der Bank für Verwaltung und Gefahr. Wird

nun dieser erhebliche Betrag nur in dem Jahre verrechnet, in dem er eingenommen wird, so erscheint dieses Jahr zu günstig, in allen folgenden Jahren ist aber für die Verwaltung dieser Versicherung nichts in der Kasse. Ganz ebenso verhält es sich mit den Versicherungen gegen jährliche Beiträge, die nicht bis zum Ende des Vertrags reichen; auch hier arbeitet die Bank während der ganzen Zeit vom Eintritte der Beitragsfreiheit bis ans Ende des Vertrags ganz ohne Entschädigung, da die mit für diese Zeit bestimmten Zuschläge schon während der Beitragszeit ganz aufgezehrt worden sind.

Diesen offenbaren Fehler kann man nur dadurch beseitigen, daß man für alle Versicherungen mit beitragsfreien Jahren besondere Zuschlagsrücklagen bildet, und dadurch die Einnahme aus den Zuschlägen über die ganze Dauer des Vertrags verteilt.

2. Soll ein Versicherungsvertrag nach $n$jährigem Bestande derart geändert werden, daß die Leistungen der Bank wie die des Versicherten nach dem neuen Vertrage sich ansehen lassen als Summen aus den alten Leistungen und gewissen neuen Posten, so kann man annehmen, der alte Vertrag bestehe fort, und es komme eine neue Versicherung hinzu. Handelt es sich für den Zusatzvertrag um eine Versicherung auf den Todes- und Lebensfall, so wird man ihn nur auf Grund erneuter ärztlicher Untersuchung abschließen. Der Zusatzbeitrag hat der Zusatzleistung der Bank und dem Lebensalter zu entsprechen, in dem die Vertragsänderung erfolgt,

3. Jede andre Vertragsänderung, die nicht nach Nr. 2 behandelt werden kann, läßt eine befriedigende mathematische Behandlung nur unter der Voraussetzung zu, daß die in Nr. 1 geforderte Zuschlagsrücklage vorhanden ist: wir werden daher diese Voraussetzung zugrunde legen, obwohl, soviel uns bekannt, bei keiner Versicherungsbank diese Rücklagen rechnerisch festgestellt und als ein besonderer Posten in den Geschäftsabschlüssen aufgeführt werden; es muß alsdann die Annahme genügen, daß die verlangte Rücklage einen Teil derjenigen Rücklagen bildet, die außer der für die zukünftigen Bankleistungen nötigen „Prämienreserve“ bei vorsichtiger Geschäftsführung noch in Bereitschaft gehalten werden.

Jede andre Behandlung der Vertragsänderungen, die nicht von der Voraussetzung einer Zuschlagsrücklage ausgeht, beruht auf Willkür, und gehört daher nicht in eine Darstellung des Versicherungswesens vom mathematischen Standpunkte aus.

Dadurch wollen wir über diese willkürlichen Änderungen nicht unbedingt absprechend urteilen. Die Bank ist nicht rechtlich verpflichtet, auf irgend eine Änderung eines Vertrags sich einzulassen. Kommt sie dem darauf gerichteten Wunsche des Versicherten entgegen, so darf sie dafür ihre Bedingungen willkürlich stellen, — wenn sie dem Versicherten nicht gefallen, so bewendet es bei dem bestehenden Vertrage. Will aber die Bank erfahren, wie weit sie im neuen Vertrage gehen kann, ohne Schaden zu leiden, so muß sie sich die Auskunft von der Versicherungsmathematik geben lassen, und kommt damit doch wieder auf die obige Hauptvoraussetzung für jede Änderung zurück.

4. Wir nehmen nun an, daß während der ganzen Versicherungsdauer ein von Jahr zu Jahr wechselnder Zuschlagsbeitrag erhoben wird. In Wirklichkeit kann man dies nicht durchführen, sondern muß es bei gleichbleibenden jährlichen Zuschlagsbeiträgen während der Beitragszeit, bezw. bei einem einmaligen Beitrage bewenden lassen. Rechnerisch kann man aber immer diese Istzuschläge durch jährliche Sollzuschläge ersetzen. Dem jährlichen Sollzuschlage für das versicherte Kapital K und das Lebensalter v geben wir die Form

$$z_v = (\alpha R_v^y + \beta R\ddot{u}_v + \gamma b_x) K + \delta \quad ;$$

wir beschränken uns dabei auf Versicherungen für den Todes- und Lebensfall

und bezeichnen mit R_v^y den Wert der bis zum Aufhören des Vertrags reichenden Jahresrente 1, mit $Rü_v$ die Rücklage im Alter v, mit b_x den jährlichen Reinbeitrag, beides für 1 Mark Kapital; α, β, γ, δ sind gegebene, beständige Zahlen.

Die Zuschlagsrücklage für das Alter v ist der Unterschied zwischen der zukünftigen Einnahme aus den Sollzuschlägen und den Istzuschlägen; liegt auf dem Jahresbeitrage für 1 Mark Versicherungssumme der Zuschlag z, so hat man daher für die Zuschlagsrücklage $\mathfrak{Z}_v$

$$l_v \mathfrak{Z}_v = \left(\alpha \sum_v^y l_v R_v^y + \beta \sum_v^y l_v Rü_v + \gamma b_x \sum_v^y l_v\right) K + \delta \sum_v^y l_v - z \sum_v^y l_v \quad .$$

5. Als Grundsatz für Vertragsänderungen muß gelten: Die Rücklage nach dem alten Vertrage, vermehrt um die Zuschlagsrücklage nach dem alten Vertrage und um die auf den Änderungstag übertragenen neuen jährlichen Tarifbeiträge, gibt den einmaligen neuen Tarifbeitrag.

Wir wenden diesen Grundsatz zunächst auf den Grenzfall, nämlich auf die Änderung eines Vertrags in sich selbst, an; diese Anwendung des Grundsatzes muß mit der Fortdauer der bisherigen Umstände im Einklange sein.

Um den allgemeinen Fall zu erledigen, nehmen wir jährliche Beiträge mit Beitragsfreiheit im Alter u, und v innerhalb der Beitragszeit an; ferner nehmen wir an, daß die Versicherungssumme im neuen Vertrage dieselbe ist, wie im alten, der Jahresreinbeitrag für 1 Mark dagegen b_v ist, gegen b_x im alten. Es wird sich zeigen, daß die Bedingungsgleichung für b_v sich mit der Annahme $b_v = b_x$ verträgt.

Für a_v Personen vom Alter v hat man, übertragen auf den Nullpunkt, als einmaligen Tarifbeitrag zur Verfügung

$$1)\quad l_v Rü_v K + \left(\alpha \sum_v^y l_v R_v^y + \beta \sum_v^y l_v Rü_v + \gamma b_x \sum_v^u l_v\right) K + \delta \sum_v^y l_v - z \sum_v^u l_v + b'_v \sum_v^u l_v ,$$

wobei b'_v den jährlichen neuen Tarifbeitrag bezeichnet. Er muß sich aber auch, wenn B_v den einmaligen Beitrag für die Leistung 1 (im Alter v) bezeichnet, aus der Formel ergeben

$$2)\quad B_v K + \left(\alpha \sum_v^y l_v R_v^y + \beta \sum_v^y l_v Rü'_v + \gamma b_v \sum_v^u l_v\right) K + \delta \sum_v^y l_v \quad .$$

Die Gleichsetzung von 1) und 2) ergibt zunächst

$$3)\quad \begin{cases} l_v Rü_v K + \left(\beta \sum_v^y c_v Rü_v + \gamma b_x \sum_v^u l_v\right) K - z \sum_v^u l_v + b'_v K \sum_v^u l_v \\ \qquad = B_v K + \left(\beta \sum_v^y l_v Rü'_v + \gamma b_v \sum_v^u l_v\right) K \quad . \end{cases}$$

Setzt man hier $b'_v = b'_x$, so wird

$$(-z + b'_v K) \sum_v^u l_v = (-z + b'_x K) \sum_v^u l_v = b_x K \sum_v^u l_v \quad ,$$

und da ferner offenbar

$$l_v Rü_v K + b_x K \sum_v^u l_v = B_v K \quad ,$$

so folgt aus 3)

$$4)\quad \beta \sum_v^y l_v Rü_v + \gamma b_x \sum_v^u l_v = \beta \sum_v^y l_v Rü'_v + \gamma b_v \sum_v^u l_v \quad .$$

Aus $b'_x = b'_v$ folgt die Gleichheit der Reinbeiträge b_x und b_v, sowie die Gleichheit der Rücklagen $Rü_x$ und $Rü_v$; die letzte Gleichung wird also identisch erfüllt.

Die Probe stimmt daher. Sie würde auch noch stimmen, wenn man den Zuschlag um ein Glied εK vermehrt; und da sie unabhängig von den Zahlen $\alpha \ldots \varepsilon$ stimmt, so gilt sie auch, wenn man eine oder mehr als eine davon gleich Null setzt. Insbesondere kann man also, ohne daß Verwandlungen von gemischten Versicherungen in sich selbst davon gestört werden, die Sollleistung aus Zuschlägen durch eine gleichbleibende, über die Beitragszeit gleichmäßig verteilte Zuschlagsrente ersetzen, die dem Reinbeitrage $b_x K$ verhältnisgleich ist; dies entspricht dem gewöhnlichen Gebrauche, widerspricht aber, wie schon oben bemerkt, der unabweislichen Forderung, daß man während der ganzen Zeit, in der eine Versicherung besteht, jährliche Zuschlagseinnahmen wegen der Sicherheit und der Verwaltung zur Verfügung haben muß.

6. Wenn ein Versicherter seine Versicherung aufgeben will und der Bank nach Lage der Verhältnisse nichts daran liegt, die Fortsetzung des Vertrags auf dem Klagewege zu erstreiten, so kann sie dem Versicherten einen gewissen Rückkaufswert zahlen, wobei die gewählte Bezeichnung den Vorgang so deutet, daß die Bank durch diese Rückzahlung sich von der Verpflichtung loskauft, die sie gegen den Versicherten übernommen hat. Die obere Grenze für den Rückkaufswert ist offenbar die Summe der für die Versicherung vorhandenen Rücklagen aus den Reinbeiträgen und Zuschlägen, vermindert um den Zeitwert der für die Erwerbung der Versicherung an die Agenten gezahlten Vergütungen. Es kann nicht behauptet werden, daß der Versicherte an diese Summe einen Rechtsanspruch hätte; wäre dies der Fall, so könnte die Bank dazu genötigt werden, sie im Rückkaufsfalle dem Versicherten herauszugeben. Da dies aber nicht der Fall ist, und der Bank durch Wegfall der Versicherung eine Aussicht auf Gewinn entgeht, so hat sie ein Recht, nur einen gewissen Bruchteil des genannten Betrags dem Versicherten als Rückkaufswert in Aussicht zu stellen.

7. Oft genug wird an die Bank das Ersuchen gerichtet, auf Versicherungsverträge Darlehen zu gewähren. Hier gilt der Grundsatz, daß dem Versicherten nicht mehr als Darlehen gewährt werden kann, als der Rückkaufswert. Selbstverständlich ruhen alle Leistungen der Bank an den Versicherten so lange, bis das Darlehen nebst Zinsen zurückerstattet ist.

Handelt es sich um eine Rentenversicherung, und ist das Darlehen im Alter des Rentengenußanfanges noch nicht vollständig bezahlt, so werden die Renten innebehalten und vom Darlehen abgeschrieben; ist die Bank zu einer Kapitalleistung an den Versicherten verpflichtet, bevor das Darlehen abgetragen ist, so wird die Leistung der Bank um den entsprechenden Betrag gekürzt.

§ 9. Mathematische Zahlen für den jährlichen Geschäftsabschluß.

1. Die wichtigste mathematische Zahl für den Geschäftsabschluß ist die Summe der Rücklagen für die Rentenversicherungen und für die Kapitalversicherungen auf den Todes- und Lebensfall.

Als Grundlage hierzu dienen die Rücklagen für die einzelnen Versicherungen, die am Ende jedes Versicherungsjahres vorhanden sein müssen. Hat die Bank ausführliche Rücklagetafeln, in denen für jede Versicherungsart, für jedes Beitrittsalter und für jedes Versicherungsjahr die am Ende desselben erforderliche Rücklage auf die Einheit der Rente oder Versicherungssumme verzeichnet ist, so kann hieraus die Rücklage für jede einzelne Versicherung auch von mathematisch

ungeschulten Beamten leicht entnommen, in geeignete Rücklagebücher eingetragen und die Richtigkeit und Vollständigkeit dieser Einträge durch genügend viele Stichproben mit möglichst geringem Zeitaufwande geprüft werden. Bei einem großen Versicherungsbestande macht die Herstellung aller dieser Einträge freilich eine sehr bedeutende Arbeit; denn wenn man annimmt, daß etwa 50 solcher Einträge in einer Arbeitsstunde erledigt werden, so würden auf 1000 Versicherungen 20 Arbeitsstunden, auf 10 000 gegen 25 Arbeitstage nötig sein. Diese große, jährlich wiederkehrende Arbeit kann man dadurch abkürzen, daß man gleichartige Versicherungen zu möglichst großen Gruppen zusammenfaßt, die Gesamtrücklage für jede Gruppe berechnet, und die sich ergebenden Zahlen vereinigt.

Dabei kann man nun Regeln benutzen, die auch zur Ermittlung der einzelnen Rücklagen, die bei Rückkäufen und Darlehen bekannt sein müssen, dienen können, und die damit die ausführlichen, umständlichen und kostbaren Rücklagetafeln entbehrlich machen. Diese Regeln finden sich in den Rechnungen des § 7 bereits angedeutet, indem dort für die Rücklage für Kapitalversicherungen die Formel

$$1) \qquad Rü = B_v K - R_v \beta_x$$

angewandt wurde. Will man nach dieser Regel rechnen, so müssen einmalige Reinbeiträge für jedes bei der Versicherungsart vorkommende Lebensalter, nicht bloß für die Altersjahre, in denen derartige Versicherungen gemäß der Versicherungsbedingungen abgeschlosseu werden dürfen, berechnet und zu einer Tafel (B-Tafel) zusammengestellt werden.

Bei Versicherungen auf den Lebens- und Todesfall, mit Kapitalzahlung spätestens im 65. Lebensjahre, muß also diese Tafel bis zum Alter 64 reichen, wenn auch für den Beitritt zu solchen Versicherungen das 55. Lebensjahr als höchstes zulässiges Beitrittsalter festgesetzt wäre.

Diese B-Tafel ist eine einfache Zahlenreihe, zu jedem Alter x gehört nur eine Zahl B_x.

Außerdem bedarf man noch einer Tafel der Zahlen R_v; ist β_x der Reinbeitrag in Mark, so ist R_v der Zeitwert einer sofort beginnenden Rente von 1 Mark, zahlbar so lange, als bei der fraglichen Versicherung jährliche Beiträge gezahlt werden, berechnet natürlich für den Zahltag der ersten Rente. Auch diese R_v-Tafel enthält nur eine einfache Zahlenreihe, anfangend vom frühesten zulässigen Beitrittsalter, und endigend mit dem Alter, in dem der letzte jährliche Beitrag zu entrichten ist; also ist diese Tafel eine Tafel einmaliger Reinbeiträge für lebenslängliche oder mit einem bestimmten Alter abbrechende Leibrenten von je 1 Mark Betrag.

Für alle Versicherungsarten, bei denen die Kapitalzahlung spätestens an die Überlebenden eines bestimmten Alters y erfolgt, gilt dieselbe B_v-Tafel, unabhängig davon, wie lange Beiträge gezahlt werden. Andrerseits gilt dieselbe R_v-Tafel für alle Versicherungsarten, bei denen die Beitragsfreiheit in demselben Alter u eintritt, gleichgültig, wann der Versicherungsvertrag begonnen hat und zu Ende geht.

Selbstverständlich kann man diese Tafeln zu einer größern Tafel zusammenfassen, und wird dann nur dafür sorgen müssen, daß die Köpfe der einzelnen Spalten so deutlich und ausführlich sind, daß auch mathematisch nicht geschulte Arbeitskräfte mit dieser Tafel arbeiten können.

Zweckmäßig ist es, neben der Tafel mit den Zahlen B_x und R_x noch eine zweite gleichen Umfangs herzustellen, die an Stelle der Zahlen deren Logarithmen enthält, wobei fünf Stellen vollständig genügen. Man wird immer Hilfskräfte finden, die auch ohne theoretische mathematische Vorbildung im Gebrauch der Logarithmen durch praktische Einübung so sicher gemacht werden können, daß

sie mit Hilfe dieser Logarithmen und einer allgemeinen fünfstelligen Tafel die Berechnung der Einzelrücklagen und der Gruppenrücklagen nach Formel 1) auszuführen imstande sind.

2. Bei den Geschäftsabschlüssen, sowie auch oft bei Einzelversicherungen (Rückkäufen, Darlehn und Veränderungen) handelt es sich nicht um die Rücklagen am Ende eines Versicherungsjahres, sondern um die am Ende eines Geschäftsjahres, oder an einem beliebigen andern Zeitpunkte. Wäre die Zahl der Lebenden a_x als mathematische Funktion des Alters x bekannt, etwa nach dem GOMPERTZ-MAKEHAMschen Gesetze, so könnte man die Rücklage für jeden Tag genau berechnen, oder wenigstens eine dieser Berechnung zugrunde zu legende genaue Formel aufstellen. Bei der Auswertung der Formel in gegebenen Fällen würde es sich aber immer wieder darum handeln, daß man sich mit Annäherungen von beschränkter Genauigkeit begnügen muß. Es würde daher auch in diesem unerreichbaren Idealfalle nicht anders werden, als bei Anwendung der statistisch gegebenen Absterbeordnungen: Man rechnet die Rücklage von Versicherungsjahr zu Versicherungsjahr und schaltet für die Zwischenzeiten nach der geraden Linie ein, wenn nicht ein ganz besonderer Grund zu einer andern Einschaltungsweise zwingt. Doch dürfte ein solcher Grund wohl kaum je eintreten.

3. Hat die Rücklage für eine Versicherung mit dem jährlichen Reinbeitrag b am Ende des Lebensjahres z den Betrag $Rü_z$, so wächst sie unmittelbar darauf um b; für den Anfang des Jahres $z+1$ hat sie also die Höhe $Rü_z + b$. Ist sie am Ende dieses $Rü_{z+1}$, so ist ihre Änderung im Laufe des ganzen Jahres $Rü_{z+1} - Rü_z - b$. Nimmt man geradlinige (gleichförmige) Änderung an, so ist sie also für das Alter $z+m$, $(m < 1)$

$$Rü_z + b + m(Rü_{z+1} - Rü_z - b) = (1-m)\,Rü_z + m\,Rü_{z+1} + (1-m)\,b \quad .$$

4. Handelt es sich um Rücklageberechnungen für die jährlichen Abschlüsse, so ändert sich das Glied $(1-m)\,b$ für die Versicherung während ihrer ganzen Dauer nicht, und kann in den Hauptregistern sofort beim Eintragen berechnet und in einer besondern Spalte verzeichnet werden. Nimmt man statt der allen Rechnungen zugrunde liegenden Vorausbezahlung der Jahresbeiträge eine gleichmäßige Verteilung der Zahlung über das ganze Jahr, ohne Rücksicht auf Zinsen an, so ist $(1-m)\,b$ der Teil des Jahresbeitrags, der dem ins neue Geschäftsjahr fallenden Anteil des laufenden Versicherungsjahres zugehört.

Mehrere Banken bezeichnen diese Größen als Überträge, setzen ihre Summe von den Einnahmen des beendeten Geschäftsjahres ab, und tragen sie als Einnahme des nächsten Geschäftsjahres vor. Es steht frei, dies zu tun; nur muß betont werden, daß diese Reinüberträge einen Bestandteil der Gesamtrücklage ausmachen.

Einzelne Banken berechnen die Überträge nicht von den reinen, sondern von den Tarifbeiträgen, und erhalten so eine um die Zuschlagsprozente erhöhte Summe.

Da diese Erhöhung der Überträge einer gewissen Begründung nicht entbehrt und die Sicherheit der Bank vergrößert, so wird man sie gutheißen, auch wenn man die anderweite Begründung nicht für zwingend halten sollte. Der Gesamtrücklage ist aber in diesem Falle immer nur der auf die Reinbeiträge kommende Teil zuzurechnen.

5. Auch wenn die Summe der Zahlen $(1-m)\,b$ nicht im Abschlusse besonders gebucht, sondern in die Rücklage verrechnet wird, wird man doch die Summe besonders berechnen, und hat alsdann nur noch die Zahlen

$$(1-m)\,Rü_z + m\,Rü_{z+1}$$

herzustellen und zusammenzuzählen.

Die Berechnung dieser Zahlen nach Tagen, Wochen oder Monaten macht einen Arbeitsaufwand der ungerechtfertigt ist, wenn man bedenkt, daß die Formel doch nur Anspruch auf angenäherte Richtigkeit erheben kann; man ist daher berechtigt, sie durch jedes einfachere Verfahren zu ersetzen, das die Rücklage größer als $Rü_z$ und kleiner als $Rü_{z+1}$ (oder, je nach Umständen, umgekehrt) ergibt.

Nahe liegt, m für alle Versicherungen gleich $\frac{1}{2}$ zu nehmen, also

$$(1 - m)\,Rü_z + m\,Rü_{z+1} \quad \text{durch} \quad \tfrac{1}{2}(Rü_z + Rü_{z+1})$$

zu ersetzen. Doch hat man auch hier immer noch eine erhebliche Arbeit. Einfacher und bei einem nicht zu kleinen Versicherungsstande ganz unbedenklich ist es, für alle im ersten Halbjahre begonnenen Versicherungen $Rü_{z+1}$, für alle im zweiten Halbjahre begonnenen $Rü_z$ zu nehmen; hat also eine Versicherung mit dem Beitrittsalter 26 in der Zeit vom 1. Januar bis zum 30. Juni 1890 angefangen, so ist für den Abschluß auf das Jahr 1903 die Rücklage $Rü_{39}$, oder, wenn der Doppelzeiger angewendet wird, $Rü_{26,13}$; hätte dagegen die Versicherung erst in der Zeit vom 1. Juli bis 31. Dezember angefangen, so hat man $Rü_{38}$ (bezw. $Rü_{26,12}$) zu nehmen. Der Vorzug dieses Verfahrens ist, daß man für jede Versicherung nur eine Zahl einzusetzen hat. Denselben Vorteil kann man haben, wenn man nach Mittelwerten rechnet, denn

$$\frac{Rü_z + Rü_{z+1}}{2} = \frac{B_z + B_{z+1}}{2} K - \frac{R_z + R_{z+1}}{2} b \quad .$$

Man hat dann außer der Tafel für die Zahlen B_z und R_z noch eine für

$$\tfrac{1}{2}(B_z + B_{z+1}) \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}(R_z + R_{z+1}) \quad ,$$

sowie deren Logarithmen herzustellen.

6. Zur gruppenweisen Berechnung der Rücklagen nach der Regel $B_z K - R_z \beta_x$ hat man Bücher anzulegen, in denen alle die Versicherungen vereinigt sind, die zu derselben B-Tafel, sowie Bücher mit den Versicherungen zu derselben R-Tafel.

Zu derselben B-Tafel gehören bekanntlich alle Versicherungen, bei denen das Kapital beim Tode, spätestens in dem bestimmten Alter y ausgezahlt wird; zu derselben R-Tafel die, bei denen die Beitragsfreiheit in demselben Alter u eintritt (Hauptgruppen nach B und R).

Innerhalb derselben Hauptgruppe ordnet man die Versicherungen nach Altersklassen, und weist jeder Altersklasse einen genügenden, für mehrere Jahre ausreichenden verfügbaren Raum zu. In jeder Altersklasse trägt man nun etwa von Woche zu Woche die neu hinzukommenden Versicherungen nach der Vertragsnummer ein; es genügt, in den B-Büchern dahinter die Versicherungssumme zu bemerken; auf die andre Hälfte des Blattes kommen die im Laufe des Jahres erloschenen (stornierten) Versicherungen, ebenfalls mit Vertragsnummer und Versicherungssumme.

Nach Jahresschluß bildet man die Summe der hinzugekommenen Versicherungssummen, sowie die Summe der weggefallenen, und vermehrt die beim vorigen Abschlusse erhaltene Summe um den Unterschied beider. Die neue Zahl wird in eine besondere, für den Abschluß angelegte Tafel eingetragen, daneben das dem Lebensalter z der Gruppe zugehörige B_z, sowie das Produkt $B_z \Sigma K$.

Ebenso verfährt man mit den Büchern, in denen die zu derselben R_z-Tafel gehörigen Versicherungen zu denselben Untergruppen vereinigt sind; man verzeichnet hier neben den Vertragsnummern die jährlichen Reinbeiträge b, sowie alljährlich den Zugang und Abgang an Nummern und Reinbeiträgen, und leitet wie oben die für das Ende des Geschäftsjahres geltende Zahl ab. Diese wird mit dem für das Lebensalter z gehörige R_z multipliziert, und diese Produkte addiert.

Der Unterschied beider Summen ist die Rücklage. Arbeitet man mit Mittelwerten, so hat man an Stelle der B_z und R_z die entsprechenden Zahlen aus der Mittelwertstafel zu verwenden.

7. Man kann die Zusammenfassung nach Altersklassen noch weiter ausdehnen. Für die reine Versicherung auf den Todesfall ist bekanntlich

$$B_z = \frac{T_z}{l_z}, \quad R_z = \frac{L_z}{l_z} \quad ;$$

für Kapitalversicherung auf den Todes- und Lebensfall, Kapitalzahlung spätestens bei Vollendung des Lebensjahres y hat man

$$B_z^y = \frac{T_z - T_y + l_y}{l_z} \quad ,$$

also

$$1) \qquad B_z^y = B_z + \frac{l_y - T_y}{l_z} \quad .$$

Ferner hat man für Beitragsfreiheit vom Alter u an, während der Beitragszeit,

$$R_z^u = \frac{L_z - L_u}{l_z} \quad ,$$

daher

$$2) \qquad R_z^u = R_x - \frac{L_u}{l_z} \quad .$$

Aus 1) und 2) folgt als Rücklage im Alter z für eine auf das Alter y abgekürzte Todes- und Lebensfallversicherung, mit Beitragsfreiheit vom Alter u an, wenn β_x den Reinbeitrag für das Kapital K bezeichnet,

$$Rü_z = B_z K - R_z \beta_x + (l_y - T_y + L_u b_x) K \cdot \frac{1}{l_z} \quad .$$

Die Zahl

$$(l_y - T_y) K + L_u \beta_x$$

hängt vom Alter z nicht ab, sondern kann für jede Versicherung ein für allemal berechnet werden. Hiernach kann man alle Versicherungen auf den Todes- und Lebensfall in *einem* Buche nach Altersklassen zusammenfassen; man hat hinter jeder Vertragsnummer außer den Zahlen K und β noch die *Hilfszahl*

$$H = (l_y - T_y + L_u b_x) K$$

einzutragen; für jedes Alter hat man dann die Summen ΣK, $\Sigma \beta$ und ΣH zu bilden, der Reihe nach mit

$$B_z\left(= \frac{T_z}{l_z}\right), \quad R_z\left(= \frac{L_z}{l_z}\right) \quad \text{und} \quad \frac{1}{l_z}$$

zu multiplizieren, und schließlich

$$B_z \Sigma K - R_z \Sigma b + \frac{1}{l_z} \Sigma H$$

zu bilden.

Bei Versicherungen auf den Lebens- und Todesfall mit jährlichen Beiträgen und Beitragsfreiheit vom Alter u an ist die Rücklage während der Beitragsfreiheit dieselbe, wie bei einmaligem Beitrage. Man hat daher vom Alter u an in der zweiten Spalte den *Beitrag* β_x und in der dritten die *Hilfszahl* H zu streichen. Um diese Änderungen nicht zu übersehen, dürfte es am rätlichsten sein, ein Beiheft anzulegen, dessen Blätter mit den Jahrzahlen bezeichnet sind, und, sofort nachdem man in die Altersklassen eine Versicherung eingetragen hat, wegen der in späterer Zeit eine Änderung erfolgen muß, dieselbe Versicherung unter der betreffenden Jahrzahl in das Beiheft zu bemerken, nebst Angabe der dann nötigen Änderung. Das Ergebnis dieser Änderungen wird dann bei Herstellung der Summen aus den Spalten der betreffenden Altersklassen berücksichtigt.

8. Für kurze Todesfallversicherungen auf das Alter y, mit jährlichen Beiträgen, hat man, wenn $B_{y,z}$ den einmaligen Beitrag für das Alter z und die Summe 1 bezeichnet,

$$B_{y,z} = \frac{T_z - T_y}{l_z} ,$$

also ist

$$B_{y,z} = B_z - \frac{T_y}{l_z} ,$$

folglich die Rücklage

$$B_z K - R_z \beta_x + \frac{1}{l_z}(L_u b_x - T_y) K .$$

Es können daher auch die kurzen Todesfallversicherungen in die Altersklassen aufgenommen werden; dabei ist die Hilfszahl

$$H = (L_u b_x - T_y) K .$$

9. Bei Lebensfallversicherungen ohne Rückgewähr hat man, wenn ${}^yB_z$ den einmaligen Beitrag für die Summe 1 bezeichnet,

$${}^yB_z = \frac{l_y}{l_z} , \quad Rü_z = \frac{l_y K}{l_z} .$$

Man hat daher bei einmaligem Beitrag nur die Hilfszahl

$$H = l_y K$$

einzutragen.

Bei jährlichen Beiträgen mit Freiheit vom Alter u an hat man während der Beitragszeit

$$Rü_z = \frac{l_y K}{l_z} - \frac{L_z - L_u}{l_z} \beta_x$$
$$= - R_z \cdot \beta_x + \frac{(L_u b_x + l_y) K}{l_x} ,$$

wobei, wie immer, b_x den Reinbeitrag für das Kapital 1, β_x den für das Kapital K bezeichnet. Einzutragen ist daher in die 2. und 3. Spalte der Reinbeitrag β_x, und die Hilfszahl

$$H = (L_u b_x + l_y) K .$$

Mit Eintritt der Beitragsfreiheit fällt β_x weg und die Hilfszahl ist durch $l_y K$ zu ersetzen; die entsprechende Bemerkung ist ins Beiheft einzutragen.

10. Bei Lebensfallversicherungen auf das Alter y mit Rückgewähr der unverkürzten und unverzinsten Tarifbeiträge $(1 + \mu) B_x K$ und $(1 + \mu) b_x K = \beta'_x$ hat man bei einmaligem Beitrage

$${}^yB_z = \frac{l_y}{l_x} + (1 + \mu) B_x \cdot \frac{T_z - T_y}{l_z} ,$$

$$Rü_z = \frac{T_z}{l_z}(1 + \mu) B_x K + \frac{[l_y - (1 + \mu) B_x T_y] K}{l_x} .$$

In die Spalte, in der bei Todesfallversicherungen die Versicherungssumme eingetragen wird, kommt hier der einmalige Tarifbeitrag $(1 + \mu) B_x K$, die Hilfszahl ist

$$H = [l_y - (1 + \mu) B_x T_y] K .$$

Bei jährlichen Beiträgen hat man während der Beitragszeit

$$l_z {}^yB_z = l_y + (1 + \mu) b_x \{\mathfrak{T}_x - (u - x) T_u - \mathfrak{T}_u - [\mathfrak{T}_x - (z - x) T_z - \mathfrak{T}_z]\}$$

$$l_z R_z^u = (L_z - L_u) b_x ,$$

$$Rü_z = - \frac{T_z}{l_z} x \beta'_x - \frac{L_z}{l_z} \cdot \beta_x + \frac{1}{l_z}\left(l_y K - \left[(u - x) T_u + \mathfrak{T}_u + \frac{L_u}{1 + \mu}\right]\right) \beta'_x$$
$$+ \frac{z T_z + \mathfrak{T}_z}{l_z} \beta'_x .$$

Man kann daher auch die Lebensfallversicherungen mit sofortiger Rückgewähr in die Altersklassen eintragen, wenn man noch eine vierte Spalte hinzufügt; in die 1. Spalte, die bei Todesfallversicherungen die Zahlen K enthält, wird hier $x\beta'_x$ mit negativem Zeichen eingetragen, in die 2. der Reinbeitrag; in die 3. Spalte, wo bei Versicherungen für den Todes- und Lebensfall die Hilfszahlen stehen, kommt hier die für jedes x und jedes u zu berechnende Hilfszahl

$$H = l_y K - \left[(u-x)\cdot T_u + \mathfrak{T}_u + \frac{L_u}{1+\mu}\right]\beta'_x \quad ,$$

und in die neue 4. Spalte kommt der Tarifbeitrag β'_x. Die Summe der Zahlen dieser Spalte wird schließlich mit der Zahl multipliziert

$$\frac{(z\,T_z + \mathfrak{T}_z)}{l_z} \quad .$$

11. Bei einfachen Rentenversicherungen handelt es sich hier nur um sofort beginnende oder aufgeschobene Leibrenten gegen einmaligen oder jährlichen Beitrag ohne oder mit Rückgewähr.

A) Sofort beginnende Rente ohne Rückgewähr.

Hier ist bekanntlich
$$R\ddot{u}_z = R_z \cdot \mathfrak{r} \quad ,$$

wenn $\mathfrak{r}$ die jährliche Rentenzahlung bezeichnet. Man kann daher auch die Versicherungen in die Altersklassen aufnehmen, indem man in die R_z-Spalte die jährliche Rentenzahlung $\mathfrak{r}$ mit negativem Zeichen einträgt.

B) Aufgeschobene Leibrente ohne Rückgewähr, einmaliger Beitrag.

Fängt der Genuß im Alter y an, so ist während der Aufschubszeit

$$R\ddot{u}_z = \frac{L_y}{l_z}\cdot \mathfrak{r} \quad ,$$

während des Genusses dagegen

$$R\ddot{u}_z = \frac{L_z}{l_z}\cdot \mathfrak{r} = R_z \cdot \mathfrak{r} \quad .$$

Man hat daher bis zum Rentengenusse die Hilfszahl

$$H = L_y\,\mathfrak{r}$$

zu verwenden; von da an fällt H weg, dagegen kommt $\mathfrak{r}$ in die 2. Spalte, mit negativem Zeichen.

C) Sofort beginnende Leibrente mit Rückgewähr. Während der Rückgewährzeit hat man

$$R\ddot{u}_z = R_z\,\mathfrak{r} + \frac{1}{l_z}\{(T_z - T_{x+g})\,\mathfrak{R}'_x - [(z-x+1)\,t_{z+1} + \ldots + g\,t_{x+g}]\}\,\mathfrak{r} \quad .$$

Bekanntlich ist

$$\begin{aligned}(z-x+1)t_{z+1}+\ldots+g\,t_{x+g} &= (z-x)(T_z - T_{x+g}) + \mathfrak{T}_z - \mathfrak{T}_{z+g} - (x+g-z)\,T_{x+g}\\ &= (z-x)\,T_z - g\,T_{x+g} + \mathfrak{T}_z - \mathfrak{T}_{x+g} \quad ,\end{aligned}$$

daher folgt

$$\begin{aligned}R\ddot{u}_z = &\frac{T_z}{l_z}(\mathfrak{R}'_x + x)\,\mathfrak{r} + \frac{L_z}{l_z}\,\mathfrak{r}\\ &+ \frac{1}{l_z}[\mathfrak{T}_{x+g} - T_{x+g}(\mathfrak{R}'_x - g)]\,\mathfrak{r}\\ &+ \frac{z\,T_z + \mathfrak{T}_z}{l_z}\,\mathfrak{r} \quad .\end{aligned}$$

In die erste Spalte kommt daher hier $(\mathfrak{R}'_x + x)\,\mathfrak{r}$; in die zweite $\mathfrak{r}$ mit negativem Zeichen; in die dritte $[\mathfrak{T}_{x+g} - T_{x+g}(\mathfrak{R}'_x - g)]\,\mathfrak{r}$; in die vierte $\mathfrak{r}$.

12. A) Aufgeschobene Leibrente ohne Rückgewähr; jährliche Beiträge, zahlbar bis zum Anfange des Rentengenusses.

a) Während der Beitragszeit ist

$$Rü_z = \frac{L_x - L_z}{l_z}\beta_x$$
$$= -\frac{L_z}{l_z}\beta_x + \frac{1}{l_z}L_x\beta_x \quad .$$

Die 1. Spalte bleibt frei, in die 2. kommt der Reinbeitrag β_x, in die 1. Hilfszahlspalte wird $L_x\beta_x$ eingetragen.

c) Während der Genußzeit ist

$$Rü_z = \frac{L_z}{l_z}\mathfrak{r} \quad ,$$

also kommt $\mathfrak{r}$ in die 2. Spalte mit negativem Zeichen.

B) Aufgeschobene Leibrente ohne Rückgewähr; jährliche Beiträge mit Beitragsfreiheit vom Alter u an.

a) Während der Beitragszeit ist wie bei A a)

$$Rü_z = -\frac{L_z}{l_z}\beta_x + \frac{L_x\beta_x}{l_x} \quad .$$

In die 2. Spalte kommt β_x, die 1. Hilfszahl ist $L_x\beta_x$.

b) Während der Beitragsfreiheit und vor der Genußzeit ist

$$Rü_z = \frac{L_y}{l_z}\mathfrak{r} \quad ,$$

in die 1. Hilfszahlstelle kommt also $L_y\mathfrak{r}$.

c) Während der Genußzeit ist

$$Rü_z = \frac{L_z}{l_z}\mathfrak{r} \quad ,$$

in die 2. Spalte kommt daher $\mathfrak{r}$ mit negativem Zeichen.

13. A) Aufgeschobene Leibrente mit Rückgewähr, jährlicher Beitrag bis zum Rentengenusse.

a) Während der Aufschubszeit hat man, wenn β'_x den Tarifbeitrag bezeichnet,

$$Rü_z = -\frac{T_z}{l_z}x\beta'_x - \frac{L_z}{l_z}\cdot\beta_x + \frac{1}{l_z}\left(\frac{L_x}{1+\mu} - \mathfrak{T}_x\right)\beta'_x + \frac{\mathfrak{T}_z + zT_z}{l_z}\beta'_x \quad .$$

In die 1. Spalte kommt $x\beta'_x$ mit negativem Zeichen; in die 2. kommt der Reinbeitrag β_x; in die 3. kommt die Hilfszahl

$$\left(\frac{L_x}{1+\mu} - \mathfrak{T}_x\right)\beta'_x \quad ,$$

in die 4. trägt man β'_x ein.

b) Während der Genuß- und Rückgewährzeit hat man, indem man § 7, Nr. 12, c) benutzt und $u = y$ setzt:

$$Rü_z = \frac{L_z}{l_z}\mathfrak{r} + \frac{\beta'_x}{l_z}[(2y - x - z)T_z + T_{2y-x-1} - \mathfrak{T}_z + \mathfrak{T}_{2y-x-1}]$$
$$= \frac{T_z}{l_z}(2y - x)\beta'_x + \frac{L_z}{l_z}\mathfrak{r}$$
$$+ \frac{1}{l_z}(T_{2y-x-1} + \mathfrak{T}_{2y-x-1})\beta'_x$$
$$- \frac{\mathfrak{T}_z + zT_z}{l_z}\cdot\beta'_x \quad .$$

In die 1. Spalte kommt $(2y - x)\beta'_x$, in die 2. $\mathfrak{r}$ mit negativem Zeichen, in die 3.

$$(T_{2y-x-1} + \mathfrak{T}_{2y-x-1})\beta'_x \quad ,$$

in die letzte β'_x mit negativem Zeichen.

c) Nach der Rückgewährzeit hat man, wie bei einmaligem Beitrage,

$$R_{x,n} = \frac{L_z}{l_z}\mathfrak{r} \quad ,$$

in die 2. Spalte kommt $\mathfrak{r}$ mit negativem Zeichen.

B) Aufgeschobene Rückgewährrente mit Beitragsfreiheit vom Alter u an.

a) Während der Beitragszeit ist dieselbe Formel wie bei Aa) zu benutzen.

b) Während der Beitragsfreiheit, doch vor der Genußzeit, hat man nach § 7, Nr. 12, b)

$$\begin{aligned} Rü_z &= \frac{\beta'_x}{l_z}\left(\frac{L_x - L_u}{1+\mu} - \mathfrak{T}_x + \mathfrak{T}_u + (u - x)\,T_z\right) \\ &= \frac{T_z}{l_z}(u - x)\beta'_x + \frac{1}{l_z}\left(\frac{L_x - L_u}{1+\mu} - \mathfrak{T}_x + \mathfrak{T}_u\right)\beta'_x \quad . \end{aligned}$$

In die 1. Spalte kommt $(u - x)\beta'_x$ und in die 3. die Hilfszahl

$$\left(\frac{L_x - L_u}{1+\mu} - \mathfrak{T}_x + \mathfrak{T}_u\right)\beta'_x \quad .$$

c) Während der Genußzeit und vor Ablauf der Rückgewährzeit ist (§ 7, Nr. 12, c))

$$\begin{aligned} Rü_z &= \frac{L_z}{l_z}\mathfrak{r} + \frac{\beta'_x}{l_z}[(u + y - x - z)\,T_z + T_{u+y-x-1} - \mathfrak{T}_z + \mathfrak{T}_{u+y-x-1}] \\ &= \frac{T_z}{l_z}(u + y - x)\beta'_x + \frac{L_z}{l_z}\mathfrak{r} + \frac{1}{l_z}(T_{u+y-x-1} + \mathfrak{T}_{u+y-x-1})\beta'_x \\ &\quad - \frac{\mathfrak{T}_z + z\,T_z}{l_z}\cdot\beta'_x \quad . \end{aligned}$$

In die 1. Spalte kommt $(u + y - x)\beta'_x$; in die 2. $\mathfrak{r}$ mit negativem Zeichen, in die 3. die Hilfszahl

$$(T_{u+y-x-1} + \mathfrak{T}_{u+y-x-1})\beta'_x \quad ,$$

in die letzte der Tarifbeitrag β'_x mit negativem Zeichen.

d) Nach Ablauf der Rückgewährzeit hat man wieder

$$Rü_x = \frac{L_z}{l_z}\mathfrak{r} \quad ,$$

also kommt $\mathfrak{r}$ in die 2. Spalte, mit negativem Zeichen.

14. Gestundete Beiträge. Bei allen Versicherungsrechnungen wird vorausgesetzt, daß die Jahresbeiträge für das laufende Versicherungsjahr am Anfange dieses Jahres, also im voraus, bezahlt werden. Bewilligt man Teilzahlungen, so bilden die Teilbeiträge, die beim jährlichen Geschäftsabschlusse auf die noch laufenden Teile der angebrochenen Versicherungsjahre noch nicht bezahlt sind, ein Guthaben der Bank, das in voller Höhe, d. i. versehen mit den Sicherheitszuschlägen, wie mit den Zinszuschlägen wegen der Teilzahlungen, in Rechnung gestellt werden kann, da man die Voraussetzung machen darf, daß diese Zuschläge beim Anfange des teilweise verflossenen Versicherungsjahres fällig waren.

Man kann die mit gestundeten Beiträgen behafteten Verträge in ein besonderes Heft eintragen und darin im Laufe des Geschäftsjahres die weggefallenen streichen, die neuen hinzufügen und am Schlusse alles geltende zusammenzählen.

Einfacher ist es, die wegfallenden und die hinzukommenden jedes Jahr besonders aufzuschreiben und um den Unterschied dieser Beträge die am Ende des Vorjahres gefundene Zahl zu verändern.

15. Berechnung der Summe, die der Bank am Ende des Geschäftsjahres für die an die Versicherten fälligen Leistungen zur Verfügung stehen. Wir beschränken uns hier auf die Versicherungen auf den Todes- und Lebensfall. Bei a_{x+n} Versicherten besitzt die Bank am Ende des n-ten Versicherungsjahres für jeden einzelnen die Rücklage $Rü_{x,n}$; für jeden der c_{x+n} in diesem Jahre erwarteten Todesfälle hat sie also, wenn die Versicherungssumme K vorausgesetzt wird, $K - Rü_{x,n}$ aus den in diesem Jahre fällig gewordenen Beiträgen dieser Gruppe zur Verfügung, denn die Rechnungen sind so geführt, daß die Bank am Anfange jedes Jahres im Gleichgewichte ist. Verteilt man diese verfügbare Summe auf alle am Ende des Jahres bestehenden Versicherungen, so erhält man für die einzelne den Betrag

$$1)\qquad \mathfrak{S}_{x+n} = \frac{c_{x+n}}{a_{x+n}}(K - Rü_{x,n}) = \frac{t_{x+n}}{l_{x+n}}(K - Rü_{x,n}) \quad .$$

In Wirklichkeit stehen der Bank für die eingetretenen Todesfälle die Rücklagen aus dem Vorjahre nebst den Beiträgen des eben abgeschlossenen Jahres zur Verfügung; die Summe dieser Zahlen ist auf das Ende des Jahres zu übertragen, also mit $1{,}0p$ zu multiplizieren. Zieht man diesen Betrag von der Summe aller am Jahresschluß fällig gewordenen Kapitale ab, so bleibt ein Unterschied V, der angibt, wie viel die Bank aus ihren übrigen Mitteln zur Bestreitung der Leistung an die Versicherten zulegen muß.

Der Unterschied

$$2)\qquad \Sigma(\mathfrak{S}_{x+n}) - V$$

gibt den Gewinn an, den die Bank aus der Sterblichkeit des abgeschlossenen Geschäftsjahres gemacht hat, wenn 2) positv ist, im andern Falle den aus dieser Quelle stammenden Verlust.

Bankleistungen an Erlebende können bei dieser Rechnung außer Betracht bleiben, da für die Auszahlung an die Überlebenden die Rücklage im Augenblicke der Zahlung der Versicherungsumme gleich sein muß.

Es mag noch bemerkt werden, daß die Einnahme aus Beiträgen im n-ten Versicherungsjahre, soweit sie nicht zur Bezahlung der Bankleistungen herangezogen wird (Schädenbeiträge) dazu aufgebraucht wird, die Rücklage auf die erforderliche Höhe zu bringen.

Denn es ist offenbar

$$l_{x+n-1}\,Rü_{x,n-1} + l_{x+n-1}\,\beta_x - t_{x+n}\,K = l_{x+n}\,R_{x,n} \quad .$$

Da nun

$$l_{x+n} = l_{x+n-1}\,r + t_{x+n} \quad ,$$

so hat man

$$l_{x+n-1}\,(Rü_{x,n}\,r - Rü_{x,n-1}) = l_{x+n-1}\,\beta_x - l_{x+n}\,\mathfrak{S}_x \quad .$$

Wenn man die Rücklagen gruppenweise nach Altersklassen berechnet, so kann man die Berechnung des gesamten Schadenbeitrags leicht an die der Rücklage anschließen. Man berechnet für die Versicherungen auf den Todes- und Lebensfall für jede Altersklasse die Zahl

$$\Sigma(K - Rü_z) \quad ,$$

multipliziert jede dieser Zahlen mit $t_z : l_z$ und nimmt dann die Summe aller Produkte.

16. Erwartungsmäßige Sterblichkeit. Hatte die Bank in der Altersklasse z zu Anfang eines Versicherungsjahres a'_z Versicherte, und wäre das Absterben in diesem Versicherungsjahre genau nach der, den mathematischen Zahlen zugrunde liegenden Absterbeordnung erfolgt, so müßten durch Tod im Laufe des Jahres

$$c'_{z+1} = \frac{c_{z+1}}{a_z} a'_z$$

Personen ausgeschieden sein. Nun sind aber noch die Personen zu beachten, die im Laufe des Jahres lebend ausgeschieden sind, sowie die neu Hinzugetretenen. Man wird nicht erheblich von der Wahrheit abweichen, wenn man annimmt, daß die Abgänge und Zugänge gerade in der Mitte des Versicherungsjahres erfolgt wären, und demgemäß diese Zahlen in halber Höhe in Rechnung stellt. Sind g_z hinzugetreten und h_z lebend abgegangen, so hat man daher a'_z durch

$$a'_z + \tfrac{1}{2}(g_z - h_z)$$

zu ersetzen, also zu berechnen

$$c'_{z+1} = \frac{c_{z+1}}{a_z}\left[a'_z + \tfrac{1}{2}(g_z - h_z)\right] .$$

Man kann hiernach die erwartungsmäßigen Sterbefälle für alle Altersklassen und für das abzuschließende Geschäftsjahr berechnen, indem man annimmt, daß die Versicherten am Anfange eines Geschäftsjahres gerade das volle Lebensjahr beendet hatten, dessen Ende sie am nächsten standen.

Vergleicht man damit die Zahl der wirklich eingetretenen Todesfälle, so erkennt man, ob die wirklich eingetretene Sterblichkeit günstiger als die erwartete war, oder nicht.

Sollte die wirkliche Totenzahl jahrelang in für die Bank ungünstiger Weise von der erwarteten abweichen, so müßte man unverzüglich auf Grund andrer, besser an die eigne Erfahrung sich anschließender Tafeln die Beiträge und Rücklagen neu berechnen.

Neben diesem Vergleiche zwischen der erwartungsgemäßen und der wirklich eingetretenen Sterblichkeit ist noch ein andrer zu empfehlen, der auf die Versicherungssummen Bezug nimmt.

Man denkt sich dabei jede einzelne Versicherung auf das Kapital K durch K Versicherungen zerlegt, deren jede auf das Kapital 1 abgeschlossen ist, erteilt also jeder Versicherung ein Gewicht, das ihrer Versicherungssumme gleicht; ebenso verfährt man natürlich mit den Zugängen, lebenden Abgängen und Todesfällen. Das Ergebnis dieses Vergleichs ist für den Betrieb der Bank wichtiger, als wenn man die Versicherungen nur abzählt und sie also als Größen von gleichem Gewichte behandelt.

1. Tafel.

Haupttafel für Versicherungen auf den Lebens- und Todesfall.

x	1 a_x	2 $c_x = a_{x-1} - a_x$	3 $\log a_x$	4 $\log c_x$	5 $\log l_x$ $l_x = a_x r^x$	6 $\log t_x$ $t_x = c_x r^x$	7 l_x
0	100000		5,00000		5,00000		100000
1	71882	28118	4,85662	4,44899	4,84165	4,43405	69451
2	66866	5016	82521	3,70036	79532	3,67048	62420
3	64733	2133	81113	32899	76631	28417	58385
4	63295	1438	80137	15776	74161	09800	55158
5	62289	1006	79441	00260	71971	2,92790	52446
6	61590	699	78951	2,84448	69987	75484	50104
7	61057	533	78574	72673	68115	62215	47990
8	60663	394	78292	59550	66340	47598	46068
9	60364	299	78078	47567	64632	34121	44291
10	60129	235	77908	37107	62968	22167	42627
11	59949	180	77778	25527	61344	09093	41062
12	59782	167	77657	22272	59729	04344	39563
13	59638	144	77552	15836	58130	1,96414	38133
14	59477	161	77435	20683	56519	1,99767	36744
15	59319	158	77319	19866	54909	1,97456	35407
16	59137	182	77186	26007	53281	2,02103	34105
17	58937	200	77039	30103	51640	04704	32840
18	58701	236	76865	37291	49972	10398	31602
19	58433	268	76666	42813	48279	14426	30394
20	58130	303	76440	48144	46559	18263	29214
21	57785	345	76182	53782	44807	22407	28059
22	57449	336	75928	52634	43060	19765	26952
23	57102	347	75665	54033	41302	19670	25884
24	56731	371	75382	56937	39525	21080	24846
25	56341	390	75083	59106	37732	21755	23841
26	55975	366	74799	56348	35955	17503	22885
27	55594	381	74503	58093	34164	17754	21960
28	55181	413	74179	61595	32346	19762	21060
29	54751	430	73839	63347	30512	20020	20189
30	54297	454	73478	65706	28657	20885	19345
31	53849	448	73118	65128	26803	18813	18537
32	53390	459	72746	66181	24937	18372	17757
33	52915	475	72358	67669	23055	18366	17004
34	52400	515	71933	71181	21136	20384	16269

x	8 t_x	9 $L_x = l_x + l_{x+1} + \ldots$	10 $T_x = t_{x+1} + t_{x+2} + \ldots$	11 $\log L_x$	12 $\log R_x$ $R_x = L_x : l_x$	13 R_x	14 $\mathfrak{T}_x = t_{x+1} + 2t_{x+2} + \ldots$
0		1559539	47263,4				510937
1	27168	1459539	20095,4				463674
2	4682,6	1390088	15412,8				443578
3	1923,8	1327668	13489,0				428165
4	1253,1	1269283	12235,9				414676
5	847,04	1214125	11388,9				402441
6	568,66	1161679	10820,2				391052
7	418,94	1111575	10401,3				380231
8	299,21	1063585	10102,1				369830
9	219,39	1017517	9882,7				359728
10	166,60	973226	9716,1				349845
11	123,29	930599	9592,8				340129
12	110,52	889537	9482,3				330536
13	92,07	849974	9390,2				321054
14	99,47	811841	9290,7				311664
15	94,31	775097	9196,4	5,88936	1,34027	21,891	302373
16	104,96	739690	9091,4	86905	33624	21,689	293177
17	111,44	705585	8980,0	84855	33215	21,486	284085
18	127,05	672745	8853,0	82785	32813	21,288	275105
19	139,40	641143	8713,6	80695	32416	21,094	266252
20	152,28	610749	8561,3	78586	32027	20,906	257539
21	167,52	581535	8393,8	76458	31651	20,726	248978
22	157,63	553476	8236,1	74310	31250	20,535	240584
23	157,29	526524	8078,9	72142	30840	20,342	232348
24	162,48	500640	7916,4	69953	30428	20,150	224269
25	165,03	475794	7751,3	67742	30010	19,957	216352
26	149,63	451953	7601,7	65509	29554	19,749	208601
27	150,50	429068	7451,2	63253	29089	19,539	200999
28	157,62	407108	7293,6	60971	28625	19,331	193548
29	158,56	386048	7135,0	58664	28152	19,121	186255
30	161,75	365859	6973,3	56331	27674	18,912	179120
31	154,22	346514	6819,1	53972	27169	18,694	172146
32	152,66	327977	6666,4	51584	26647	18,470	165327
33	152,64	310220	6513,8	49167	26112	18,244	158661
34	159,90	293216	6353,9	46719	25583	18,023	152147

x	1 a_x	2 $c_x =$ $a_{x-1} - a_x$	3 $\log a_x$	4 $\log c_x$	5 $\log l_x$ $l_x = a_x r^x$	6 $\log t_x$ $t_x = c_x r^x$	7 l_x
35	51907	493	4,71523	2,69285	4,19232	2,16994	15571
36	51373	534	71074	72754	17288	18969	14890
37	50846	527	70626	72181	15347	16902	14239
38	50294	552	70152	74194	13379	17421	13608
39	49742	552	69672	74194	11405	15927	13003
40	49168	574	69168	75891	09407	16130	12419
41	48601	567	68665	75358	07409	14102	11860
42	48025	576	68147	76042	05397	13293	11323
43	47429	596	67604	77525	03361	13282	10805
44	46845	584	67066	76641	01329	10904	10311
45	46234	611	66496	78604	3,99265	11373	9832,2
46	45614	620	65910	79239	97184	10514	9372,3
47	44997	617	65318	79029	95099	08810	8932,9
48	44312	685	64652	83569	92939	11856	8499,4
49	43629	683	63978	83442	90770	10235	8085,4
50	42908	721	63254	85794	88552	11093	7682,9
51	42214	694	62546	84136	86350	07941	7303,0
52	41410	804	61711	90526	84021	12836	6921,6
53	40577	833	60828	92065	81644	12881	6553,1
54	39722	855	59903	93197	79226	12519	6198,1
55	38838	884	58926	94645	76754	12473	5855,2
56	37943	895	57913	95182	74248	11516	5526,8
57	36986	957	56804	98091	71644	12931	5205,2
58	35995	991	55624	99607	68970	12933	4894,5
59	34928	1067	54317	3,02816	66170	14668	4588,8
60	33792	1136	52881	05538	63240	15896	4289,4
61	32657	1135	51398	05500	60262	14364	4005,1
62	31460	1197	49776	07909	57146	15279	3727,9
63	30245	1215	48065	08458	53941	14334	3462,7
64	28967	1278	46190	10653	50572	15035	3204,2
65	27605	1362	44099	13418	46987	16306	2950,3
66	26204	1401	41837	14644	43231	16038	2705,9
67	24815	1389	39471	14270	39371	14170	2475,8
68	23334	1481	36799	17056	35205	15462	2249,3
69	21885	1449	34015	16107	30927	13019	2038,3

x	8 t_x	9 L_x $= l_x + l_{x+1} + ..$	10 T_x $= t_{x+1} + t_{x+2} + ..$	11 $\log L_x$	12 $\log R_x$ $R_x = L_x : l_x$	13 R_x	14 $\mathfrak{T}_x$ $= t_{x+1} + 2 t_{x+2} + ..$
35	147,89	276947	6206,0	5,44240	1,25008	17,786	145793
36	154,77	261376	6051,2	41726	24438	17,554	139587
37	147,58	246486	5903,6	39179	23832	17,311	133536
38	149,35	232247	5754,3	33695	23216	17,067	127632
39	144,30	218639	5610,0	33973	22568	16,814	121878
40	144,98	205636	5465,0	31310	21903	16,559	116268
41	138,36	193217	5326,6	28604	21195	16,291	110803
42	135,81	181357	5190,8	25853	20456	16,016	105476
43	135,77	170034	5055,1	23053	19692	15,737	100286
44	128,54	159229	4926,5	20202	18873	15,443	95230,4
45	129,94	148918	4796,6	17295	18030	15,146	90303,9
46	127,39	139086	4669,2	14328	17144	14,840	85507,3
47	122,49	129713	4546,7	11298	16199	14,521	80838,1
48	131,39	120780	4415,3	08200	15261	14,211	76291,4
49	126,58	122281	4288,7	05031	14261	13,887	71876,1
50	129,10	104196	4159,6	01785	13233	13,562	67587,4
51	120,06	96512,8	4039,6	4,98458	12108	13,215	63427,8
52	134,39	89209,8	3905,2	95041	11020	12,888	59388,2
53	134,53	82288,2	3770,6	91534	09890	12,557	55483,0
54	133,41	75735,1	3637,2	87930	08704	12,219	51712,4
55	133,27	69537,0	3504,0	84222	07468	11,876	48075,2
56	130,36	63681,8	3373,6	80402	06154	11,522	44571,2
57	134,68	58155,0	3238,9	76459	04815	11,173	41197,6
58	134,69	52949,8	3104,2	72386	03416	10,818	37958,7
59	140,18	48055,3	2964,1	68174	02004	10,472	34854,5
60	144,20	43466,5	2819,9	63815	00575	10,133	31890,4
61	139,20	39177,1	2680,7	59303	0,99041	9,782	29070,5
62	142,16	35172,0	2538,5	54620	97474	9,435	26389,8
63	139,10	31444,1	2399,4	49754	95813	9,081	23851,3
64	141,37	27981,4	2258,0	44687	94114	8,733	21451,9
65	145,57	24777,2	2112,5	39405	92418	8,398	19193,9
66	144,67	21826,9	1967,8	33899	90668	8,066	17081,4
67	138,58	19121,0	1829,2	28151	88780	7,723	15113,6
68	142,77	16645,2	1686,4	22129	86924	7,400	13284,4
69	134,96	14395,9	1551,5	15824	84897	7,063	11598,0

x	1 a_x	2 $c_x = a_{x-1} - a_x$	3 $\log a_x$	4 $\log c_x$	5 $\log l_x$ $l_x = a_x r^x$	6 $\log t_x$ $t_x = c_x r^x$	7 l_x
70	20321	1564	4,30795	3,19424	3,26212	2,14841	1828,6
71	18814	1507	27448	17811	21372	11735	1635,8
72	17170	1644	23477	21590	15907	14020	1442,3
73	15662	1508	19485	17840	10421	08776	1271,2
74	14076	1586	14848	20030	04290	09472	1103,8
75	12630	1446	10140	16017	2,98088	03965	956,93
76	11172	1458	04813	16376	91267	02830	817,84
77	9753	1419	3,98914	15198	83873	00158	689,82
78	8349	1404	92164	14737	75629	1,98203	570,55
79	7064	1285	84905	10890	66877	92862	466,41
80	5923	1141	77254	05729	57732	86206	377,85
81	4924	999	69232	2,99957	48215	78941	303,50
82	3999	925	60195	96614	37685	74104	238,15
83	3204	795	50569	90037	26565	66033	184,35
84	2498	706	39759	84880	14261	59382	138,87
85	1913	585	28172	76716	01179	49724	102,75
86	1459	454	16406	65706	1,87919	37219	75,72
87	1047	412	01995	61490	72014	31509	52,50
88	725	322	2,86034	50786	54559	19311	35,12
89	497	228	69636	35793	36667	02824	23,26
90	328	169	51587	22789	17125	0,88326	14,83
91	232	96	36549	1,98227	00592	62270	10,14
92	147	85	16732	92942	0,79281	55491	6,21
93	98	49	1,99123	69020	60178	30075	4,00
94	72	26	85733	41497	45294	01058	2,84
95	52	20	71600	30103	29668	9,88170	1,98
96	32	20	50515	30103	07088	86676	1,18
97	18	14	25527	14613	9,80606	69692	0,64
98	11	7	04139	0,84510	57724	38095	0,38
99	4	7	0,60206	84510	12297	36601	0,13
100	1	3	0,00000	47712	8,50597	8,98309	0,03
		1		00000		49103	

x	8 t_x	9 L_x $= l_x + l_{x+1} + \ldots$	10 T_x $= t_{x+1} + t_{x+2} + \ldots$	11 $\log L_x$	12 $\log R_x$ $R_x = L_x : l_x$	13 R_x	14 $\mathfrak{T}_x$ $= t_{x+1} + 2 t_{x+2} + \ldots$
70	140,74	12357,6	1410,7	4,09194	0,82982	6,758	10046,5
71	131,02	10529,0	1279,7	02239	80867	6,437	8635,8
72	138,10	8893,2	1141,6	3,94906	78999	6,166	7356,1
73	122,39	7450,9	1019,2	87220	76799	5,861	6214,5
74	124,37	6179,7	894,9	79097	74807	5,599	5195,3
75	109,56	5075,9	785,3	70551	72463	5,304	4300,4
76	106,73	4119,0	678,6	61479	70212	5,036	3515,1
77	100,37	3301,2	578,2	51868	67995	4,786	2836,5
78	95,948	2611,4	482,2	41687	66058	4,577	2258,3
79	84,844	2040,8	397,4	30980	64103	4,376	1776,1
80	72,789	1574,4	324,6	19711	61979	4,167	1378,7
81	61,576	1196,5	263,0	07791	59576	3,942	1054,1
82	55,086	893,0	207,9	2,95083	57398	3,750	791,1
83	45,743	654,9	162,2	81617	55046	3,552	583,2
84	39,248	470,6	123,0	67265	53004	3,389	421,0
85	31,422	331,7	91,5	52075	51896	3,303	298,0
86	23,561	228,9	68,0	35965	48046	3,023	206,5
87	20,658	153,2	47,3	18526	46512	2,918	138,5
88	15,600	100,7	31,7	00303	45744	2,867	91,2
89	10,672	65,6	21,0	1,81690	45023	2,820	59,5
90	7,643	42,3	13,4				38,5
91	4,195	27,5	9,2				25,1
92	3,589	17,4	5,6				15,9
93	1,999	11,1	3,6				10,3
94	1,025	7,1	2,6				6,7
95	0,762	4,3	1,8				4,1
96	0,736	2,3	1,1				2,3
97	0,498	1,1	0,6				1,2
98	0,240	0,5	0,4				0,6
99	0,232	0,2	0,2				0,2
100	0,096	0,0	0,0				0,0
	0,032						

2. Tafel. Hauptafel für

x	1 $\mathfrak{A}_x$ $= a_x + \dots$ $+ a_{x+9}$	2 $\log \mathfrak{A}_x$	3 $\log \mathfrak{A}_x r^x$	4 $\mathfrak{l}_x$ $= \mathfrak{A}_x r^x$	5 $\mathfrak{L}_x$ $= \mathfrak{l}_0 + \mathfrak{l}_1$ $+ \dots + \mathfrak{l}_x$	6 $\mathfrak{t}_x =$ $\mathfrak{A}_{x-1} - \mathfrak{A}_x$
0	672739	5,82785	5,82785	672740	672740	
1	632868	80132	78638	611470	1284210	39871
2	620935	79304	76316	579640	1863850	11933
3	613851	78807	74325	553670	2417520	7084
4	608756	78444	72468	530490	2948010	5095
5	604938	78171	70701	509340	3457350	3818
6	601968	77957	68993	489700	3947050	2970
7	599515	77780	67322	471210	4418260	2453
8	597395	77627	65675	453680	4871940	2120
9	595433	77483	64037	436890	5308830	1962
10	593502	77342	62402	420750	5729580	1931
11	591503	77195	60761	405150	6134730	1999
12	589339	77037	59109	390030	6524760	2164
13	587006	76864	57442	375340	6900100	2333
14	584470	76676	55760	371080	7271180	2536
15	581724	76472	54062	347230	7618410	2746
16	578746	76249	52345	333770	7952180	2978
17	575584	76011	50612	320720	8272900	3162
18	572241	75758	48865	308070	8580970	3343
19	568721	75490	47103	295820	8876790	3520
20	565039	75208	45327	283970	9160760	3682
21	561206	74912	43537	272500	9433260	3833
22	557270	74607	41738	261440	9694700	3936
23	553211	74289	39926	250760	9945460	4059
24	549024	73959	38102	240450	10185910	4187
25	544693	73615	36264	230480	10416390	4331

Kinderversicherung.

x	7 $\log \mathfrak{r}_x$	8 $\log \mathfrak{r}_x r^x$	9 $\mathfrak{t}_x = \mathfrak{r}_x r^x$	10 $\mathfrak{T}_x = \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2 + \ldots + \mathfrak{t}_x$	11 $x\mathfrak{t}_x$	12 $T_x = \mathfrak{t}_1 + 2\mathfrak{t}_2 + \ldots + x\mathfrak{t}_x$
0						
1	4,60066	4,58572	38523	38523	38523	38523
2	4,07675	4,04687	11139	49662	22278	60801
3	3,85028	3,80546	6389,4	56051,4	19168,2	79969,2
4	70714	64738	4440,0	60491,4	17760,0	97729,0
5	58184	50714	3214,7	63706,1	16073,5	113802,0
6	47276	38312	2416,1	66122,2	14496,6	128299,3
7	38970	28512	1928,0	68050,2	13496,0	141795,3
8	32634	20682	1610,0	69660,2	12880,0	154675,3
9	29270	15824	1439,6	71099,8	12956,4	167631,7
10	28578	13638	1368,9	72468,7	13689,0	181320,7
11	30081	13647	1369,2	73837,9	15061,2	196381,9
12	33526	15598	1432,1	75270,0	17185,2	213567,1
13	36791	17369	1491,7	76761,7	18392,1	231959,2
14	40415	19499	1566,7	78328,4	21933,8	253893,0
15	43870	21460	1639,1	79967,5	24586,5	278479,5
16	47392	23488	1717,4	81684,9	27478,4	305957,9
17	49996	24597	1761,8	83446,7	29950,6	335908,5
18	52414	25521	1799,7	85246,4	32394,6	368303,1
19	54654	26267	1830,9	87077,3	34787,1	403090,2
20	56608	26727	1850,4	88927,7	37008,0	440098,2
21	58354	26979	1861,2	90788,9	39085,2	479183,4
22	59506	26637	1846,6	92635,5	40625,2	519808,6
23	60842	26479	1839,9	94475,4	42317,7	562126,3
24	62190	26333	1833,7	96309,1	44088,8	606215,1
25	63659	26308	1832,7	98141,8	45817,5	652032,6

3. Tafel.

Grundzahlen für Feierzeitversicherungen.

x	1 a_x	2 d_x	3 $\log d_x$	4 $\log i_x$	5 $\log i_x d_x$	6 $i_x d_x$	7 $\frac{1}{2} i_x d_x$
20	58130	58130	4,7644	6,3222	1,0866	12,2	6,1
21	57785	57773	7617	4472	2089	16,2	8,1
22	57449	57423	7591	5798	3389	21,8	10,9
23	57102	57058	7563	6812	4375	27,4	13,7
24	56731	56665	7533	7782	5315	34,0	17,0
25	56341	56248	7501	8573	6074	40,5	20,2
26	55975	55851	7470	9345	6815	48,0	24,0
27	55594	55433	7438	7,0086	7524	56,6	28,3
28	55181	54978	7402	0755	8157	65,4	32,7
29	54751	54500	7364	1303	8667	73,6	36,8
30	54297	53992	7323	1847	9170	82,6	41,3
31	53849	53484	7282	2430	9712	93,6	46,8
32	53390	52958	7239	2967	2,0206	104,9	52,5
33	52915	52409	7194	3483	0677	116,9	58,5
34	52400	51813	7144	4014	1158	130,6	65,3
35	51907	51231	7095	4533	1628	145,5	72,8
36	51373	50599	7041	5011	2052	160,4	80,2
37	50846	49967	6987	5478	2465	176,4	88,2
38	50294	49300	6929	5922	2851	192,8	96,4
39	49742	48625	6869	6325	3194	208,6	104,3
40	49168	47919	6805	6758	3563	227,1	113,6
41	48601	47210	6740	7226	3966	249,2	124,6
42	48025	46476	6672	7679	4351	272,3	136,2
43	47429	45706	6600	8122	4722	296,6	148,3
44	46845	44929	6525	8609	5134	326,1	163,1
45	46234	44106	6445	9090	5535	357,7	178,9
46	45614	43250	6360	9590	5950	393,6	196,8
47	44997	42373	6271	8,0141	6412	437,7	218,9
48	44312	41398	6170	0734	6904	490,2	245,1
49	43629	40388	6062	1313	7375	546,4	273,2
50	42908	39301	5944	1923	7867	611,9	305,9
51	42214	38195	5820	2524	8344	683,0	341,5
52	41410	36927	5674	3079	8753	750,4	375,2
53	40577	35585	5513	3614	9127	817,9	409,0
54	39722	34174	5337	4148	9485	888,2	444,1

x	8 e_x	9 $e_x + \frac{1}{2} i_x d_x$	10 log 9)	11 log v_x	12 10)+11)	13 num 12)	14 $e_x + i_x d_x$
20		6,1	0,7853	9,0086	9,7939	0,6	12,2
21	11,6	19,7	1,2945	8,9917	0,2862	1,9	27,8
22	25,9	36,8	5659	9745	5404	3,5	47,7
23	44,2	57,9	7627	9566	7193	5,2	71,6
24	66,4	83,4	9212	9385	8597	7,2	100,4
25	93,2	113,2	2,0538	9196	9734	9,4	133,7
26	124,3	148,3	1711	9004	1,0715	11,8	172,3
27	160,5	188,8	2760	8791	1551	14,3	217,1
28	202,8	235,5	3720	8573	2293	17,0	268,2
29	251,2	288,0	4594	8357	2951	19,7	324,8
30	305,1	346,4	5396	8169	3565	22,7	387,7
31	365,0	411,8	6147	8062	4209	26,4	458,6
32	432,2	484,7	6855	8062	4917	31,0	537,1
33	506,1	564,6	7517	8062	5579	36,1	623,0
34	586,9	652,2	8144	8055	6199	41,7	717,5
35	675,8	748,6	8743	8055	6798	47,8	821,3
36	773,5	853,7	9313	8055	7368	54,6	933,9
37	879,3	967,5	9857	8055	7912	61,8	1056
38	994	1090	3,0374	8055	8429	69,7	1187
39	1117	1221	0867	8014	8881	77,3	1326
40	1249	1363	1345	7938	9283	84,8	1476
41	1391	1516	1807	7774	9581	90,8	1640
42	1549	1685	2266	7657	9923	98,2	1821
43	1723	1871	2721	7466	2,0187	104,4	2020
44	1916	2079	3179	7372	0551	113,5	2242
45	2128	2307	3631	7243	0874	122.3	2486
46	2364	2561	4084	7202	1286	134,5	2758
47	2624	2843	4538	7160	1698	147,8	3062
48	2914	3159	4996	7126	2122	163,0	3404
49	3241	3514	5458	7093	2551	179,9	3787
50	3607	3913	5925	7076	3001	199,5	4219
51	4019	4360	6395	7016	3411	219,3	4702
52	4483	4858	6865	6955	3820	241,0	5233
53	4992	5401	7325	6866	4191	262,5	5810
54	5548	5992	7776	6857	4633	290,6	6436

x	1 a_x	2 d_x	3 $\log d_x$	4 $\log i_x$	5 $\log i_x d_x$	6 $i_x d_x$	7 $\frac{1}{2} i_x d_x$
55	38838	32693	4,5145	8,4676	2,9821	959,6	479,8
56	37943	31159	4936	5213	3,0149	1035	517
57	36986	29523	4702	5782	0484	1118	559
58	35995	27806	4441	6381	0822	1208	604
59	34928	25966	4144	6984	1128	1297	648
60	33792	24014	3804	7580	1384	1375	688
61	32657	22040	3432	8133	1565	1434	717
62	31460	20009	3012	8668	1680	1472	736
63	30245	17992	2551	9151	1702	1480	740
64	28967	15979	2036	9587	1623	1453	727
65	27605	13990	1458	9,0001	1459	1399	700
66	26204	12091	0825	0432	1257	1336	668
67	24815	10331	0141	0823	0964	1249	624
68	23334	8636	3,9363	1226	0589	1145	573
69	21885	7134	8533	1660	0193	1045	523
70	20321	5662	7530	2047	2,9577	907,2	454
71	18814	4427	6461	2399	8860	769,1	385
72	17170	3305	5192	2675	7867	611,9	306
73	15662	2430	3856	2871	6727	470,7	235
74	14076	1737	2398	3028	5426	348,8	174
75	12630	1228					

x	8 e_x	9 $e_x + \frac{1}{2} i_x d_x$	10 log 9)	11 log v_x	12 10) + 11)	13 num 12)	14 $e_x + i_x d_x$
55	6145	6625	3,8212	8,6857	2,5069	321,3	7105
56	6784	7301	8634	6875	5509	355,6	7819
57	7463	8022	9043	6893	5936	392,3	8581
58	8189	8793	9441	6946	6387	435,2	9397
59	8962	9610	9827	6998	6825	481,4	10259
60	9778	10466	4,0198	7093	7291	535,9	11153
61	10617	11334	0544	7235	7779	599,7	12051
62	11451	12187	0859	7404	8263	670,3	12923
63	12253	12993	1137	7582	8719	744,6	13733
64	12988	13715	1372	7796	9168	825,7	14441
65	13615	14315	1558	7987	9545	900,5	15014
66	14113	14781	1697	8149	9846	965,2	15449
67	14484	15108	1792	8357	3,0149	1035	15733
68	14698	15271	1839	8543	0382	1092	15843
69	14751	15274	1840	8716	0556	1137	15796
70	14659	15113	1793	8921	0714	1179	15566
71	14387	14772	1694	9414	1108	1291	15156
72	13865	14171	1514	9436	0950	1245	14477
73	13232	13467	1293	9,0055	1348	1364	13703
74	12339	12513	0974	0117	1091	1286	12688
75	11402						

4. Tafel.

Haupttafel für Feierzeitversicherungen.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	d_x	e_x	$\log d_x$	$\log e_x$	$\log s_x$ $s_x = d_x r^x$	$\log f_x$ $f_x = e_x r^x$	s_x	f_x	$S_x = s_x + s_{x+1} + \cdots$
20	58130		4,76440		4,46559		29214		570274
21	57773	12	76172	1,07918	44797	0,76543	28053	6	541060
22	57423	26	75908	41497	43039	1,08628	26939	12	513007
23	57058	44	75632	64345	41269	29982	25864	20	486068
24	56665	66	75332	81954	39475	46097	24817	29	460204
25	56248	98	75010	99123	37659	61772	23801	41	435387
26	55851	124	74703	2,09342	35858	70497	22834	51	411586
27	55433	161	74376	20683	34037	80344	21896	64	388752
28	54978	203	74018	30750	32185	88917	20982	77	366856
29	54500	251	73640	39967	30313	96640	20092	93	345874
30	53992	305	73233	48430	28412	2,03609	19236	109	325782
31	53484	365	72822	56229	26507	09914	18411	126	306546
32	52958	432	72393	63548	24584	15739	17613	144	288135
33	52409	506	71940	70415	22637	21112	16841	163	270522
34	51813	587	71444	76864	20647	26067	16087	182	253681
35	51231	676	70953	82995	18662	30704	15368	203	237594
36	50599	774	70414	88874	16629	35089	14665	224	222226
37	49967	879	69868	94399	14589	39120	13992	246	207561
38	49300	994	69285	99739	12512	42966	13339	269	193569
39	48625	1117	68686	3,04805	10419	46538	12711	292	180230
40	47919	1249	68051	09656	08290	49895	12103	315	167519
41	47210	1391	67403	14333	06148	53078	11521	340	155416
42	46476	1549	66723	19005	03974	56256	10958	365	143895
43	45706	1723	65997	23629	01754	59386	10412	393	132937
44	44929	1916	65253	28240	3,99516	62503	9889	422	122525
45	44106	2128	64450	32797	97219	65566	9380	453	112636
46	43250	2364	63599	37365	94874	68640	8887	486	103256
47	42373	2624	62709	41896	92490	71677	8412	521	94369
48	41398	2914	61698	46449	89985	74736	7941	559	85957
49	40388	3241	60625	51068	87418	77861	7485	601	78016
50	39301	3607	59440	55715	84738	81013	7037	646	70531
51	38195	4019	58200	60412	82005	84217	6608	695	63494
52	36927	4483	56734	65157	79044	87467	6172	749	56886
53	35585	4992	55127	69827	75943	90643	5747	806	50714
54	34174	5548	53369	74414	72691	93736	5332	866	44967

x	10 $F_x = f_x + f_{x+1} + \dots$	11 $\log (1 - v_x)$	12 $\log \varepsilon_x$	13 $\log \varphi_x$ $\varphi_x = \varepsilon_x r^x$	14 φ_x	15 $\Phi_x = \varphi_x + \varphi_{x+1} + \dots$	16 $\log k_x$ $k_x = d_x : a_x$	17 $\log \lambda_x$ $\lambda_x = e_x : \varepsilon_x$
20		9,95327	4,00000	3,70119	5026	45388	10,00000	
21	36351	95515	3,95327	63952	4360	40362	9,99990	7,12591
22	36345	95698	90842	57973	3800	36002	99980	50655
23	36333	95881	86540	52177	3325	32202	99967	77805
24	36313	96057	82421	46564	2922	28877	99950	99533
25	36284	96233	78478	41127	2578	25955	99927	8,20645
26	36243	96402	74711	35866	2284	23377	99904	34631
27	36192	96581	71113	30774	2031	21093	99873	49570
28	36128	96755	67694	25861	1814	19062	99839	63056
29	36051	96918	64449	21122	1626	17248	99801	75518
30	35958	97054	61367	16546	1464	15622	99755	87063
31	35849	97128	58421	12106	1321	14158	99704	97808
32	35723	97128	55549	07740	1195	12837	99647	9,07999
33	35579	97128	52677	03374	1081	11642	99582	17738
34	35416	97132	49805	2,99008	977	10561	99511	27059
35	35234	97132	46937	94646	884	9584	99430	36058
36	35031	97133	44069	90284	800	8700	99340	44805
37	34807	97133	41202	85923	723	7900	99242	53197
38	34561	97132	38335	81562	654	7177	99133	61404
39	34292	97160	35467	77200	592	6523	99014	69338
40	34000	97211	32627	72866	535	5931	98883	77029
41	33685	97318	29838	68583	485	5396	98738	84495
42	33345	97391	27156	64407	441	4911	98576	91849
43	32980	97506	24547	60304	401	4470	98393	99082
44	32587	97562	22053	56316	366	4069	98187	0,06187
45	32165	97635	19615	52384	334	3703	97954	13182
46	31712	97658	17250	48525	306	3369	97689	20115
47	31226	97681	14908	44689	280	3063	97391	26988
48	30705	97699	12589	40876	256	2783	97046	33860
49	30146	97717	10288	37081	235	2527	96647	40780
50	29545	97726	08005	33303	215	2292	96186	47710
51	28899	97758	05731	29536	197	2077	95654	54681
52	28204	97790	03489	25799	181	1880	95023	61668
53	27455	97836	01279	22095	166	1699	94299	68548
54	26649	97841	2,99115	18437	153	1533	93463	75299

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	d_x	e_x	$\log d_x$	$\log e_x$	$\log s_x$ $s_x = d_x r^x$	$\log f_x$ $f_x = e^x r^x$	s_x	f_x	$S_x = s_x + s_{x+1} + \dots$
55	32693	6145	4,51445	3,78852	3,69273	2,96680	4929	926	39635
56	31159	6784	49359	83149	65693	99483	4539	988	34706
57	29523	7463	47016	87291	61856	3,02131	4155	1050	30167
58	27806	8189	44412	91323	57758	04669	3781	1113	26012
59	25966	8962	41440	95240	53292	07092	3411	1177	22231
60	24014	9778	38046	99025	48404	09383	3048	1241	18820
61	22040	10617	34321	4,02600	43185	11464	2703	1302	15772
62	20009	11451	30123	05885	37493	13255	2371	1357	13069
63	17992	12253	25508	08825	31384	14701	2060	1403	10698
64	15979	12988	20355	11354	24737	15736	1768	1437	8638
65	13990	13615	14582	13402	17470	16290	1495	1455	6870
66	12091	14113	08247	14962	09641	16356	1249	1457	5375
67	10331	14484	01414	16089	01314	15989	1031	1445	4126
68	8636	14698	3,93631	16726	2,92037	15132	832	1417	3095
69	7134	14751	85333	16882	82245	13794	664	1374	2263
70	5662	14659	75297	16610	70715	12028	510	1319	1599
71	4427	14387	64611	15797	58535	09721	385	1251	1089
72	3305	13865	51917	14192	44347	06622	278	1165	704
73	2430	13232	38561	12163	29497	03099	197	1074	426
74	1737	12339	23980	09128	13422	98570	136	968	229
75	1228	11402	08920	05698	1,96868	93646	93	864	93

x	10 $F_x = f_x + f_{x+1} + \dots$	11 log $(1 - v_x)$	12 $\log \varepsilon_x$	13 $\log \varphi_x$ $\varphi_x = \varepsilon_x r^x$	14 φ_x	15 $\Phi_x = \varphi_x + \varphi_{x+1} + \dots$	16 $\log k_x$ $k_x = d_x : a_x$	17 $\log \lambda_x$ $\lambda_x = e_x : \varepsilon_x$
55	25783	9,97841	2,96956	2,14784	141	1380	9,92519	0,81896
56	24857	97831	94797	11131	129	1239	91446	88352
57	23869	97822	92628	07468	119	1110	90212	94663
58	22819	97795	90450	03796	109	991	88788	1,00873
59	21706	97768	88245	00097	100	882	87123	06995
60	20529	97717	86013	1,96371	92	782	85165	13012
61	19288	97639	83730	92594	84	690	82923	18870
62	17986	97543	81369	88739	77	606	80347	24516
63	16629	97437	78912	84788	70	529	77443	29913
64	15226	97303	76349	80731	64	459	74165	35005
65	13789	97178	73652	76540	58	395	70483	39750
66	12334	97068	70830	72224	53	337	66410	44132
67	10877	96918	67898	67798	48	284	61943	48191
68	9432	96779	64816	63222	43	236	56832	51910
69	8015	96642	61595	58507	38	193	51318	55287
70	6641	96473	58237	53655	34	155	44502	58373
71	5322	96029	54710	48634	31	121	37163	61087
72	4071	96008	50739	43169	27	90	28440	63453
73	2906	95362	46747	37683	24	63	19076	65416
74	1832	95292	42109	31551	21	39	09132	67019
75	864		37401	25349	18	18	8,98780	68297

Sechstes Buch.

Kartenentwürfe

bearbeitet von

Dr. Richard Heger,
a. o. Honorarprofessor an der Kgl. Sächs. Techn. Hochschule
und Gymnasialoberlehrer in Dresden.

Kartenentwürfe.

§ 1. Allgemeine Abbildungsformeln.

1. Die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z eines Punktes P einer Fläche $\mathfrak{f}$ kann man als Funktionen zweier unabhängiger Veränderlichen u, v darstellen. (2. Band, 4. Buch, § 10.) Für die Zwecke der Abbildungslehre soll insbesondere vorausgesetzt werden, daß x, y, z innerhalb des abzubildenden Gebietes eindeutige Funktionen von u und v sind. Setzt man

$$\text{1)}\quad \begin{cases} e = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2 , \\ f = \dfrac{\partial x}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial y}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial v} , \\ g = \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2 , \end{cases}$$

so ist bekanntlich das Bogenelement, das einer Verschiebung des Punktes um du und dv entspringt, wenn $dv : du = k$ gesetzt wird,

$$\text{2)}\qquad ds = \sqrt{e^2 + 2fk + gk^2} \cdot du \quad .$$

Für die Cosinus α, β, γ der Winkel, die ds mit den Achsen bildet, hat man

$$\text{3)}\quad \begin{cases} \alpha = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u} + k\dfrac{\partial x}{\partial v}\right) : N, \\ \beta = \left(\dfrac{\partial y}{\partial u} + k\dfrac{\partial y}{\partial v}\right) : N, \qquad N = \sqrt{e^2 + 2fk + gk^2} \quad . \\ \gamma = \left(\dfrac{\partial z}{\partial u} + k\dfrac{\partial z}{\partial v}\right) : N, \end{cases}$$

Der Winkel ϑ zwischen den zu k und k' gehörigen Richtungen bestimmt sich aus

$$\text{4)}\qquad \cos\vartheta = \frac{e + f(k + k') + gkk'}{N \cdot N'} \quad .$$

Die Richtungen k und k' sind also rechtwinklig zueinander, wenn

$$\text{5)}\qquad e + f(k + k') + gkk' = 0 \quad .$$

2. Um $\mathfrak{f}$ auf eine andre Fläche $\mathfrak{f}_1$ abzubilden, drücken wir die Koordinaten $x_1 y_1 z_1$ der Punkte P_1 von $\mathfrak{f}_1$ durch dieselben unabhängigen Veränderlichen u und v aus; wenn einem bestimmten Wertvereine uv die Punkte P und P_1 zugehören, so nennen wir den einen dieser Punkte (z. B. P_1) das Bild des andern (P). Da wir übrigens betreffs $x_1 y_1 z_1$ dieselbe Voraussetzung x machen, wie betreffs x, y, z, so ist damit die Abbildung wechselseitig eindeutig innerhalb der abgebildeten Gebiete.

3. Parameterkurven. Ändert man nur v, erteilt also u einen beständigen Wert $u = u_0$, so beschreiben P auf $\mathfrak{f}$ und sein Bild P_1 auf $\mathfrak{f}_1$ zwei entsprechende Kurven, die als Parameterkurven erster Art $u = u_0$ bezeichnet werden. Geht man von u_0 zu andern Werten $u = u_1, u_2, u_3, \ldots$ über, so überdecken sich beide Flächen mit je einer Schar von Parameterkurven erster Art. Zwei Parameterkurven erster Art auf einer Fläche ($\mathfrak{f}$ oder $\mathfrak{f}_1$) schneiden sich innerhalb des dargestellten Gebietes nicht, da vorausgesetzt worden ist, daß jedem Punkte nur ein Wertverein u, v zugehört.

Erteilt man dagegen der andern Unabhängigen v einen beständigen Wert $v = v_0$, ändert also nur u, so ergeben sich auf $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$ zwei entsprechende Parameterkurven zweiter Art; durch Übergang von v zu andern beständigen Werten $v_1, v_2, v_3, \ldots$ bedecken sich beide Flächen bezw. die dargestellten Gebiete, mit je einer Schar von Parameterkurven zweiter Art. Zwei Parameterkurven ungleicher Art schneiden sich innerhalb des abgebildeten Gebietes auf $\mathfrak{f}$ bezw. $\mathfrak{f}_1$ nur in einem Punkte, da vorausgesetzt wird, daß die Koordinaten von P und P_1 eindeutige Funktionen der Parameter sein sollen.

Aus den allgemeinen Formeln Nr. 1, 2) bis 4) und den entsprechenden für $\mathfrak{f}_1$ ergeben sich für die Parameterkurven die besondern Formeln:

A) Für die Parameterkurven $u = u_0$, also $du = 0$:

$$1)\quad \begin{cases} ds = \sqrt{g}\cdot dv\,, & \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v}\,, \quad \beta = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v}\,, \quad \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial v}\;; \\ ds_1 = \sqrt{g_1}\cdot dv\,, & \alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{g_1}}\cdot\dfrac{\partial x_1}{\partial v}\,, \quad \beta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{g_1}}\cdot\dfrac{\partial y_1}{\partial v}\,, \quad \gamma_1 = \dfrac{1}{\sqrt{g_1}}\cdot\dfrac{\partial z_1}{\partial v}\,. \end{cases}$$

B) Für die Parameterkurven $v = v_0$, also $dv = 0$:

$$2)\quad \begin{cases} ds = \sqrt{e}\cdot du\,, & \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{e}}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u}\,, \quad \beta = \dfrac{1}{\sqrt{e}}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u}\,, \quad \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{e}}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial u}\;; \\ ds_1 = \sqrt{e_1}\cdot du\,, & \alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{e_1}}\cdot\dfrac{\partial x_1}{\partial u}\,, \quad \beta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{e_1}}\cdot\dfrac{\partial y_1}{\partial u}\,, \quad \gamma_1 = \dfrac{1}{\sqrt{e_1}}\cdot\dfrac{\partial z_1}{\partial u}\,. \end{cases}$$

Für den Winkel ϑ bezw. ϑ_1 zwischen den Richtungen $u = u_0$ und k hat man

$$3)\qquad \cos\vartheta = \frac{f + g k}{N\sqrt{g}}\,, \qquad \cos\vartheta_1 = \frac{f_1 + g_1 k}{N_1\sqrt{g_1}}\;;$$

für den Winkel zwischen den Richtungen $v = v_0$ und k ist

$$4)\qquad \cos\vartheta = \frac{e + f k}{N\sqrt{e}}\,, \qquad \cos\vartheta_1 = \frac{e_1 + f_1 k}{N_1\sqrt{e_1}}\,.$$

Die Schnittwinkel von $u = u_0$ und $v = v_0$ folgen aus

$$5)\qquad \cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{eg}}\cdot f\,, \qquad \cos\vartheta_1 = \frac{1}{\sqrt{e_1 g_1}}\cdot f_1\,.$$

4. Entsprechende Flächenelemente können als Parallelogramme angesehen werden, deren unendlich kleine Nachbarseiten Bogenelemente der Parameterkurven sind; da nun für den Sinus der Schnittwinkel der Parameterkurven aus Nr. 3, 5) folgt

$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{eg - f^2}}{\sqrt{eg}}\,, \qquad \sin\vartheta_1 = \frac{\sqrt{e_1 g_1 - f_1^2}}{\sqrt{e_1 g_1}}\,,$$

so ergibt sich für entsprechende verschwindend kleine Flächen

$$1)\qquad \begin{cases} dF = \sqrt{eg - f^2}\cdot dv\,du\,, \\ dF_1 = \sqrt{e_1 g_1 - f_1^2}\cdot dv\,du\;; \end{cases}$$

das Flächenverhältnis an entsprechenden Punkten ist daher

$$2) \qquad \frac{dF_1}{dF} = \frac{\sqrt{e_1 g_1 - f_1^2}}{\sqrt{eg - f^2}} \quad .$$

Dieses Verhältnis ist eine Funktion von u, v, d. i. also eine Funktion des Ortes in $\mathfrak{f}$, bezw. des entsprechenden Ortes in $\mathfrak{f}_1$.

Für das Längenverhältnis, d. i. für das Verhältnis entsprechender kleiner Verschiebungen in $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$ hat man:

A) Entlang der Parameterkurve $u = u_0$:

$$3) \qquad \frac{ds_1}{ds} = \sqrt{\frac{g_1}{g}} \quad ;$$

B) entlang der Parameterkurve $v = v_0$:

$$4) \qquad \frac{ds_1}{ds} = \sqrt{\frac{e_1}{e}} \quad ;$$

C) in der Richtung $dv : du = k$:

$$5) \qquad \frac{ds_1}{ds} = \frac{\sqrt{e_1 + 2f_1 k + g_1 k^2}}{\sqrt{e + 2fk + gk^2}} \quad .$$

Wie vorauszusehen war, hängt dies Verhältnis nicht bloß von u und v, sondern auch von k, also der Richtung der Verschiebung, ab.

5. Entsprechende rechte Winkel. Wenn die Richtungen k und k' auf beiden Flächen rechtwinklig zueinander sein sollen, so müssen die Gleichungen erfüllt sein

$$1) \qquad \begin{cases} e + f(k + k') + gkk' = 0 \quad , \\ e_1 + f_1(k + k') + g_1 kk' = 0 \quad . \end{cases}$$

Haben sie die Wurzel k, so haben sie natürlich auch die Wurzel, die zu der darauf rechtwinkligen Fortschrittsrichtung gehört; da nun mehr als zwei Wurzeln nicht möglich sind, so folgt: An zwei entsprechenden Stellen gibt es nur ein Paar entsprechende rechte Winkel.

Aus 1) erhält man

$$k + k' = \frac{eg_1 - e_1 g}{gf_1 - g_1 f}, \qquad kk' = \frac{fe_1 - f_1 e}{gf_1 - g_1 f} \quad ,$$

also sind k und k' die Wurzeln der Gleichung

$$2) \qquad (fg_1 - f_1 g)k^2 + (eg_1 - e_1 g)k + (ef_1 - e_1 f) = 0 \quad .$$

Wir werden nur Abbildungen in Betracht ziehen, bei denen diese Gleichung innerhalb des abgebildeten Gebietes reale Wurzeln hat.

Die durch 2) bestimmten Richtungen werden als Hauptrichtungen bezeichnet.

Betrachtet man 2) als Differentialgleichung für v, und integriert, so erhält man zwei Scharen von Integralen; jedes beliebige Wertpaar u, v genügt einem Integrale jeder der beiden Scharen. Einer Gleichung zwischen u und v entsprechen einfach unendlich viele Paare u, v; zu einer Änderung von u gehört auf Grund der Gleichung eine ganz bestimmte Änderung von v, also eine bestimmte Fortschrittsrichtung auf der Fläche $\mathfrak{f}$, wie auf $\mathfrak{f}_1$; eine Gleichung zwischen u und v gehört also zu einem bestimmten Paare entsprechender Kurven. Die Integrale der Differentialgleichung 2) gehören daher in $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$ zu zwei Paaren entsprechender Kurven, deren Elemente die Hauptrichtungen angeben, und die deswegen Hauptkurven genannt werden.

Man kann immer die Hauptkurven als Parameterkurven wählen. Sind nämlich

$$3)\qquad \varphi(u, v, U) = 0\,, \quad \psi(u, v, V) = 0$$

die Integrale von 2), und dabei U und V die Integrationskonstanten, so drücke man u und v mittels 3) durch U und V aus; erhält man

$$u = \Phi(U, V)\,, \quad v = \Psi(U, V)$$

und setzt diese Werte in die Koordinaten xyz, $x_1 y_1 z_1$ ein, so werden diese Funktionen von U und V; für die Parameterkurven ist dann U, bezw. V, beständig, d. h. diese Kurven sind die Integralkurven von 2). Die Hauptkurven schneiden sich überall rechtwinklig; folglich ist für alle Werte von u und v, also identisch,

$$f = f_1 = 0\quad ;$$

und umgekehrt, wenn die Fundamentalgrößen f und f_1 identisch verschwinden, so sind die Parameterkurven Hauptkurven.

Nimmt man die Hauptkurven zu Parameterkurven, so vereinfachen sich die Formeln ganz erheblich. Man hat, da $f = f_1 = 0$ ist (Nr. 3),

$$4)\qquad \begin{cases} ds = \sqrt{e^2 + g k^2}\cdot du\,, & ds_1 = \sqrt{e_1 + g_1 k^2}\cdot du\quad, \\ \cos\vartheta = \dfrac{e + g k k'}{\sqrt{(e + g k^2)(e + g k'^2)}}\,, & \cos\vartheta_1 = \dfrac{e_1 + g_1 k k'}{\sqrt{(e_1 + g_1 k^2)(e_1 + g_1 k'^2)}}\,, \\ \dfrac{dF_1}{dF} = \sqrt{\dfrac{e_1 g_1}{e g}}\quad. \end{cases}$$

6. Entsprechende gleiche Winkel. Sollen die zwischen den Richtungen k und k' enthaltenen Winkel auf $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$ einander gleich sein, so muß die Gleichung bestehen

$$1)\qquad \frac{e + f(k + k') + g k k'}{\sqrt{(e + 2fk + gk^2)(e + 2fk' + gk'^2)}} = \frac{e_1 + 2f_1(k + k') + g_1 k k'}{\sqrt{(e_1 + 2f_1 k + g_1 k^2)(e_1 + 2f_1 k' + g_1 k'^2)}}\,.$$

Sind die Parameterkurven Hauptkurven, also $f = f_1 = 0$, so vereinfacht sie sich zu

$$2)\qquad \frac{e + g k k'}{\sqrt{(e + g k^2)(e + g k'^2)}} = \frac{e_1 + g_1 k k'}{\sqrt{(e_1 + g_1 k^2)(e_1 + g_1 k'^2)}}\,.$$

Beseitigt man in 2) die Wurzeln und Nenner, so ergibt sich nach einfachen Umgestaltungen

$$3)\qquad (e g_1 - g e_1)(k - k')^2 (e e_1 - g g_1 k^2 k'^2) = 0\quad.$$

Unterdrückt man den zweiten Faktor, der zu der nichtssagenden Lösung $k = k'$ führt, so bleibt die Bedingungsgleichung für k und k'

$$4)\qquad k k' = \sqrt{\frac{e e_1}{g g_1}}\quad.$$

Zu jedem beliebigen k folgen hiernach zwei entgegengesetzt gleiche Werte von k' dergestalt, daß die zwischen k und k' enthaltenen Winkel auf $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$ einander gleich sind.

Unter der Bedingung

$$5)\qquad e g_1 - g e_1 = 0$$

herrscht Winkeltreue, d. i. ist jeder Winkel auf $\mathfrak{f}$ gleich seinem Bilde auf $\mathfrak{f}_1$. Im allgemeinen ist 5) eine Bedingungsgleichung für u und v, und lehrt: Wird der Gleichung

$$e g_1 - g e_1 = 0$$

von realen Werten von u und v genügt, die zu innerhalb des dar-

gestellten Gebietes liegenden Punkten führen, so gehören zu ihr entsprechende winkeltreue Linien, d. i. Linien, an deren entsprechenden Punktpaaren alle Winkel sich unverändert abbilden.

Ist die Gleichung
$$e g_1 - g e_1 = 0$$
identisch erfüllt, so herrscht an allen Paaren entsprechender Punkte Winkeltreue, jeder Winkel des Urbildes gleicht seinem Abbilde.

Da die Hauptgrößen e, g, e_1, g_1 Summen von je drei Quadraten sind, von denen nicht die drei bei derselben Hauptgröße beteiligten zugleich verschwinden können, so kann der Gleichung 3) nicht unter einer andern Voraussetzung als 4) oder 5) genügt werden.

7. Verhältnis entsprechender Längenelemente. Werden wieder die Parameterkurven als Hauptkurven vorausgesetzt, so haben die entsprechenden Längenelemente ds_1 und ds das Verhältnis (Nr. 4, 5))

$$1) \qquad \frac{ds_1}{ds} = \sqrt{\frac{e_1 + g_1 k^2}{e + g k^2}} \quad .$$

Das Verhältnis ist die Einheit, wenn

$$2) \qquad e_1 + g_1 k^2 = e + g k^2 , \qquad k^2 = \frac{e - e_1}{g_1 - g} \quad .$$

Haben $e - e_1$ und $g - g_1$ gleiches Zeichen, so ist k^2 negativ; an Punktpaaren, die der Voraussetzung entsprechen, gibt es also keine längentreu sich abbildenden Elemente. Haben dagegen $e - e_1$ und $g - g_1$ ungleiche Zeichen, so findet sich längentreue Abbildung für zwei bestimmte Werte von k, die entgegengesetzt gleich sind, also zu Richtungen gehören, die von den Hauptrichtungen halbiert werden.

Die Abbildung an zwei entsprechenden Punkten bezeichnet man als maßstabstreu, wenn je zwei entsprechende Längenelemente ein bestimmtes Verhältnis n haben, das also nur von der Lage der Ausgangspunkte, nicht von der Fortschrittsrichtung k abhängt. Die Bedingung der Maßstabstreue ist, daß

$$ds_1 : ds = n$$

für jedes k erfüllt wird, daß also die Gleichung

$$\frac{e_1 + g_1 k^2}{e + g k^2} = n^2$$

für k identisch ist; schreibt man sie in der Gestalt

$$e_1 - n^2 e + (g_1 - n^2 g) k^2 = 0 \quad ,$$

so erkennt man als Bedingung für Maßstabstreue

$$3) \qquad e_1 - n^2 e = 0 , \qquad g_1 - n^2 g = 0 \quad .$$

Aus 3) folgt

$$e_1 g - e g_1 = 0 \quad ,$$

die Abbildung ist also an zwei entsprechenden Punkten zugleich maßstabstreu und winkeltreu. An den Kurven, deren Punkte sich winkeltreu abbilden, wechselt natürlich das Längenverhältnis n im allgemeinen von Punkt zu Punkt.

Betrachtet man die Gleichung

$$e_1 - n^2 e + (g_1 - n^2 g) k^2 = 0 \quad ,$$

worin jetzt n eine gegebene Zahl bedeuten soll, als Differentialgleichung für k, so ergibt die Integration zwei Kurvenscharen, deren Elemente sich so abbilden, daß längs jeder solcher Kurve der Längenmaßstab sich nicht ändert. Wir wollen diese Kurven als maßstabstreue Linien bezeichnen.

Für einen bestimmten Wert von u und v, d. h. also für zwei entsprechende Punkte, wird n im allgemeinen zwischen gewissen äußersten Werten sich bewegen, wenn k die reale Zahlenreihe durchläuft. Aus

$$\frac{e_1}{e} - \frac{e_1 + g_1 k^2}{e + g k^2} = \frac{(e_1 g - e g_1) k^2}{e(e + g k^2)}$$

und

$$\frac{g_1}{g} - \frac{e_1 + g_1 k^2}{e + g k^2} = - \frac{e_1 g - e g_1}{g(e + g k^2)}$$

erkennt man sofort, daß für alle Werte von k die beiden Unterschiede

$$\frac{e_1}{e} - \frac{e_1 + g_1 k^2}{e + g k^2} \quad \text{und} \quad \frac{g_1}{g} - \frac{e_1 + g_1 k^2}{e + g k^2}$$

entgegengesetzte Vorzeichen haben; welcher von beiden positiv ist, hängt nur von dem Vorzeichen von

$$e_1 g - e g_1$$

ab, da e, g, e_1 und g_1 Summen von Quadraten, die beiden Nenner also stets positiv sind.

Hieraus folgt: Das größte und das kleinste Längenverhältnis gehört den Hauptrichtungen zu. Für jedes Längenverhältnis n, das zwischen diesen äußersten Werten enthalten ist, gibt es zwei Scharen von Kurven, deren Elemente sich in dem Maßstabe n abbilden.

8. Verhältnis entsprechender Flächenelemente. Für dieses Verhältnis S haben wir in Nr. 4, 2) erhalten

$$S = \sqrt{\frac{e_1 g_1 - f_1^2}{e g - f^2}} \quad .$$

Sollen entsprechende Flächenelemente gleich sein, so ist $S = 1$, also

$$1) \qquad e_1 g_1 - f_1^2 = e g - f^2 \quad .$$

Dies ist im allgemeinen eine Bedingungsgleichung für u und v, und diese ergibt zwei entsprechende Kurven. Im allgemeinen gibt es also bei jeder Abbildung zwei entsprechende Kurven, längs deren Flächentreue herrscht. Selbstverständlich können diese Kurven sich auf entsprechende Punkte zusammenziehen, oder auch irreal sein.

Ist die Gleichung

$$e_1 g_1 - f_1^2 = e g - f^2$$

identisch erfüllt, so ist die ganze Abbildung flächentreu, d. i. das Verhältnis je zweier unendlich kleiner oder auch endlicher entsprechender Flächen ist beständig. Sind die Parameterkurven Hauptkurven, so vereinfacht sich die identische Gleichung für flächentreue Abbildung zu

$$2) \qquad e_1 g_1 - e g = 0 \quad .$$

Wird unter m eine gegebene absolute Zahl verstanden, so ist

$$3) \qquad e_1 g_1 - f_1^2 = m^2 (e g - f^2)$$

die Bedingung dafür, daß entsprechende Flächenelemente das Verhältnis m haben: bei jeder Abbildung gibt es also im allgemeinen zwei entsprechende Linien, längs deren entsprechende Flächenelemente sich verhältnistreu mit der Verhältniszahl m abbilden.

9. Der Maßzug. Trägt man auf der Berührungsebene der Fläche $\mathfrak{f}_1$ im Punkte P_1 auf der Tangente von $\mathfrak{f}_1$, die die Richtung k hat, von P_1 aus eine Strecke $P_1 II$ von der Länge

$$\varrho = \frac{d s_1}{d s}$$

ab, und gibt k alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, so beschreibt der Endpunkt von ϱ eine bestimmte Linie, die wir als Maßzug des Punktes P_1 bezeichnen wollen. Der Maßzug ist hiernach zunächst eine bildliche Darstellung für die in den verschiedenen Richtungen um P_1 herum herrschenden Längenverzerrungen; es wird sich zeigen, daß er auch die Winkelverzerrungen, sowie das Flächenverhältnis in sehr einfacher Weise veranschaulicht. Nehmen wir zunächst an, daß die Parameterkurven Hauptkurven sind, so ist, wenn die Richtungen k und $v = v_0$ den Winkel ϑ_1 bilden (Nr. 5, 4)),

$$1)\qquad \cos\vartheta_1 = \frac{\sqrt{e_1}}{\sqrt{e_1 + g_1 k^2}}, \qquad \sin\vartheta_1 = \frac{\sqrt{g_1}\cdot k}{\sqrt{e_1 + g_1 k^2}},$$

daher

$$2)\qquad \varrho^2 \cos^2\vartheta_1 = \frac{e_1}{e + g k^2}, \qquad \varrho^2 \sin^2\vartheta_1 = \frac{g_1 k^2}{e + g k^2}.$$

Diese Größen sind die Quadrate der rechtwinkligen Koordinaten des Punktes II des Maßzugs, bezogen auf die Tangenten an die Parameterkurven $v = v_0$ und $u = u_0$ des Punktes P_1. Setzt man

$$\varrho\cos\vartheta_1 = X, \qquad \varrho\sin\vartheta_1 = Y,$$

so ergibt sich aus 2) die Gleichung des Maßzugs

$$3)\qquad \frac{e}{e_1}\cdot X^2 + \frac{g}{g_1}\cdot Y^2 = 1.$$

Der Maßzug ist daher eine Ellipse mit den Halbachsen

$$4)\qquad a = \sqrt{\frac{e_1}{e}}, \qquad b = \sqrt{\frac{g_1}{g}}.$$

Für den Winkel zwischen k und $v = v_0$ im Urbilde P, also auf der Fläche $\mathfrak{f}$, hat man nach Nr. 3, 4)

$$\cos\vartheta = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e + g k^2}}, \qquad \sin\vartheta = \frac{\sqrt{g}\cdot k}{\sqrt{e + g k^2}},$$

daher folgt

$$X = a\cos\vartheta, \qquad Y = b\sin\vartheta.$$

Der Winkel ϑ des Urbildes gibt als Abbild ϑ_1; die excentrische Anomalie eines jeden Punktes des Maßzugs bildet sich also als Polwinkel dieses Punktes ab. Insbesondere gilt: Die rechten Winkel des Urbildes geben als Abbilder die Winkel zwischen konjugierten Halbmessern des Maßzugs.

Bei beliebigen Parametern bestimmt man die Richtungen der Hauptachsen des Maßzugs aus der Gleichung

$$f_1 g - f g_1 + (e g_1 - e_1 g) k + (e f_1 - f e_1) k^2 = 0,$$

und die Länge der Halbachsen erhält man, wenn man die Wurzeln dieser Gleichung in das Längenverhältnis

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{\sqrt{e_1 + 2 f_1 k + g_1 k^2}}{\sqrt{e + 2 f k + g k^2}}$$

einsetzt.

Für das Flächenverhältnis hat man nach 4)

$$S = a b = a' b' \sin\gamma,$$

wenn a', b', γ zwei konjugierte Halbmesser und ihr Winkel sind.

10. Größte Winkelverzerrung. Für die entsprechenden Winkel zwischen k und $v = v_0$ hat man (Nr. 3, 4))

$$1)\quad \begin{cases} \cos\vartheta = \dfrac{\sqrt{e}}{\sqrt{e+gk^2}}, & \sin\vartheta = \dfrac{\sqrt{g}\cdot k}{\sqrt{e+gk^2}}, & \operatorname{tang}\vartheta = \sqrt{\dfrac{g}{e}}\cdot k \quad ; \\ \cos\vartheta_1 = \dfrac{\sqrt{e_1}}{\sqrt{e_1+g_1k^2}}, & \sin\vartheta_1 = \dfrac{\sqrt{g_1}\cdot k}{\sqrt{e_1+g_1k^2}}, & \operatorname{tang}\vartheta_1 = \sqrt{\dfrac{g_1}{e_1}}\cdot k \quad . \end{cases}$$

Für die Verzerrung dieses Winkels ergibt sich hieraus

$$2)\quad \begin{cases} \cos(\vartheta_1-\vartheta) = \dfrac{\sqrt{ee_1}+\sqrt{gg_1}\cdot k^2}{\sqrt{(e_1+g_1k^2)(e+gk^2)}}, \quad \sin(\vartheta_1-\vartheta) = \dfrac{(\sqrt{eg_1}-\sqrt{e_1g})\,k}{\sqrt{(e_1+g_1k^2)(e+gk^2)}}, \\ \operatorname{tang}(\vartheta_1-\vartheta) = \dfrac{(\sqrt{eg_1}-\sqrt{e_1g})\,k}{\sqrt{ee_1}+\sqrt{gg_1}\cdot k^2} \quad . \end{cases}$$

Diese Verzerrung erreicht an dieser Stelle ihren höchsten Betrag, wenn $d\operatorname{tang}(\vartheta_1-\vartheta) : dk = 0$, d. i. wenn

$$\sqrt{ee_1}+\sqrt{gg_1}\cdot k^2 - 2\sqrt{gg_1}\cdot k^2 = 0 \quad ,$$

woraus folgt

$$3)\qquad k^2 = \sqrt{\frac{ee_1}{gg_1}}, \qquad k = \sqrt[4]{\frac{ee_1}{gg_1}} \quad .$$

Hierdurch sind zwei Richtungen bestimmt, die symmetrisch gegen die Achsen des Maßzugs liegen.

Aus 3) folgt weiter

$$4)\qquad \begin{cases} e+gk^2 = e+g\sqrt{\dfrac{ee_1}{gg_1}} = e\cdot\dfrac{a+b}{b} \quad , \\ e_1+g_1k^2 = e_1+g_1\sqrt{\dfrac{ee_1}{gg_1}} = e_1\cdot\dfrac{a+b}{a} \quad . \end{cases}$$

Wird der Höchstbetrag von $\vartheta_1-\vartheta$ mit w bezeichnet, so ist offenbar $2w$ die größte vorkommende Winkelverzerrung, und man erhält leicht aus 4)

$$5)\qquad \cos w = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}, \quad \sin w = \frac{a-b}{a+b}, \quad \operatorname{tang} w = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}} \quad .$$

Für das Längenverhältnis in diesen Richtungen ergibt sich

$$\varrho^2 = \frac{e_1}{e}\cdot\frac{b}{a} = ab, \quad \varrho = \sqrt{ab} \quad .$$

§ 2. Gliederung der geographisch wichtigsten Kartenentwürfe.

1. Bei den geographischen Kartenentwürfen handelt es sich um Abbildung der mathematischen Erdoberfläche auf die Ebene. Der Maßstab der Abbildung ist meist so klein, daß gegenüber der durch die Umstände beschränkten Genauigkeit die mathematische Erdoberfläche als Kugel angesehen werden darf. Wir werden diese Voraussetzung machen, und fügen dann in einem besondern Abschnitte die Abänderungen hinzu, die die Kartenentwürfe erfahren müssen, wenn man die Erdoberfläche, unter Rücksicht auf ihre Abplattung, als Ellipsoid betrachtet.

2. Um die *Erdkugel* auf einer Ebene abzubilden, denken wir uns zunächst eine verkleinerte Erdkugel hergestellt, die der Erde selbst ähnlich ist; *der Maßstab, in dem wir die Erde dabei ähnlich abbilden, ist der Kartenentwurfsmaßstab.* Den Halbmesser der verjüngten Erdkugel nehmen wir der Einfachheit wegen als Längeneinheit.

3. Die Lage eines Ortes auf der Erde bestimmen wir durch geeignete *Kugelkoordinaten.* Hierzu wählen wir einen beliebigen Hauptkreis der Erde als Koordinatengrundkreis, oder *Grundkreis* schlechthin; der hierauf senkrechte Durchmesser heißt die Achse des Grundkreises, ihre Spuren $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}'$ auf der Erde der *Pol* und *Gegenpol* des Grundkreises. Die durch die Pole gehenden Hauptkreise, die den Grundkreis rechtwinklig schneiden, heißen *Ordinatenkreise.* Ein Ordinatenkreis wird als *Nullkreis,* sein Schnitt mit dem Grundkreise als *Nullpunkt* O der Koordinaten bezeichnet. Um nun auf diesen Grundlagen die Lage eines Punktes P der Kugeloberfläche zu bestimmen, legt man durch P einen Ordinatenkreis, und bemerkt seinen Schnittpunkt P' mit dem Grundkreise. Man bezeichnet alsdann den Bogen OP' als *sphärische Abscisse* und den Bogen $P'P$ als *sphärische Ordinate* von P. Diese Bestimmungsart kann man als Seitenstück zu rechtwinkligen Koordinaten in der Ebene betrachten. Ein Seitenstück zu ebenen Polarkoordinaten erhält man, wenn man von einem Pole $\mathfrak{N}$ des Grundkreises und dem Nullkreise $\mathfrak{N}O$ ausgeht und die Lage von P durch den *Polwinkel* $O\mathfrak{N}P$ und den *Polabstand* $\mathfrak{N}P$ bestimmt. Wie man sofort sieht, ist alsdann der Polwinkel $O\mathfrak{N}P$ eines Punktes P gleich seiner sphärischen Abscisse OP', und der Polabstand $\mathfrak{N}P$ ist die Rechtergänzung der sphärischen Ordinate $P'P$.

Wählt man den *Gleicher* als Grundkreis, so ist $\mathfrak{N}$ ein Pol der Erde und die Ordinatenkreise sind Meridiane. Nimmt man den Meridian als Nullkreis, von dem aus die geographischen Längen gezählt werden, so ist die sphärische Abscisse die geographische Länge; die Ordinate ist die geographische Breite.

4. *Änderungsformeln für sphärische Koordinaten.* Will man vom gewöhnlichen geographischen Koordinatensysteme zu einem übergehen, dessen Pol $\mathfrak{N}$ vom Nordpole N der Erde den Abstand a hat, so kann man zunächst der Einfachheit wegen den Hauptkreis $N\mathfrak{N}$ als Nullkreis wählen.

Sind λ', δ' die Polarkoordinaten des Punktes P im alten Systeme, während für das neue λ und δ gelten mögen, so hat man unter Anwendung des Cosinus und des Sinussatzes (Fig. 83)

$$1)\quad \begin{cases} \cos\delta = \cos a \cos\delta' + \sin a \sin\delta' \cos\lambda' \;, \\[6pt] \sin\lambda = \dfrac{\sin\delta' \sin\lambda'}{\sin\delta} \;. \end{cases}$$

Fig. 83.

Liegt $\mathfrak{N}$ auf dem Gleicher, so ist $a = 90^0$ und die erste dieser Formeln vereinfacht sich zu

$$\cos\delta = \sin\delta' \cos\lambda' \;.$$

Von diesen Koordinatenänderungen wird bei Kartenentwürfen ein ausgedehnter Gebrauch gemacht. Es handelt sich dabei immer um das Entwerfen eines dichten Gradnetzes, man hat daher für δ und λ die Glieder von arithmetischen Reihen von geeignet kleinem Unterschiede und innerhalb der Grenzen des darzustellenden Gebietes zu setzen. Die umständlichen Rechnungen sind für den Fall $a = 90^0$ zuerst von LAMBERT*) für Abstufung von δ und λ von 10^0 zu 10^0 berechnet und von GERMAIN**) auf die Abstufung von 5 zu 5^0 erweitert worden. Von

*) LAMBERT, Beiträge zum Gebrauche der Mathematik, 1765—1772.
**) GERMAIN, Traité des projections des cartes géographiques, 1863.

HAMMER*) wurden diese Tafeln verbessert und die Rechnung auf die Werte $a = 75^0, 70^0, 65^0, 60^0, 55^0, 50^0, 45^0, 40^0, 35^0, 30^0$ und 15^0 ausgedehnt.

4. Die Abbildung der Erdoberfläche denken wir uns entweder unmittelbar auf eine Ebene ausgeführt, oder wir entwerfen sie zunächst auf einen Umdrehungscylinder, oder auf einen Umdrehungskegel, wobei wir immer voraussetzen wollen, daß die Umdrehungsachse den Erdmittelpunkt enthält; den Cylinder, bezw. Kegelmantel breiten wir alsdann in die Kartenebene aus. Die Entwürfe teilen wir demgemäß in ebene, Säulen- und Kegelentwürfe ein. Wir unterscheiden weiter, ob bei ebenen Entwürfen der zur Entwurfsebene senkrechte Erddurchmesser, bezw. die Umdrehungsachse der Säule oder des Kegels die Erdachse ist, oder mit der Erdachse rechte oder schiefe Winkel bildet. Hiernach unterscheiden wir die Entwürfe als geradständige, querständige und zwischenständige ebene, Säulen- und Kegelentwürfe**).

Während sich diese Unterscheidung nur auf die Lage der Bildfläche zur verjüngten Erde bezieht, geht die folgende Unterscheidung auf die Abbildungsweise ein. Die geographisch wichtigsten Abbildungsarten bilden bei ebenen Entwürfen die Ordinatenkreise eines gewissen Grundkreises als Strahlen eines Punktes A ab, ohne die Winkel der Ordinatenkreise zu verändern, und die Parallelkreise des Grundkreises als Kreise um den Mittelpunkt A; diese Entwürfe werden als echte ebene Entwürfe bezeichnet. Bei den Säulen- und den Kegelentwürfen nehmen wir immer den Koordinatengrundkreis senkrecht zur Säulen- bezw. Kegelachse und nennen den Entwurf echt, wenn die Ordinatenkreise durch ihre Spuren auf dem Säulen- bezw. Kegelmantel, und die Parallelkreise des Grundkreises als Parallelkreise der Säule, bezw. des Kegels abgebildet werden. Alle andern noch in Betracht kommenden Entwurfsarten kann man als unechte ebene, Säulen- und Kegelentwürfe den echten beiordnen.

5. Wir werden nun nacheinander die geographisch wichtigsten ebenen, Säulen- und Kegelentwürfe betrachten, und zwar zuerst in jeder Gruppe die echten, dann die der Gruppe angegliederten unechten. Da bei der Beurteilung der Zweckmäßigkeit eines Entwurfs es hauptsächlich auf die auftretenden Flächen- und Winkelverzerrungen ankommt, so werden wir zunächst die flächentreuen und dann die winkeltreuen Entwürfe besprechen. Den andern Entwürfen kommt eine gewisse Mittelstellung zwischen Flächentreue und Winkeltreue zu, wir werden sie daher als vermittelnde den flächentreuen und winkeltreuen folgen lassen.

Der Einfachheit wegen gehen wir immer von geradständigen Entwürfen aus.

§ 3. Ebene Entwürfe.

1. Als Parameter nehmen wir die geographische Länge λ und den Polabstand δ; bezogen auf den Aequator als XY-Ebene, den Nullmeridian als XZ-Ebene und die Erdachse als Z-Achse sind die Koordinaten eines Punktes der verjüngten Erde, wenn, wie schon oben bemerkt, ihr Halbmesser als Längeneinheit genommen wird,

$$1)\qquad x = \sin\delta\cos\lambda\,,\quad y = \sin\delta\sin\lambda\,,\quad z = \cos\delta\;.$$

Hieraus folgt

$$2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial\delta} = \cos\delta\cos\lambda\,, & \dfrac{\partial y}{\partial\delta} = \cos\delta\sin\lambda\,, \quad \dfrac{\partial z}{\partial\delta} = -\sin\delta\;, \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial\lambda} = -\sin\delta\sin\lambda\,, & \dfrac{\partial y}{\partial\lambda} = \sin\delta\cos\lambda\,, \quad \dfrac{\partial z}{\partial\lambda} = 0\;, \end{cases}$$

*) HAMMER, Über die geographisch wichtigsten Kartenprojektionen, Stuttgart 1889, S. 114, sowie S. [1] bis [23]; auf S. 114 finden sich Nachweise über die in den verschiedenen Wiedergaben der LAMBERTschen und GERMAINschen Tafeln aufgefundenen Fehler.
Man vergleiche auch GRETSCHEL, Lehrbuch der Kartenprojektion, Weimar 1873, S. 236 u. 237.

**) Wir schließen uns hier, wie bei andern Benennungen, dem Vorgange A. BREUSINGS an; vergleiche u. a. Das Verebnen der Kugelfläche für Gradnetzentwürfe, Leipzig 1892.

daher hat man

$$3)\qquad e = 1\,,\quad f = 0\,,\quad g = \sin^2\delta\quad.$$

Für das Bild legen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde, dessen Nullpunkt A, und dessen Abscissenachse das Bild des Nullkreises ist. Hat P_1 von A den Abstand ϱ, so sind bei einem echten Entwurfe seine Polarkoordinaten ϱ und λ, und daher die rechtwinkligen

$$4)\qquad x_1 = \varrho\cos\lambda\,,\quad y_1 = \varrho\sin\lambda\,,\quad z_1 = 0\quad.$$

Da sich bei echten Entwürfen jeder Parallelkreis der Erde als Kreis um A abbildet, so kann ϱ nur eine Funktion von δ sein; setzt man $d\varrho : d\delta = \varrho'$, so hat man daher

$$5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial\delta} = \varrho'\cos\lambda\,, & \dfrac{\partial y_1}{\partial\delta} = \varrho'\sin\lambda\,, \quad \dfrac{\partial z_1}{d\delta} = 0\quad, \\[2ex] \dfrac{\partial x_1}{\partial\lambda} = -\varrho\sin\lambda\,, & \dfrac{\partial y_1}{\partial\lambda} = \varrho\cos\lambda\,, \quad \dfrac{\partial z_1}{\partial\lambda} = 0\quad, \end{cases}$$

woraus folgt

$$6)\qquad e_1 = \varrho'^2\,,\quad f_1 = 0\,,\quad g_1 = \varrho^2\quad.$$

Da f und f_1 identisch verschwinden, so sind die Parameterkurven Hauptkurven. Auf der Kugel sind es die Parallelkreise und die Ordinatenkreise, auf der Karte deren Bilder, nämlich die Strahlen des Punktes A und die Kreise um A; da sich die Parallelkreise der Kugel und die Ordinatenkreise, sowie die Strahlen von A und die Kreise um A, rechtwinklig schneiden, so hätte man schon daraus, ohne Berechnung von f und f_1, schließen können, daß die Parameterkurven Hauptkurven sind.

Aus den Hauptgrößen ergibt sich das Flächenverhältnis

$$7)\qquad S = \frac{\varrho\varrho'}{\sin\delta}\quad;$$

die Gleichungen der Linien für verhältnistreue Flächenelemente

$$8)\qquad \varrho\varrho' = n\sin\delta\quad;$$

das Verhältnis entsprechender Längenelemente

$$9)\qquad \frac{ds_1}{ds} = \sqrt{\frac{\varrho'^2 + \varrho^2 k^2}{1 + \sin^2\delta\cdot k^2}}\quad;$$

die Differentialgleichung für Längentreue

$$10)\qquad 1 - \varrho'^2 - (\varrho^2 - \sin^2\delta)\,k^2 = 0\quad;$$

die Differentialgleichung für maßstabstreue Linien

$$n^2 - \varrho'^2 - (\varrho^2 - n^2\sin^2\delta)\,k^2 = 0\quad;$$

die Gleichung für winkeltreue Linien

$$11)\qquad \varrho^2 - \varrho'^2\sin^2\delta = 0\quad;$$

die Halbachsen des Maßzugs

$$12)\qquad a = \varrho',\quad b = \frac{\varrho}{\sin\delta}\quad;$$

die halbe größte Winkelverzerrung

$$13)\qquad \sin w = \frac{\varrho'\sin\delta - \varrho}{\varrho'\sin\delta + \varrho}\,,\quad \cos w = \frac{2\sqrt{\varrho\varrho'\sin\delta}}{\varrho'\sin\delta + \varrho}\,,\quad \operatorname{tang} w = \frac{\varrho'\sin\delta - \varrho}{2\sqrt{\varrho\varrho'\sin\delta}}\quad.$$

2. Flächentreuer echter ebener Entwurf. Soll die Gleichung für Flächentreue

$$1)\qquad \varrho\,\varrho' = \sin\delta$$

für alle Punkte erfüllt sein, so muß die noch unbestimmte Funktion ϱ so gewählt werden, daß sie der Differentialgleichung 1) entspricht; durch Integration ergibt sich

$$\varrho^2 = 2\int \sin\delta\, d\delta = -2\cos\delta + C \quad ,$$

wo C die Integrationskonstante bezeichnet. Man kann statt dessen nehmen

$$\varrho^2 = 2(1-\cos\delta) - c = 4\sin^2\frac{\delta}{2} - c \quad ,$$

hat also die Gleichung des flächentreuen Entwurfs

$$2)\qquad \varrho = \sqrt{4\sin^2\frac{\delta}{2} - c} \quad .$$

3. Zumeist wird man wünschen, daß der Pol des Grundkreises den Punkt A zum Bilde habe; dies tritt ein, wenn für $\delta = 0$ aus 2) sich $\varrho = 0$ ergibt, und dazu ist nötig, daß für die Konstante c der Wert Null genommen wird. Die Entwurfsgleichung vereinfacht sich unter dieser Voraussetzung zu

$$3)\qquad \varrho = 2\sin\frac{\delta}{2} \quad .$$

Aus Nr. 1, 13) ergibt sich

$$\operatorname{tang} w = \frac{\varrho\,\varrho'\sin\delta - \varrho^2}{2\,\varrho\sqrt{\varrho\,\varrho'\sin\delta}} = \frac{\sin^2\delta - 4\sin^2\frac{\delta}{2}}{4\sin\frac{\delta}{2}\cdot\sin\delta} \quad .$$

Ersetzt man hier $\sin\delta = 2\sin\frac{1}{2}\delta\cos\frac{1}{2}\delta$, so erhält man

$$\operatorname{tang} w = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\delta}{2}\cdot\sin\frac{\delta}{2} \quad .$$

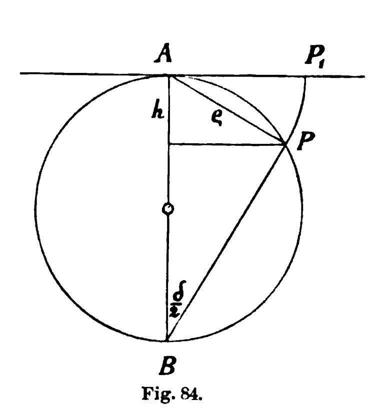


Fig. 84.

Die Winkelverzerrung wächst also mit δ und erreicht am Rande der Karte, bei dem größten Betrage von δ, ihren größten Wert.

Ist A die Gebietsmitte (Fig. 84), B der Gegenpunkt, so folgt aus dem rechtwinkligen Dreiecke ABP, das bei B den Winkel $\frac{1}{2}\delta$ hat,

$$AP = AB\cdot\sin\frac{\delta}{2} \quad ;$$

da wir den Kugelhalbmesser als Einheit verwenden, so ist $AB = 2$, und daher

$$AP = \varrho \quad .$$

Die von dem Breitenkreise des Punktes P begrenzte Kappe hat den Inhalt

$$K = \pi\cdot AB\cdot h = 2\pi h \quad .$$

Da nun

$$h = \varrho^2 : AB = \tfrac{1}{2}\varrho^2 \quad ,$$

so folgt

$$K = \pi\varrho^2 = K_1 \quad ,$$

wenn K_1 das Bild von K ist. Ist K' eine andre Kappe, K_1' ihr Bild, so ist auch $K' = K_1'$, und daher

$$K' - K = K_1' - K_1 \quad ,$$

jede Zone um A gleicht also ihrem Bilde. Aus der Zone $Z = K' - K$ wird durch zwei Meridiane, deren Längenunterschied λ ist, ein Viereck ausgeschnitten, dessen Inhalt

$$V = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot Z \quad .$$

Das Bild V_1 ist

$$V_1 = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot Z_1 \quad ,$$

wenn mit Z_1 das Bild von Z bezeichnet wird; da nun $Z = Z_1$, so folgt $V = V_1$. Wendet man diese Gleichung auf ein verschwindend kleines Viereck v und sein Bild v_1 an und bedenkt, daß jede Figur auf der Kugel aus solchen Vierecken v zusammengesetzt werden kann, so hat man damit die Flächentreue dieses Entwurfs auf elementarem Wege erkannt.

4. Die Anwendung von ebenen Entwürfen' empfiehlt sich besonders für Gebiete, die eine Kugelkappe nahezu ausfüllen, also durch einen Nebenkreis der Kugel begrenzt werden; man wird den sphärischen Mittelpunkt dieses Nebenkreises zum Pole des Koordinatengrundkreises nehmen; der Randparallel der Karte würde dann überall die gleiche größte vorkommende Winkelverzerrung aufweisen. So kann man z. B. Europa durch einen Nebenkreis begrenzen, dessen Halbmesser 26^0 ist*), und hat alsdann für den Kartenrand

$$\operatorname{tang} w = \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} 13 \sin 13 \,, \qquad w = 1^0\, 29'\, 15'' \,, \qquad 2w = 2^0\, 59' \quad .$$

5. Bei der Abbildung vollständiger Zonen um den Nordpol oder Südpol der Erde herum kommt die Darstellung der unmittelbaren Umgebung der Pole nicht in Betracht; daher kann man von einer Entwurfsart Gebrauch machen, bei der c einen geeigneten, von Null verschiedenen Wert hat, und zwar wird man c so wählen, daß die Verteilung der Winkelverzerrungen möglichst günstig wird. Da man nur über die eine Größe c verfügen kann, so läßt sich auch nur eine Bedingung erfüllen. Verlangt man an den Randparallelen $\delta = \alpha$ und $\delta = \beta$ entgegengesetzt gleiche Winkelmeistverzerrungen, so ergibt dies, wenn die Halbachsen des Maßzugs an den Rändern mit $a'\,b'$ und $a''\,b''$ bezeichnet werden, die Gleichung

$$\frac{a'' - b''}{a'' + b''} = \frac{b' - a'}{a' + b'} \quad ,$$

woraus folgt

$$a'\,a'' = b'\,b'' \quad .$$

Setzt man hier

$$a' = \varrho'_\alpha \,, \qquad b' = \frac{\varrho_\alpha}{\sin\alpha} \,, \qquad a'' = \varrho'_\beta \,, \qquad b'' = \frac{\varrho_\beta}{\sin\beta} \quad ,$$

so erhält man

$$\varrho'_\alpha\, \varrho'_\beta = \frac{\varrho_\alpha\, \varrho_\beta}{\sin\alpha \sin\beta} \quad ,$$

oder

$$\varrho_\alpha \varrho'_\alpha \cdot \varrho_\beta \varrho'_\beta \cdot \sin\alpha \sin\beta = \varrho_\alpha^2\, \varrho_\beta^2 \quad ,$$

woraus folgt

$$\sin^2\alpha \sin^2\beta = (4 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha - c)(4 \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta - c)$$

$$c^2 - 4(\sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha + \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta)\, c = \sin^2\alpha \sin^2\beta - 16 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \quad ,$$

$$1) \quad \begin{cases} c = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha + \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta) \\ \pm \sqrt{4(\sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha + \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta)^2 - 16 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta (1 - \cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha \cos^2 \tfrac{1}{2}\beta)} \end{cases} \quad .$$

Für ϱ^2 hat man

$$\varrho^2 = 4\left(\sin^2 \tfrac{1}{2}\delta - \frac{\sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha + \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta}{2} \mp \tfrac{1}{4}\sqrt{\cdots}\right) \quad .$$

---

*) Hammer, Über die geographisch wichtigsten Kartenprojektionen, S. 49.

Da ϱ^2 für beide Grenzen α und β einen positiven Wert haben muß, die ersten beiden Glieder aber für den kleinern der Werte α und β etwas Negatives ergeben, so kann in 1) vor der Wurzel nur das untere Zeichen gelten; die Wurzel ist also in 1) negativ zu nehmen.

Die Gleichung für Winkeltreue ist nach Nr. 1, 14)

$$\varrho = \varrho' \sin\delta \quad ,$$

wofür man wieder schreibt

$$\varrho^2 = \varrho\,\varrho' \sin\delta \quad ,$$

und hieraus wird mittels Nr. 2, 1) und Nr. 2, 2)

$$4\sin^2\frac{\delta}{2} - c = \sin^2\delta = 4\sin^2\frac{\delta}{2}\cos^2\frac{\delta}{2} \quad ,$$

also folgt

$$4) \qquad \sin^4\frac{\delta}{2} = \frac{c}{4} \quad .$$

6. Den flächentreuen ebenen Entwurf gab J. H. LAMBERT in seiner die mathematische Kartenentwurfslehre wesentlich fördernden Abhandlung: Anmerkungen und Zusätze zu Entwerfung von Land- und Himmelscharten (1772), enthalten in dem Werke: Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung, 1765—1772, S. 105 u. ff. OSTWALDS Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 54, § 103 u. ff.

In querständiger Anlage ist er 1789 von LORGNA, Principij di geografia astronomico geometrica, Verona, mitgeteilt worden, und wird daher z. T. als LORGNAS Entwurf bezeichnet.

Tafeln für die Halbmesser und für die Halbachsen des Maßzugs siehe TISSOT-HAMMER, Die Netzentwürfe geographischer Karten, Stuttgart 1887, Tafel XLV, S. (37), sowie HAMMER, Über die geographisch wichtigsten Kartenprojektionen, S. 73.

Das Netz für die geradständige Abbildung der nördlichen Halbkugel siehe GRETSCHEL, Lehrbuch der Kartenprojektion, Tafel VI, Figur XXXII. Geradständige Abbildung eines Teils der nördlichen Halbkugel und querständige einer Halbkugel siehe BREUSING, Das Verebnen der Kugeloberfläche für Gradnetzentwürfe, Tafel 2, Figur 5 und 2; den zwischenständigen Entwurf einer Halbkugel daselbst Tafel 3, Figur 2.

Die Skizze zu einem querständigen Entwurfe für Afrika, an Stelle des für Afrika üblichen sogenannten SANSONschen unechten Säulenentwurfs, gab DR. BLUDAU: Die flächentreue Azimutalprojektion LAMBERTS für die Karte von Afrika, PETERMANNS Mitteilungen aus JUSTUS PERTHES geographischer Anstalt, 38. Bd., 1892, S. 214. Geringere Winkelverzerrungen auf dem afrikanischen Festlande (weniger als 7°, während sie bei dem BLUDAUschen Entwurfe gegen $8^1/_2$° erreichen) erhielt HAMMER, indem er einen zwischenständigen Entwurf anwandte, bei dem er die Gebietsmitte auf 10° nördl. Br. und 20° östl. L. v. Gr. verlegte. Kommt es nur auf Afrika selbst an, so würde man mit einer Kartenmitte in 5—6° nördl. Br. noch etwas geringere Verzerrungen erhalten.

Wir geben sowohl BLUDAUS, als HAMMERS Skizze (vgl. PETERMANNS Mitteilungen 1894, S. 113) auf Tafel 3, A und B.

Wir weisen auf die Anwendungen hin, die von den hier besprochenen Entwurfsarten in folgenden Kartenwerken sich vorfinden: ANDREE, Handatlas, 4. Aufl. (Leipzig, VELHAGEN & KLASING); DEBES, Neuer Handatlas, 2. Aufl. (Leipzig, WAGNER & DEBES); SCHRADER, PRUDENT und ANTHOINE, Atlas de Géographie moderne (Paris, HACHETTE ET CIE); SPAMERS Großer Handatlas (Leipzig, OTTO SPAMER), wobei zu bemerken ist, daß die Karten des zuletzt genannten Werkes zum Teile deutsche Ausgaben von Karten des Atlas de Géographie moderne sind.

LAMBERTS flächentreuer echter ebener Entwurf findet sich bei ANDREE, Planigloben, S. 3, 4; Südpolarländer S. 5a/6a; Großbritannien und Irland S. 83/84; Vereinigte Staaten S. 162—169; Mittelamerika und Westindien S. 172/173; Südamerika S. 176—179; Australien S. 180/181.

Tafel 1, A zeigt den geradständigen Entwurf für die Südpolarländer (nach ANDREE Nr. 5a/6a), Tafel 1, B einen querständigen (nach ANDREE Nr. 3/4), Tafel 2 einen zwischenständigen für Südamerika (nach ANDREE Nr. 178/179).

Der ringförmige flächentreue ebene Entwurf findet sich bei TISSOT-HAMMER, Die Netzentwürfe geographischer Karten, S. 130.

7. Winkeltreuer echter ebener Entwurf.

Soll der Entwurf überall winkeltreu sein, so muß die Funktion ϱ der Differentialgleichung genügen (Nr. 2, 11))

$$\varrho' \sin\delta = \varrho \quad ,$$

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{d\delta}{\sin\delta} = 2 \cdot \frac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\delta} \cdot \frac{d\frac{1}{2}\delta}{\cos^2\frac{1}{2}\delta} \quad .$$

Die Integration liefert ohne weiteres

$$l\varrho = lc \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\delta \quad ,$$

wobei c die Integrationskonstante ist; hieraus folgt einfacher

$$1) \qquad \varrho = c \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\delta \quad .$$

Eine Änderung des c kann den Entwurf nicht wesentlich beeinflussen, sondern bewirkt nur eine Änderung des Maßstabes; wir wählen c so, daß in der Kartenmitte, d. i. für $\delta = 0$, keine Vergrößerung eintritt. Da

$$\frac{d\varrho}{d\delta} = \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\delta} \quad ,$$

so ist dies für $\delta = 0$ gleich der Einheit, wenn

$$c = 2 \quad .$$

Daher behalten wir als Gleichung des winkeltreuen ebenen Entwurfs

$$2) \qquad \varrho = 2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\delta \quad .$$

Dieser Entwurf wird gewöhnlich als stereographischer Entwurf bezeichnet.

Für die Flächenverzerrung hat man (Nr. 2, 7))

$$S = \frac{\varrho\varrho'}{\sin\delta} \quad ,$$

also in unserem Falle

$$3) \qquad S = \frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}\delta}{\cos^2\frac{1}{2}\delta \sin\delta} = \frac{1}{\cos^4\frac{1}{2}\delta} \quad .$$

Die Abbildung ist daher im Punkte $\delta = 0$ flächentreu; mit wachsendem δ vergrößert sich S ziemlich rasch, nimmt für $\delta = 90^0$ den Wert 4 an und wird für $\delta = 180^0$ unendlich groß.

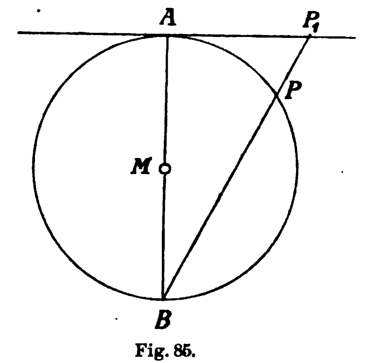


Fig. 85.

8. Aus der Gleichung des stereographischen Entwurfs folgt eine sehr einfache Konstruktion. Legt man an die verjüngte Erdkugel in A (Fig. 85) eine Berührungsebene, ist B der Gegenpunkt von A, P der abzubildende Punkt, P_1 die Spur von BP auf der Berührungsebene, so ist

$$AMP = \delta\,, \qquad ABP = \tfrac{1}{2}\delta\,, \qquad \text{und} \qquad AP_1 = AB \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\delta \quad ,$$

d. i., da MA als Einheit gilt,

$$AP_1 = 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\delta \quad .$$

Der stereographische Entwurf ist daher die perspektive Abbildung der verjüngten Erde auf eine Berührungsebene vom Gegenpunkte des Berührungspunktes aus. Hiermit hängt eine fernere wertvolle Eigenschaft dieses Entwurfs zusammen.

Ist S (Fig. 86) die Spitze eines der Kugel umschriebenen Umdrehungskegels, und legt man irgend eine Ebene durch B und S, so schneidet diese den Kegel in zwei Mantellinien SC und SD, die Ebene, die die Kugel in B berührt, in einer Tangente BE der Kugel und die Entwurfsebene in einer zu BE parallelen Geraden $C'D'$. Ist S' das Bild der Kegelspitze S und $D''C''$ parallel $D'C'$ durch S gezogen, so ist, wie man sofort sieht, $SC'' = SC$, weil $EB = EC$ ist; ebenso folgt aus $FB = FD$, daß $SD'' = SD$ ist. Da nun $SC = SD$, so folgt $SC'' = SD''$; folglich ist auch $S'C' = S'D'$. Mithin ist S' der Mittelpunkt des stereographischen Bildes des Kleinkreises der Kugel, entlang dessen sie von dem von S aus umschriebenen Kegel berührt wird. Da nun ferner

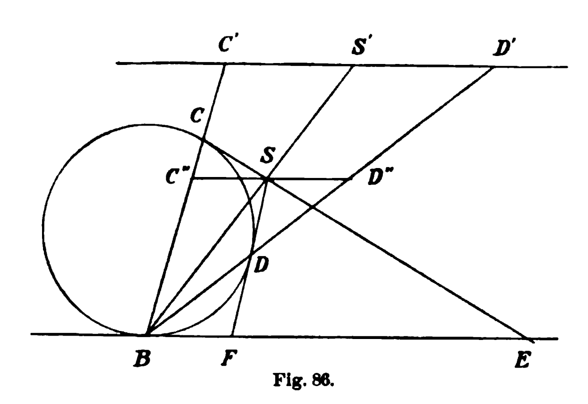


Fig. 86.

$$S'C' = S'D' = \frac{SC'' \cdot BS'}{BS} = \frac{SC \cdot BS'}{BS} \quad ,$$

die drei Strecken SC, BS' und BS sich aber nicht ändern, wenn sich die Ebene BSC um BS dreht, so folgt, daß alle Halbmesser der Bildellipse gleich sind, diese also ein Kreis ist. Dies zeigt, daß die stereographischen Bilder aller Nebenkreise der Kugel wieder Kreise sind. Um denselben Satz auch für Hauptkreise zu beweisen, legen wir durch B irgend einen zur Ebene eines Hauptkreises k senkrechte Ebene; diese schneidet die Kugel im allgemeinen in einem Nebenkreise k', und den der Kugel entlang k umschriebenen Umdrehungscylinder in zwei Mantellinien, die k' in Gegenpunkten berühren. Die Ebene schneidet, wie oben, die Berührungsebene, die die Kugel in B berührt, in einer Tangente BE von k', und die Entwurfsebene in einer gleichgerichteten Geraden $C'D'$. Wir ziehen durch B eine Gerade BS' in der Richtung der Mantellinien EC und FD, und beachten die Bilder C' und D', sowie S'. Aus $EB = EC$ folgt $S'C' = S'B$; und aus $FB = FD$ folgt $S'D' = S'B$; hieraus erkennt man, daß das stereographische Bild von k ein Kreis mit dem Mittelpunkte S' ist.

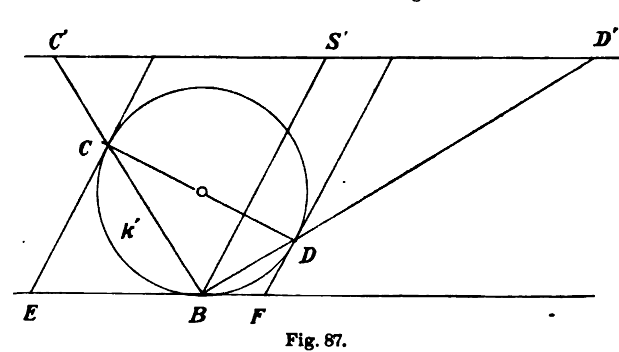


Fig. 87.

Jeder Kreis der Kugel wird also stereographisch wieder als Kreis abgebildet.

9. Von der Kreistreue kann man Gebrauch machen, um das zwischenständige stereographische Bild irgend eines Punktes P der Erde aus seiner geographischen Länge und Breite zu finden. Wird die Länge λ von der Meridianebene aus gezählt, auf der B und A liegen (Fig. 88) und ist N der Nordpol, N_1 der Südpol, so enthalten die Bilder aller Meridiane die Punkte N' und N_1'. Aus der Winkeltreue der Abbildung folgt, daß das Bild des Meridians λ und $N'N_1'$, das Bild von AN, in N' und N_1' sich unter dem Winkel λ schneiden. Man trägt also in der Entwurfsebene in N' den Winkel $N_1'N'L = \lambda$ an, und zeichnet den Kreis, der N' und N_1' enthält und $N'L$ in N' berührt. Dies ist das Bild des Meridians von P. Um nun den Parallelkreis von P abzubilden, macht man NQ gleich dem Polabstande von P und zieht in Q die Tangente QS des Nullmeridians ANB; sind Q' und S' die Bilder von Q und S, so ist S' die Mitte und Q' ein Punkt des verlangten Parallelkreisbildes. Klappt man die Entwurfsebene in die Figurenebene um, so ist daher P' das verlangte stereographische Bild.

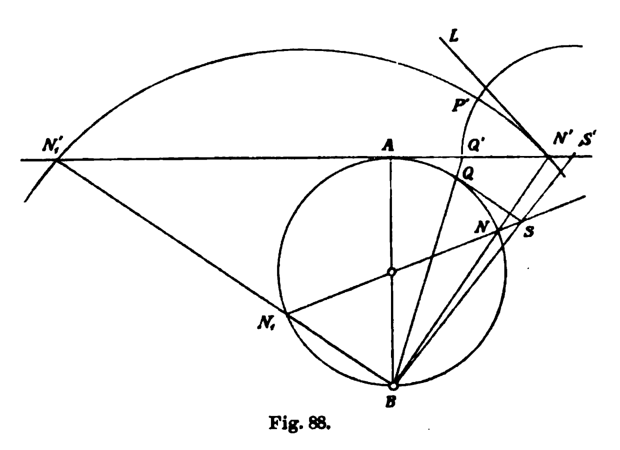


Fig. 88.

Man kann leicht geometrisch nachweisen, daß das stereographische Abbild seinem Urbilde in den kleinsten Teilen ähnlich ist. Haben E und F (Fig. 89) die Bilder E_1 und F_1, so sind die Dreiecke BEF und BF_1E_1 einander ähnlich. Denn ist F' der Gegenpunkt von F im Nebenkreise ABF, so ist $BE\hat{F} = B\hat{F'}F = B\hat{F_1}E_1$, weil F_1E_1 die Richtung der Tangente in B hat. Folglich ist

$$\frac{BF_1}{BE} = \frac{E_1F_1}{EF} \quad . \; .$$

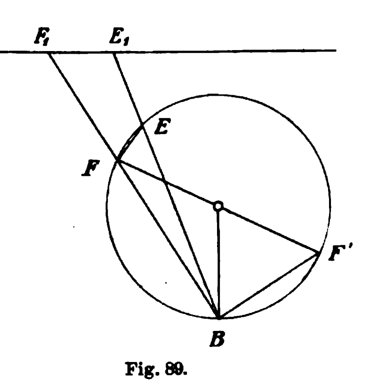


Fig. 89.

Ist nun FE verschwindend klein, so kann man in der letzten Gleichung BF_1 und BE durch BG_1 und BG ersetzen, wenn G dem kleinen Bogen EF unendlich nahe liegt, und kann ferner die Sehne EF mit dem Bogen verwechseln. Ist ferner H irgend ein dem Bogen EF unendlich naher Punkt, also EFH ein verschwindend kleines Kugeldreieck, so hat man

$$\frac{BG_1}{BG} = \frac{E_1F_1}{EF} = \frac{F_1H_1}{FH} = \frac{H_1E_1}{HE} \; ,$$

folglich sind die verschwindenden Dreiecke EFH und $E_1F_1H_1$ einander ähnlich. Dies ist aber nur ein andrer Ausdruck für die Winkeltreue.

10. Der stereographische Entwurf wurde schon in früher Zeit dem großen Astronomen Hipparch (gegen 190—125 v. Chr.) zugeschrieben; Ptolemäus (gegen 130 n. Chr.) hat ihn angewandt, ohne die Eigenschaft der Kreistreue vollständig zu erkennen; diese wurde erst im 13. Jahrhundert von Nemorarius gefunden. Von François d'Aguillon (Aguilonius, 1613) rührt der seitdem gebräuchliche Name her. Die Winkeltreue des Entwurfs hat zuerst Hooke um 1650 nach-

gewiesen. Tafeln für Längen und Flächen für den gerad- und querständigen Entwurf bei TISSOT-HAMMER, Netzentwürfe, Tafeln III, IV, S. (2), sowie Tafel XLV, Nr. 3, S. (38). Den geradständigen Entwurf eines Teiles der nördlichen Halbkugel und den querständigen einer Halbkugel siehe BREUSING, Das Verebnen, Tafel 2, Figur 6 und 3, eine zwischenständig entworfene Halbkugel daselbst Tafel 3, Figur 3. Bei GRETSCHEL, Lehrbuch, Tafel I, Figur IV und V die Gradnetze für den geradständigen stereographischen Entwurf einer Achtelkugel, sowie für den querständigen (Dreiachtelkugel); Tafel II, Figur VI das Gradnetz des stereographischen Bildes einer Viertelkugel auf einer Ebene, die die Kugel in 50° nördl. Br. berührt. Ausgeführte Entwürfe siehe bei DEBES, Nr. 47, die Kapländer, 1 : 10000000, zwischenständig, Kartenmitte in 25° südl. Br. und 25° östl. L. v. Gr.; Nr. 50, Aequatoriales Afrika, 1 : 10000000, zwischenständig, Kartenmitte 10° südl. Br. und 30° westl. L. v. Gr. Auf Tafel 4 findet sich ein zwischenständiger Entwurf für die Kapländer (nach DEBES Nr. 47).

11. Speichentreuer Entwurf. Dem unbefangenen Geographen, der eine Aufzeichnung der Erdoberfläche geben will, soweit und wie sie sich von seinem Standpunkte A aus übersehen läßt, liegt es gewiß am nächsten, die von A aus beobachteten Azimute getreu auf die Karte zu übertragen, alsdann die Abstände der Punkte der Umgebung von A zu messen, und diese Maße in einem geeignet verjüngten Maßstabe auf der Karte darstellen. Der Vergleich der Hauptkreise von A und ihrer Bilder mit den Speichen eines Rades, und der Umstand, daß die auf der Erde auf den Speichen abgemessenen Längen in bestimmtem Verhältnisse abgebildet werden, rechtfertigt den von A. BREUSING recht glücklich gewählten Namen. Die Gleichung dieses Entwurfs ist höchst einfach, nämlich

$$\varrho = \delta \quad .$$

Hier ist

$$\varrho' = 1\,, \qquad S = \frac{\varrho\,\varrho'}{\sin\delta} = \frac{\delta}{\sin\delta}\,, \qquad \sin w = \frac{\delta - \sin\delta}{\delta + \sin\delta} \quad .$$

Flächentreue und Winkeltreue treten hier zusammen ein, nämlich unter der Bedingung

$$\delta = \sin\delta \quad ,$$

die nur für einen Punkt, nämlich für $\delta = 0$ erfüllt ist. Da $e_1 = 1$, $f_1 = 0$, $g_1 = \delta^2$, so wird die Bedingung für Längentreue (§ 1, Nr. 7)

$$k^2 = \frac{e - e_1}{g_1 - g} = 0 \quad ,$$

in Übereinstimmung damit, daß die Bilder der Meridiane längentreu sind.

12. Der speichentreue Entwurf wurde in geradständiger Anordnung zuerst von GERHARD MERCATOR (KREMER, 1512—94) angewandt; querständig und zwischenständig hat ihn etwas später GUILLAUME POSTEL ausgeführt. Vgl. auch LAMBERT, a. a. O., § 94 und 99. Verzerrungen in Flächen und Winkeln bei TISSOT-HAMMER, Netzentwürfe, S. (33), Tafel XLIII, 2. Täfelchen. Bei BREUSING, Verebnen, Tafe l2, Figur 1 querständiges speichentreues Bild einer Halbkugel, Figur 4 geradständiges speichentreues Bild eines kleinern Teiles der Erde, Tafel 3, Figur 1 eine Halbkugel in zwischenständiger Ausführung. DEBES: Nr. 1, zwei querständige Halbkugeln 1 : 82000000, geradständige Karte der Nordpolländer 1 : 41000000, zwei querständige Halbkugeln in kleinerem Maßstabe; Nr. 45, Afrika, querständig, Kartenmitte 15° östl. L. v. Gr., 1 : 23000000, Nr. 38, Asien, zwischenständig, Kartenmitte 40° nördl. Br. und 90° östl. L. v. Gr., 1 : 28500000.

Die Tafel 5 gibt den Entwurf für die Nordpolländer in geradständiger Anordnung (nach DEBES Nr. 1), die Tafel 6 für eine Halbkugel querständig (nach DEBES Nr. 1), die Tafel 7 querständig für Afrika (nach DEBES Nr. 45), die Tafel 8 zwischenständig für Asien (nach DEBES Nr. 38).

13. Breusings **vermittelnder Entwurf.** Um eine passende Mittelstellung zwischen Flächen- und Winkeltreue zu erhalten, setzte Breusing

$$1)\qquad \varrho = 2\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}\delta \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\delta}\quad .$$

Hieraus folgt

$$\varrho\varrho' = \sin\tfrac{1}{2}\delta\,(1 + \sec^2\tfrac{1}{2}\delta)\quad ,$$

also

$$2)\qquad S = \frac{\varrho\varrho'}{\sin\delta} = \frac{1}{2}\sec\tfrac{1}{2}\delta\,(1 + \sec^2\tfrac{1}{2}\delta)\quad ;$$

ferner erhält man leicht

$$\sin w = \frac{\sin^2\frac{1}{2}\delta}{4 - \sin^2\frac{1}{2}\delta}\quad .$$

Dieser Entwurf ist von E. Debes angewendet worden: Nr. 54, Nordamerika, 1:20000000, Gebietsmitte in 45° nördl. Br. und 100° westl. L. v. Gr.: Nr. 58, Südamerika, 1:16000000, Gebietsmitte 20° südl. Br. und 59° westl. L. v. Gr.

Die Tafel 9 zeigt den Entwurf für Nordamerika, zwischenständig (nach Debes Nr. 54).

14. Schols' **hauptkreistreuer Entwurf.** Aus der Eigenschaft des stereographischen Entwurfs, jeden Kreis wieder als Kreis abzubilden, kann man schließen, daß es möglich sein wird, einen Entwurf anzugeben, bei dem die Hauptkreise sich als Kreise abbilden, während die Nebenkreise im allgemeinen nicht Kreise zu Bildern haben; der stereographische Entwurf wird dann als besonderer Fall unter diesem allgemeinern Entwurfe enthalten sein. Da es sich um einen echten ebenen Entwurf handelt, so ist es gleichgültig, von welchem Meridiane aus die Längen λ gezählt werden; wir nehmen als Nullmeridian den, der auf einer beliebig gewählten Hauptkreisebene K (Fig. 90) senkrecht steht. Ist α der auf diesem Meridiane bis zu K gemessene Polabstand, sind ferner δ und λ die Koordinaten irgend eines Punktes von K, so ist

$$1)\qquad \cos\lambda = \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\delta}\quad .$$

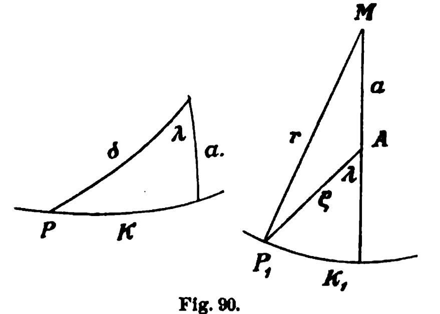


Fig. 90.

Das Bild des Hauptkreises, auf dem α liegt, ist eine Gerade durch A, die wegen der Symmetrie die Mitte M des Bildes K_1 von K enthalten muß; ist nun r der Halbmesser von K_1 und $MA = a$, so hat man

$$r^2 = a^2 + \varrho^2 + 2a\varrho\cos\lambda\quad ,$$

$$\varrho = -a\cos\lambda + \sqrt{r^2 - a^2 + a^2\cos^2\lambda}\quad .$$

Setzt man hier für $\cos\lambda$ den Wert 1), so entsteht

$$2)\qquad \varrho = -a\operatorname{tang}\alpha\cot\delta + \sqrt{r^2 - a^2 + a^2\operatorname{tang}^2\alpha\cot^2\delta}\quad .$$

Diese Gleichung muß unabhängig von a, α und r sein, und dies wird nur erreicht, wenn

$$3)\qquad a\operatorname{tang}\alpha = k\,,\qquad r^2 - a^2 = k_1^2\quad ,$$

wo k und k_1 beständige Zahlen sind. Hierdurch erhält man die Entwurfsgleichung

$$\varrho = -k\cot\delta + \sqrt{k_1^2 + k^2\cot^2\delta}\quad .$$

Setzt man $k_1 : k = m$, so kann man hierfür schreiben

$$4\text{a})\qquad \varrho = k\left(\sqrt{m^2 + \cot^2\delta} - \cot\delta\right)\quad ,$$

oder auch

$$\text{4b)}\qquad \varrho = \frac{k\,m^2 \operatorname{tang}\delta}{\sqrt{m^2 \operatorname{tang}^2\delta + 1} + 1} \quad .$$

Für ein verschwindend kleines δ folgt hieraus

$$\varrho = \tfrac{1}{2} k\,m^2 \cdot \delta \quad .$$

Soll die Kartenmitte sich längentreu abbilden, so muß $km^2 = 2$ sein, und man hat

$$\text{5)}\qquad \varrho = \frac{2 \operatorname{tang}\delta}{\sqrt{m^2 \operatorname{tang}^2\delta + 1} + 1} \quad .$$

Aus 4a) erhält man

$$\text{6)}\qquad \varrho' = \frac{\varrho}{\sin^2\delta \sqrt{m^2 + \cot^2\delta}} \quad .$$

Soll im Polabstande δ der Entwurf winkeltreu sein, so folgt daher

$$\frac{\varrho}{\sin\delta\sqrt{m^2 + \cot^2\delta}} = \varrho \quad ,$$

woraus sich ergibt

$$(1 - m^2)\sin^2\delta = 0 \quad .$$

Dieser Gleichung genügt jede der Annahmen

$$\delta = 0\,, \qquad m = 1 \quad .$$

Die erste bestätigt, daß die Abbildung in der Kartenmitte kongruent ist, die zweite führt auf den stereographischen Entwurf und zeigt, daß ein SCHOLSscher Entwurf, wenn er nicht stereographisch ist, nur in der Mitte winkeltreu sein kann.

Der Entwurf ist im Polabstand δ flächentreu, für den

$$\frac{\varrho^2}{\sin^3\delta\sqrt{m^2 + \cot^2\delta}} = 1 \quad ,$$

woraus folgt

$$\text{7)}\qquad 4 = \left(\sqrt{m^2\sin^2\delta + \cos^2\delta} + \cos\delta\right)^2 \sqrt{m^2\sin^2\delta + \cos^2\delta} \quad .$$

Verlangt man Flächentreue im Polabstande a, so liefert diese Gleichung m, wenn man darin δ durch a ersetzt.

Das Flächenverhältnis

$$S = \frac{\varrho^2}{\sin^3\delta\sqrt{m^2 + \cot^2\delta}} = \frac{4}{(N + \cos\delta)^2 N} \quad ,$$

wobei

$$N = \sqrt{m^2\sin^2\delta + \cos^2\delta} \quad ,$$

erreicht seinen äußersten Wert, wenn

$$(3N^2 + 4\cos\delta \cdot N + \cos^2\delta)\frac{dN}{d\delta} - 2\sin\delta \cdot N^2 - 2\sin\delta\cos\delta \cdot N = 0 \quad ,$$

wobei

$$\frac{dN}{d\delta} = \frac{(m^2 - 1)\sin\delta\cos\delta}{N} \quad ;$$

hieraus folgt

$$(3N^2 + 4N\cos\delta + \cos^2\delta)(m^2 - 1)\sin\delta\cos\delta - 2N^2\sin\delta(N + \cos\delta) = 0 \quad .$$

Diese Gleichung liefert zunächst

$$\sin\delta = 0 \quad ;$$

die zugehörigen Werte $\delta = 0^0$ und $\delta = 180^0$ ergeben die Flächenverhältnisse

$$S_0 = 1\,, \qquad S_{180} = \infty \quad .$$

Für andre Wurzeln bleibt die Gleichung

$$(m^2 - 1)(3N^2 + 4N\cos\delta + \cos^2\delta)\cos\delta - 2N^2(N + \cos\delta) = 0 \quad ,$$

oder einfacher

$$(9m^2 - 3m^4 - 6)\cos^3\delta - (5m^2 - 3m^4)\cos\delta + [(6m^2 - 6)\cos^2\delta - 2m^2]N = 0 \ .$$

Durch Versuch kann man δ bis auf 1^0 genau finden und weitere Genauigkeit durch geradlinige Einschaltung erzielen.

Um die Flächenverzerrungen innerhalb möglichst enger Grenzen zu halten, wird man m so wählen, daß das größte Flächenverhältnis am Rande, und das im Innern stattfindende kleinste von der Einheit um gleich viel abweichen.

Das hierbei einzuschlagende Verfahren erläutern wir an einem Beispiele. Wir wählen ein Gebiet, das auf einer Kappe liegt, die 30^0 Halbmesser hat, und setzen zunächst versuchsweise fest, daß Flächentreue für $\delta = 20^0$ stattfinden soll. Die Gleichung

$$(N + \cos\delta)^2 N = 4 \ , \qquad \delta = 20^0$$

ergibt $N = 1,0305$, und daraus $m = 1,2366$. Mit Hilfe dieser Zahlen geht die Bedingungsgleichung für die größte Flächenabweichung über in

$$0,7476\cos^3\delta - 0,6308\cos\delta - (3,0584 - 3,1752\cos^2\delta)N = 0 \quad ;$$

für $\delta = 12^0$, 14^0, $14^0 3'$ erhält die linke Seite dieser Gleichung die Werte

$$0,0619 \ ; \quad 0,0021 \ ; \quad -0,0008 \ .$$

Die geradlinige Einschaltung ergibt daher, daß zwischen $\delta = 0$ und $\delta = 20$, den beiden flächentreuen Stellen, die größte Flächenverzerrung für

$$\delta = 14^0 2'$$

stattfindet (bis auf 1 Minute genau); das dort herrschende Flächenverhältnis ist

$$S = 0,9988 \ .$$

Am Rande, für $\delta = 30^0$, ergibt es sich zu

$$S = 1,0091 \ .$$

Hieraus erkennt man, daß der Polabstand für Flächentreue erheblich größer angenommen werden muß. Nimmt man 27^0 an, so folgt $m = 1,2462$; für die größte Flächenverzerrung zwischen 0^0 und 27^0 ergibt sich der Polabstand aus

$$(3,3330\cos^2\delta - 3,1110)N + 0,7410\cos^3\delta - 0,5190\cos\delta = 0$$

zu

$$\delta = 19^0 1' \ .$$

Das zugehörige Flächenverhältnis ist

$$S = 0,9970 \ .$$

Dagegen findet sich für den Kartenrand ($\delta = 30^0$)

$$S = 1,0041 \ .$$

Da beide von der Einheit nach beiden Seiten hin fast gleichmäßig abweichen, so kann man $m = 1,2462$ für die günstigste Zahl ansehen.

Es darf bei dieser Gelegenheit eine Bemerkung wiederholt werden, die Hammer gelegentlich macht, daß nämlich die allerdings umständliche Rechenarbeit, die die Bestimmung des in einer bestimmten Hinsicht günstigsten Entwurfs macht, nicht vor der größten Sorgfalt in der Auswahl der Entwurfsart zurückschrecken darf, da der Zeitaufwand für diese mathematische Vorarbeit nur unbedeutend im Vergleiche zu der Zeit ist, die das gewissenhafte Zusammentragen der geographischen, auf der Karte darzustellenden Einzelheiten und die Herstellung der Urkarte und der Druckplatte kosten. Dem Geographen wird es

anheimzustellen sein, welche Gesichtspunkte für die Wahl der Entwurfsart entscheiden sollen; die Ermittlung des günstigsten Entwurfs selbst muß aber dem Mathematiker überlassen werden.

Das Bild des größten Kreises, der zwei gegebene Punkte A und B enthält (Fig. 91), kann auch bei einem schiefachsigen SCHOLSschen Entwurfe leicht gefunden werden. Ist $OL = h$ senkrecht zu AB, so liegt die sphärische Mitte des Bildes A_1B_1 auf dem Bilde O_1L_1 von OL. Nun ist

$$\cos\lambda_1 = \frac{\tang h}{\tang a},$$

$$\cos\lambda_2 = \frac{\tang h}{\tang b},$$

daher folgt

$$\frac{\cos\lambda_1}{\cos\lambda_2} = \frac{\tang b}{\tang a}.$$

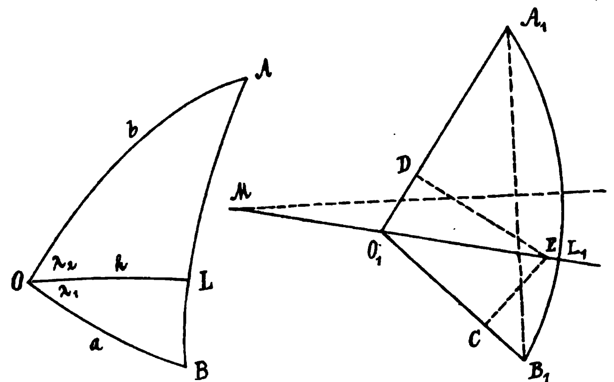


Fig. 91.

Mit Hilfe eines Halbmesserstabes kann man zu den Strecken O_1A_1 und O_1B_1 sofort die Abstände a und b der Punkte A und B von der Gebietsmitte O ablesen; ein Tangentenstab liefert $\tang a$ und $\tang b$ als Längen. Macht man $O_1C = \tang b$, $O_1D = \tang a$ und zieht $CE \perp O_1B_1$, $DE \perp O_1A_1$, so ist die Gerade O_1E das Bild des Hauptkreises OL, und die Mitte M des Bildes des Hauptkreises AB ist daher der Schnitt von OE mit dem Mittellote von A_1B_1. Dieser Weg kann nicht benutzt werden, wenn O_1A_1 von O_1B_1 nicht oder wenig abweicht. In diesem Falle kann man das Bild B_1' des Gegenpunktes von B benutzen, das ebenfalls auf dem gesuchten Kreise liegt, weil B und B' denselben Hauptkreisen angehören.

Betreffs des SCHOLSschen Entwurfs sei übrigens auf SCHOLS, La courboure de la ligne géodésique, Leiden 1886, sowie auf das Werk desselben Verfassers: Studien über Kartenprojektion, Leiden 1882, verwiesen.

15. Für die Darstellung eines Gebietes, das sich nur um einige Grade von der Gebietsmitte aus nach allen Seiten hin erstreckt, kann man davon ausgehen, ϱ nach steigenden Potenzen von δ zu entwickeln, von dieser Potenzreihe nur eine geeignete Anzahl von Gliedern zu verwenden, und deren Koeffizienten so zu wählen, daß der Entwurf gewissen Bedingungen bezüglich der Flächen- und Winkelveränderungen entspricht. Beschränken wir uns darauf, daß die Mitte des Gebietes sich als Mitte der Karte abbilden soll, so müssen die Werte $\delta = 0$ und $\varrho = 0$ zusammengehören, die Reihe ϱ darf also kein Absolutglied haben. Gehen wir auf einem Hauptkreise der Gebietsmitte von irgend einer Stelle P auf die Gebietsmitte zu und darüber hinaus, so nimmt δ zur Grenze Null ab und geht dann über Null hinaus, wird also negativ; dabei muß das Bild von P_1 aus nach der Kartenmitte und darüber hinaus gehen, d. h. ϱ muß mit δ das Vorzeichen wechseln, darf also nur ungerade Potenzen von δ enthalten. Für ein verschwindendes δ kommt nur die erste Potenz von δ in Betracht; wenn wir nun festsetzen, daß in der Kartenmitte Längentreue herrschen soll, so muß δ den Koeffizienten 1 haben. Somit haben wir es mit der Gleichung zu tun

$$1) \qquad \varrho = \delta + A\delta^3 + B\delta^5 + C\delta^7 + \ldots$$

Wir brechen diese Reihe bei δ^7 ab und beschränken den Spielraum von δ demgemäß. Aus 1) ergibt sich

$$2) \qquad \varrho' = 1 + 3A\delta^2 + 5B\delta^4 + 7C\delta^6 + \ldots$$

Aus 1) und 2) folgt

$$3)\qquad \varrho\,\varrho' = \delta + 4A\delta^3 + \ldots$$

$$4)\qquad \frac{\varrho'}{\varrho} = \delta^{-1} + 2A\delta + \ldots$$

Hieraus und aus

$$\sin\delta = \delta - \tfrac{1}{6}\delta^3 + \ldots$$

ergibt sich

$$5)\qquad S = \frac{\varrho\,\varrho'}{\sin\delta} = 1 + (4A + \tfrac{1}{6})\,\delta^2 + \ldots$$

$$6)\qquad \frac{\varrho'\sin\delta}{\varrho} = 1 + (2A - \tfrac{1}{6})\,\delta^2 + \ldots$$

Daher können das Flächenverhältnis S und das für die Winkelverzerrung entscheidende Verhältnis der Halbachsen des Maßzugs nicht zugleich bis auf Größen von der Ordnung δ^4 mit der Einheit in Übereinstimmung gebracht werden. Wir stellen nun die Forderung, daß bei beiden Größen die Abweichung von der Einheit dem absoluten Betrage nach gleich groß sein soll; dazu muß entweder

$$4A + \tfrac{1}{6} = 2A - \tfrac{1}{6}\,, \qquad A = -\tfrac{1}{6}\quad ,$$

oder

$$4A + \tfrac{1}{6} = -2A + \tfrac{1}{6}\,, \qquad A = 0$$

sein; dabei wird die Abweichung

$$4A + \tfrac{1}{6} = -\tfrac{1}{2} \quad \text{bezw.} \quad = \tfrac{1}{6}\quad .$$

Da der letzte Betrag kleiner ist, als der erste, so entscheiden wir uns für die Annahme

$$A = 0\quad ,$$

also für die Entwurfsgleichung

$$7)\qquad \varrho = \delta + B\delta^5 + C\delta^7\quad .$$

Hieraus folgt

$$8)\qquad S = \frac{\varrho\,\varrho'}{\sin\delta} = 1 + \tfrac{1}{6}\delta^2 + (6B + \tfrac{7}{360})\delta^4 + (B + 8C - \tfrac{31}{15120})\,\delta^6\quad ,$$

$$9)\qquad \frac{\varrho'\sin\delta}{\varrho} = 1 - \tfrac{1}{6}\delta^2 + (4B + \tfrac{1}{120})\,\delta^4 - (\tfrac{2}{3}B - 6C + \tfrac{1}{5040})\,\delta^6\quad .$$

Sollen das Flächenverhältnis und das Achsenverhältnis des Maßzugs nicht bloß in der Nähe der Kartenmitte, sondern auch für größere Werte von δ von der Einheit um entgegengesetzt gleiche Beträge abweichen, so müssen B und C so bestimmt werden, daß

$$6B + \tfrac{7}{360} = -4B - \tfrac{1}{120}\quad ,$$

$$B + 8C - \tfrac{31}{15120} = \tfrac{2}{3}B - 6C + \tfrac{1}{5040}\quad ,$$

woraus folgt

$$10)\qquad B = -\tfrac{1}{360}\,, \qquad C = \tfrac{1}{4410}\quad .$$

Die Gleichung des Entwurfs ist daher

$$11)\qquad \varrho = \delta - \tfrac{1}{360}\delta^5 + \tfrac{1}{4410}\delta^7\quad ,$$

und für die Verzerrungen hat man

$$12)\qquad S = 1 + \tfrac{1}{6}\delta^2 + \tfrac{1}{360}\delta^4 + \tfrac{319}{105840}\delta^6\quad ,$$

$$13)\qquad \frac{\varrho'\sin\delta}{\varrho} = 1 - \tfrac{1}{6}\delta^2 - \tfrac{1}{360}\delta^4 - \tfrac{319}{105840}\delta^6\quad .$$

Für kleine Werte von δ kann man die beiden letzten Glieder in 11) vernachlässigen, und kommt damit auf den speichentreuen Entwurf als den innerhalb der angedeuteten Grenzen am besten vermittelnden zurück.

16. Die Zeichnung eines genügend engmaschigen Gradnetzes für einen geradständigen echten ebenen Entwurf hat keine Schwierigkeit; man zeichnet die Meridianbilder und berechnet für genügend kleine Fortschritte der Veränderlichen δ die Werte von ϱ. Mit Hilfe dieser Halbmessertafel und eines hinreichend genauen Maßstabes trägt man zu jedem Polabstande das zugehörige ϱ in die Karte ein und beschreibt die Parallelkreisbilder.

Bei quer- und bei zwischenständigen Entwürfen kann man die mit der Änderung der Koordinaten verbundene mühsame Rechnung durch Zwischenschaltung eines zu derselben Gebietsmitte gezeichneten stereographischen Entwurfs entbehrlich machen. Man zeichnet in bekannter Weise das stereographische Bild des Gradnetzes für das darzustellende Gebiet. Um nun zu einem Knotenpunkte P des Netzes das Bild P_1 zu finden, verbindet man das stereographische Bild $\mathfrak{P}$ von P mit dem Bilde N_1 der Gebietsmitte; auf diesem Strahle $\mathfrak{P}N_1$ liegt P_1. Die Länge N_1P_1 ergibt sich am einfachsten dadurch, daß man für hinlänglich kleine Fortschritte von δ je einen Halbmesserstab für den stereographischen und für den verlangten Entwurf aufzeichnet. Aus dem erstern entnimmt man den zu einem gegebenen $N_1\mathfrak{P}$ gehörigen Polabstand NP, und kann nun auf dem Halbmesserstabe des verlangten Entwurfs die Strecke N_1P_1 abgreifen.

Auf diese Konstruktion, wenn auch nicht auf ihre allgemeine Anwendbarkeit, hat zuerst Lambert hingewiesen. Man vergleiche hierüber Hammer, Kartenprojektionen, S. 66—74.

§ 4. Säulenentwürfe.

1. Wird der Halbmesser der Säule mit n bezeichnet, ist der auf X_1OY_1 (Fig. 92) enthaltene Parallelkreis der Säule das Bild des Gleichers, und hat der Parallelkreis der Säule, der die Erdpunkte von der geographischen Breite φ abbildet, von X_1OY_1 den Abstand ζ, wobei ζ eine noch unbestimmte Funktion von φ ist, so sind die Koordinaten des Punktes P_1

$$1)\qquad x_1 = n\cos\lambda\,,\quad y_1 = n\sin\lambda\,,\quad z_1 = \zeta\quad.$$

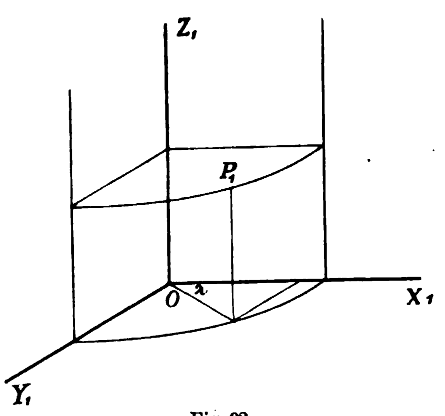


Fig. 92.

Hieraus ergeben sich

$$2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial\varphi} = 0\,, \qquad \dfrac{\partial y_1}{\partial\varphi} = 0\quad, \\ \dfrac{\partial z_1}{\partial\varphi} = \dfrac{d\zeta}{d\varphi} = \zeta'\quad, \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial\lambda} = -n\sin\lambda\,, \qquad \dfrac{\partial y_1}{\partial\lambda} = n\cos\lambda\,, \\ \dfrac{\partial z_1}{\partial\lambda} = 0\quad, \end{cases}$$

woraus folgt

$$e_1 = \zeta'^2\,,\quad f_1 = 0\,,\quad g_1 = n^2\quad.$$

Für die verjüngte Erde hat man (§ 3, Nr. 1)

$$4)\quad \begin{cases} x = \cos\varphi\cos\lambda\,, \qquad y = \cos\varphi\sin\lambda\,, \qquad z = \sin\varphi\quad, \\ \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} = -\sin\varphi\cos\lambda\,, \quad \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} = -\sin\varphi\sin\lambda\,, \quad \dfrac{\partial z}{\partial\varphi} = \cos\varphi\quad, \\ \dfrac{\partial x}{\partial\lambda} = -\cos\varphi\sin\lambda\,, \quad \dfrac{\partial y}{\partial\lambda} = \cos\varphi\cos\lambda\,, \quad \dfrac{\partial z}{\partial\lambda} = 0\quad, \\ e = 1\,,\quad f = 0\,,\quad g = \cos^2\varphi\quad. \end{cases}$$

Da $f = f_1 = 0$, so sind die Meridiane und Parallelkreise die Hauptkurven. Ferner hat man:

das Flächenverhältnis

$$5) \qquad S = \frac{n\zeta'}{\cos\varphi} \quad ;$$

die Halbachsen des Maßzugs

$$6) \qquad a = \zeta', \quad b = \frac{n}{\cos\varphi} \quad ;$$

die größte Winkelverzerrung

$$7) \qquad \sin w = \frac{\zeta'\cos\varphi - n}{\zeta'\cos\varphi + n} \quad .$$

2. Flächentreuer Säulenentwurf. Aus $S = 1$ folgt

$$\zeta' = \frac{1}{n}\cos\varphi \quad ,$$

$$\zeta = \frac{1}{n}\sin\varphi + C \quad .$$

Da wir schon $\varphi = 0$ und $\zeta = 0$ einander zugeordnet haben, so muß $C = 0$ gesetzt werden, und man behält als Entwurfsgleichung

$$1) \qquad \zeta = \frac{1}{n}\sin\varphi \quad .$$

Nimmt man $n = 1$, so hat man

$$2) \qquad \zeta = \sin\varphi \quad ,$$

woraus sich sofort ergibt, daß das Bild eines Parallelkreises der Erde erhalten wird, wenn man mit seiner Ebene den Säulenmantel durchschneidet. Für die Winkelverzerrung folgt in diesem Falle, wenn man vom Vorzeichen absieht,

$$\sin w = \frac{\sin^2\varphi}{1 + \cos^2\varphi} \quad .$$

Dieser Betrag wächst rasch mit φ und erreicht seinen größten Wert für $\varphi = 90^\circ$; hierfür wird $\sin w = 1$, $w = 90^\circ$, $2w = 180^\circ$, in Übereinstimmung damit, daß die Pole der Erde als Parallelkreise der Säule abgebildet werden. Es ist klar, daß man diesen Entwurf, wie auch alle andern echten Säulenentwürfe, nur für eine Zone verwenden darf, die sich mäßig weit vom Gleicher nach Norden und Süden erstreckt.

3. Durch geeignete Verfügung über die Zahl n kann man eine möglichst günstige Verteilung der Winkelverzerrung erreichen, z. B. daß das Verhältnis der Halbachsen des Maßzugs am Rande umgekehrt gleich dem für den Gleicher ist.

Hat der Rand die Breite α, so soll also die Bedingung erfüllt sein

$$\left(\frac{a}{b}\right)_\alpha = \left(\frac{b}{a}\right)_0 \quad ,$$

woraus folgt

$$1) \qquad \frac{1}{n^2}\cos^2\alpha = n^2, \qquad n = \sqrt{\cos\alpha} \quad .$$

Man hat also die Entwurfsgleichung

$$2) \qquad \zeta = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\cos\alpha}} \quad .$$

Aus der Formel für die Winkelverzerrung

$$3)\qquad \sin w = \frac{\cos a - \cos^2\varphi}{\cos a + \cos^2\varphi},$$

folgt Winkeltreue in der Breite φ, für die

$$\cos\varphi = \sqrt{\cos a}\quad .$$

4. Den flächentreuen Säulenentwurf für $n = 1$ gab LAMBERT, Anmerkungen und Zusätze u. s. w., OSTWALDS Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 54, S. 60—62, in gerader und in querständiger Anordnung. Wegen flächentreuer Säulenentwürfe mit $n < 1$ vergleiche man TISSOT-HAMMER, Netzentwürfe, S. 100 und 101. Zwei kleine flächentreue Säulenentwürfe, einen geraden und einen querständigen, findet man bei BREUSING, Das Verebnen u. s. w., Tafel 4, Nr. 3 und 4; eine Nachbildung dieser letztern Entwürfe geben wir auf Tafel 3, C und D.

5. Winkeltreuer Säulenentwurf. Aus der Bedingung für Winkeltreue

$$\zeta' \cos\varphi = n\,,\qquad \zeta' = \frac{n}{\cos\varphi}$$

folgt

$$1)\qquad \zeta = n\, l \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\quad .$$

Für den einfachsten Fall $n = 1$ hat man

$$\zeta = l \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\quad ;$$

das Flächenverhältnis ist hier

$$S = \frac{\zeta'}{\cos\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi}\quad .$$

Es ist für $\varphi = 0$, am Gleicher, die Einheit; der Gleicher wird also hier, wie bei LAMBERTS Säulenentwurfe, flächentreu und winkeltreu abgebildet; mit zunehmender Breite φ wächst S zunächst, in der Nähe des Gleichers, nur langsam, dann aber rascher, und wird für die Pole unendlich groß; die Bilder der Pole sind hier in unendlicher Ferne, während beim flächentreuen Entwurfe die ganze Erde sich auf einem Rechtecke abbildet, dessen Höhe der (verjüngte) Erddurchmesser ist.

6. Dieser Entwurf ist eine Schöpfung von GERHARD MERCATOR (KREMER) 1569. In der Absicht, einen Entwurf herzustellen, dessen Meridianbilder gleichlaufende Gerade, dessen Parallelkreisbilder dazu rechtwinklige Gerade sind, und in dem die Richtungen um jeden Punkt herum unverfälscht wiedergegeben werden, vergrößerte er jeden Breitengrad in dem Verhältnisse des Gleichers zum Breitenkreise φ. Dabei war er sich bewußt, daß er die gestellte Forderung auf diese Weise nicht ganz genau erfüllte, sondern daß dazu nicht ein Fortschritt um endliche, sondern um unendlich kleine Breitenänderungen nötig sei, der damalige Stand der Mathematik versagte ihm aber die Mittel, die klar gestellte Aufgabe durch eine genaue Formel zu lösen.

Die querständige und zwischenständige Anordnung des Entwurfs ist von LAMBERT und später von GAUSS angegeben worden, und wird daher als LAMBERT-GAUSS' konformer Säulenentwurf bezeichnet.

7. MERCATORS winkeltreuer Säulenentwurf ist besonders deswegen wertvoll, weil er in einfachster Weise zwischen zwei Punkten A und B das Bild der loxodromen Linie zu ziehen gestattet, d. i. der Linie, entlang deren ein Schiff segeln muß, wenn seine Fahrtrichtung jeden Meridian unter demselben Winkel schneidet. Dieses Bild ist auf MERCATORS Karte offenbar die Gerade AB; denn diese schneidet alle Meridianbilder unter demselben Winkel, und diese

Winkel sind ihren Urbildern gleich. Ist dagegen ein Säulenentwurf nicht winkeltreu, so ist die Gerade AB im allgemeinen nicht das Bild der Loxodromen; denn es schneidet zwar auf der Karte AB wieder alle Meridianbilder unter gleichen Winkeln, diese aber haben alsdann im allgemeinen nicht gleiche Urbilder.

8. Nimmt man n nicht der Einheit gleich, so kann man es so wählen, daß die Verteilung der Flächenverzerrung möglichst günstig ausfällt, etwa so, daß das Flächenverhältnis am Rande dem am Gleicher umgekehrt gleich ist, daß also, wenn wieder a die geographische Breite des Randes bezeichnet,

$$\left(\frac{n\zeta'}{\cos\varphi}\right)_a = \left(\frac{\cos\varphi}{n\zeta'}\right)_0 \quad ,$$

woraus sich ergibt

$$n = \sqrt{\cos a} \quad .$$

Flächentreue herrscht hier in der Breite φ, für die

$$\cos\varphi = \sqrt{\cos a} \quad .$$

Wie in Nr. 3, so werden auch hier die Breitenkreise φ flächentreu und winkeltreu abgebildet.

MERCATORS winkeltreuen Säulenentwurf für eine Zone, die sich vom Gleicher bis zu etwa 80° nördlicher und südlicher Breite erstreckt, hat wohl jeder geographische Atlas. Geradständig findet er sich bei SCHRADER, PRUDENT und ANTHOINE, Nr. 51, Ozeanien, 1:60000000, und übereinstimmend bei SPAMER Nr. 127/128. Querständig angewendet ist er bei DEBES, Nr. 32, Rußland, Entwurfspol 128° östl. L. v. Gr., 1:8250000; Nr. 48, Nilländer, Entwurfspol 124° östl. L. v. Gr., 1:10000000; zwischenständig bei DEBES Nr. 43, Südostasien, Entwurfspol 45° nördl. Br., 207° 30′ östl. L. v. Gr., 1:10000000 und Nr. 57, Mittelamerika, Entwurfspol 45° nördl. Br., 25° östl. L. v. Gr., 1:10000000.

Wir geben den Entwurf auf Tafel 10 geradständig, für Ozeanien (nach SPAMER Nr. 127/128); auf Tafel 11 querständig, für Rußland (nach DEBES Nr. 32), und auf Tafel 12 zwischenständig, für Mittelamerika (nach DEBES Nr. 57).

9. Quadratische Plattkarte (d. i. echter Säulenentwurf). Dieser Entwurf entspricht dem speichentreuen ebenen Entwurfe insofern, als hier die Meridiane längentreu abgebildet werden. Entwirft man ein Gradnetz, in dem die Meridiane und Breitenkreise für gleiche Winkelabstände verzeichnet sind, so zerteilen die Meridian- und Breitenkreisbilder die Karte in quadratische Felder. Die Gleichung des Entwurfs ist

$$\zeta = \varphi \,, \qquad n = 1 \quad .$$

Für die bezeichnenden Zahlen ergibt sich daher

$$S = \frac{1}{\cos\varphi} \,, \qquad \sin w = \frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi} = \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2} \quad .$$

Die Winkelverzerrung wächst langsamer, als beim flächentreuen, die Flächenverzerrung langsamer, als beim winkeltreuen Entwurfe.

10. Rechteckige Plattkarte. Nimmt man als Entwurfsgleichung

$$\zeta = \varphi \,, \qquad n < 1 \quad ,$$

so besteht das Gradnetz aus kongruenten Rechtecken; hierbei ist

$$S = \frac{n}{\cos\varphi} \,, \qquad \sin w = \frac{\cos\varphi - n}{\cos\varphi + n} \quad .$$

Verlangt man, daß an den Rändern und unterem Gleicher die Flächenverhältnisse umgekehrt gleich sein sollen, so hat man, wenn wenn a die geographische Breite des Kartenrandes ist,

$$\frac{n}{\cos a} = \frac{1}{n} \,, \qquad n = \sqrt{\cos a} \quad ,$$

also die Entwurfsgleichung

$$1)\qquad \zeta = \varphi \quad ,$$

und das Bild des Gleicherbogens λ

$$2)\qquad \lambda' = \sqrt{\cos\alpha}\cdot\lambda \quad .$$

Da für rechteckige Plattkarten die eine Halbachse des Maßzugs gleich $a = 1$ ist, so ist die Bedingung $S_a = 1 : S_0$ gleichbedeutend mit $b_a = 1 : b_0$, es treten also für Flächen- und Winkelverzerrung gleich günstige Verteilung für denselben Wert $n = \sqrt{\cos\alpha}$ ein.

11. Die quadratischen Plattkarten waren seit dem Anfange des 13. Jahrhunderts für Seekarten in Gebrauch, nicht sowohl wegen der Einfachheit der Herstellung des Gradnetzes, als weil man sie zum Segeln nach der loxodromen Linie in der Weise verwenden zu können glaubte, daß man als Bild der Loxodromen zwischen zwei Kartenpunkten A und B einfach die Gerade AB annahm. Soweit bei der Plattkarte die Winkelverzerrungen nicht erheblich sind, also in der Nähe des Gleichers, beging man bei dieser Annahme keinen erheblichen Fehler; in größern Entfernungen vom Gleicher und wenn AB eine mittlere Richtung zwischen Meridianen und Parallelkreisen hatte, waren die gleichen Schnittwinkel der Geraden AB mit den Meridianbildern keineswegs die Bilder gleicher Winkel auf der Erde, die Gerade AB war also auch nicht mehr angenähert als Bild einer Loxodromen zu gebrauchen. Aus dem Wunsche, diesen „Fehler" zu verbessern, ging MERCATORS große Leistung hervor.

Im allgemeinen aber ist es nicht zulässig, die quadratische Plattkarte mit der Bemerkung abzutun, daß sie nur in der Nähe des Gleichers (bezw. bei allgemeiner Ausführung nur in der Nähe des mittlern Hauptkreises) zu gebrauchen sei, weil sie in größern Abständen erhebliche Fehler zeige, wie dies z. B. bei GRETSCHEL, Lehrbuch, S. 111, Nr. 3 geschieht. Es ist eben jeder Entwurf ohne Ausnahme „fehlerhaft", der MERCATORsche winkeltreue z. B. macht in Bezug auf Meridianbogen und Flächen in größerem Abstande vom Gleicher viel ärgere „Fehler" als die quadratische Plattkarte, die als ganz brauchbarer vermittelnder Säulenentwurf neben allen andern ihren Platz behaupten darf.

Rechteckige Plattkarten waren schon dem griechischen Altertume bekannt; MARINUS VON TYRUS (100 n. Chr.) gilt als der erste, der eine rechteckige Plattkarte entwarf; sein etwas jüngerer Zeitgenosse PTOLEMÄUS (87—150 n. Chr.) gab ein Lehrbuch der Geographie, das bis zum 15. Jahrhundert maßgebend war, und worin er u. a. auch ausführlich über die Abbildung der Erdkugel auf die Ebene handelt. Für eine rechteckige Plattkarte zur Darstellung der damals bekannten Gebiete der Erde nahm er als längentreuen Breitenkreis den von Rhodos an. Man vergleiche den historischen Überblick in ZONDERVAN, Allgemeine Kartenkunde, Leipzig 1901, S. 14, 15 u. ff.

Die zwischenständige Anordnung der quadratischen Plattkarte verwendeten FRANÇOIS und DOMINIQUE CASSINI (Vater und Sohn) bei der von ihnen 1745—93 bearbeiteten (älteren) Carte de France sowie SOLDNER für die Steuerblätter der bayrischen Landesaufnahme, daher wird der Entwurf oft als CASSINI-SOLDNERS Entwurf bezeichnet.

12. Zur Darstellung einer Zone bezw. eines Zonenausschnitts, bei denen die Erstreckung zu beiden Seiten des Gleichers nur mäßig ist, kann man einen gut vermittelnden Entwurf durch eine geeignete Reihenentwicklung herstellen. (Vgl. § 3, Nr. 14.) Man setze

$$1)\qquad \zeta = \varphi + A\varphi^3 + B\varphi^5 + C\varphi^7 \quad ;$$

alsdann ist

$$2)\qquad S = \frac{n(1 + 3A\varphi^2 + \ldots)}{1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \ldots} = n\left[1 + (3A + \tfrac{1}{2})S^2 + \ldots\right] \quad ,$$

$$3)\qquad \frac{a}{b} = \frac{\zeta'\cos\varphi}{n} = \frac{1}{n}[1 + (3A - \tfrac{1}{2})\varphi^2 + \ldots] \ .$$

Wir setzen nun fest, daß am Gleicher die Karte flächen- und winkeltreu sein soll; hieraus folgt $n = 1$; ferner, daß das Flächenverhältnis und das Verhältnis der Halbachsen des Maßzugs von der Einheit um entgegengesetzt gleiche Beträge abweichen sollen, woraus zunächst $A = 0$ folgt. Die Entwurfsgleichung vereinfacht sich hiernach zu

$$4)\qquad \zeta = \varphi + B\varphi^5 + C\varphi^7 \ .$$

Bis auf Glieder von der Ordnung φ^6 ist

$$S = 1 + \tfrac{1}{2}\varphi^2 + 5(B + \tfrac{1}{24})\varphi^4 + \left(\frac{5B}{2} + 7C + \frac{61}{720}\right)\varphi^6 \ ,$$

$$\frac{a}{b} = 1 - \tfrac{1}{2}\varphi^2 + (5B + \tfrac{1}{24})\varphi^4 - \left(\frac{5B}{2} - 7C + \frac{1}{720}\right)\varphi^6 \ .$$

Sollen die Abweichungen von der Einheit in beiden Fällen für alle vorkommenden Breiten bis auf die festgehaltene Grenze entgegengesetzt gleich sein, so hat man die Bedingungen

$$5B + \tfrac{5}{24} = -5B - \tfrac{1}{24} \ ,$$

$$\frac{5B}{2} + 7C + \frac{61}{720} = \frac{5B}{2} - 7C + \frac{1}{720} \ ,$$

aus denen man erhält

$$5)\qquad B = -\tfrac{1}{40}\,, \quad C = -\tfrac{1}{168} \ .$$

Die Gleichung dieses Entwurfs ist daher

$$6)\qquad \zeta = \varphi - \tfrac{1}{40}\varphi^5 - \tfrac{1}{168}\varphi^7 \ ,$$

wobei

$$7)\qquad \begin{cases} S = 1 + \tfrac{1}{2}\varphi^2 + \tfrac{1}{12}\varphi^4 - \tfrac{7}{360}\varphi^6 \ , \\ \dfrac{a}{b} = 1 - \tfrac{1}{2}\varphi^2 - \tfrac{1}{12}\varphi^4 + \tfrac{7}{360}\varphi^6 \ . \end{cases}$$

Für kleine Werte von φ, wo man $\tfrac{1}{40}\varphi^5$ auch an den Rändern vernachlässigen darf, kommt man auf die quadratische Plattkarte $\zeta = \varphi$ zurück.

13. Jedes Gebiet, das sich von einem mittlern Hauptkreise γ aus nahezu gleich weit nach beiden Seiten erstreckt und seitlich von zwei Ordinatenkreisen des Grundkreises γ begrenzt wird, eignet sich zu einem Säulenentwurfe. Ist γ der Gleicher, so ist der Entwurf geradständig, in jedem andern Falle ist er queroder zwischenständig. Zur Herstellung eines Entwurfs, der nicht geradständig ist, schaltet man, wie bei ebenen Entwürfen, einen stereographischen Entwurf ein, und zwar den auf eine zu γ gleichgestellte Ebene. Hat man zu dem Erdpunkte P das stereographische Abbild P' gefunden, so entnimmt man aus diesem stereographischen Entwurfe die Koordinaten von P in Bezug auf den Grundkreis γ und trägt alsdann P_1 mit Hilfe von n und einer für den verlangten Entwurf berechneten Tafel der Funktion ζ ein.

14. Als unechten Säulenentwurf schließen wir hier den ebenfalls von Mercator herrührenden Entwurf an, bei dem zunächst der Gleicher und der Mittelmeridian als zwei lotrechte Gerade und längentreu abgebildet werden; die Bilder der Breitenkreise sind dem Gleicherbilde gleich gerichtete Gerade und ebenfalls längentreu. Ist das Bild des Gleichers die X_1-Achse, das des

Mittelmeridians die Y_1-Achse, so hat man als Koordinaten eines Kartenpunktes

$$1)\quad \begin{cases} x_1 = \lambda\cos\varphi\,, \quad y_1 = \varphi\,, \quad z_1 = 0\,, \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial\varphi} = -\lambda\sin\varphi\,, \quad \dfrac{\partial y_1}{\partial\varphi} = 1\,, \quad \dfrac{\partial z_1}{\partial\varphi} = 0\,, \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial\lambda} = \cos\varphi\,, \quad \dfrac{\partial y_1}{\partial\lambda} = 0\,, \quad \dfrac{\partial z_1}{\partial\lambda} = 0\,, \\ e_1 = 1 + \lambda^2\sin^2\varphi\,, \quad f_1 = -\lambda\sin\varphi\cos\varphi\,, \quad g_1 = \cos^2\varphi\,. \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$2)\quad S^2 = \frac{e_1 g_1 - f_1^2}{e g - f^2} = \frac{\lambda^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \cos^2\varphi - \lambda^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} = 1\,,$$

dieser Entwurf ist also **flächentreu**. Die Bedingungsgleichungen für **entsprechende rechte Winkel** sind (§ 1, Nr. 5)

$$3)\quad 1 + \cos^2\varphi\cdot k k' = 0\,,$$

$$4)\quad 1 + \lambda^2\sin^2\varphi - \lambda\sin\varphi\cos\varphi\,(k + k') + \cos^2\varphi\cdot k k' = 0\,.$$

Ersetzt man hier $k k'$ gemäß 3), so ergibt sich

$$5)\quad k + k' = \lambda\,\mathrm{tang}\,\varphi\,,$$

daher sind k und k' die Wurzeln der Gleichung

$$6)\quad k^2 - \lambda\,\mathrm{tang}\,\varphi\cdot k - \frac{1}{\cos^2\varphi} = 0\,,$$

woraus folgt

$$7)\quad \left.\begin{matrix} k \\ k' \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\lambda\,\mathrm{tang}\,\varphi \pm \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2\,\mathrm{tang}^2\varphi + \frac{4}{\cos^2\varphi}} = \frac{1}{2\cos\varphi}\left(\lambda\sin\varphi \pm \sqrt{\lambda^2\sin^2\varphi + 4}\right).$$

Für den zur Richtung ϱ gehörigen **Halbmesser des Maßzugs** hat man (§ 1, Nr. 9)

$$\varrho^2 = \frac{ds_1^2}{ds^2} = \frac{e_1 + 2 f_1 k + g_1 k^2}{e + 2 f k + g k^2}$$
$$= \frac{1 + \lambda^2\sin^2\varphi - 2\lambda\sin\varphi\cos\varphi\cdot k + \cos^2\varphi\cdot k^2}{1 + \cos^2\varphi\cdot k^2}\,.$$

Da nun nach 6)

$$k^2 - \lambda\,\mathrm{tang}\,\varphi\cdot k = \frac{1}{\cos^2\varphi}\,, \qquad \cos^2\varphi\cdot k^2 - \sin\varphi\cos\varphi\cdot k = 1\,,$$

so folgt

$$8)\quad \varrho^2 = \frac{2 + \lambda^2\sin^2\varphi - \lambda\sin\varphi\cos\varphi\cdot k}{2 + \lambda\sin\varphi\cos\varphi\cdot k}\,.$$

Setzt man hier die Werte aus 7), so erhält man für die Quadrate der Halbachsen des Maßzugs

$$\left.\begin{matrix} a^2 \\ b^2 \end{matrix}\right\} = \frac{\sqrt{4 + \lambda^2\sin^2\varphi} \pm \lambda\sin\varphi}{\sqrt{4 + \lambda^2\sin^2\varphi} \mp \lambda\sin\varphi}\,.$$

Man hat daher

$$9)\quad a^2 = \frac{\sqrt{4 + \lambda^2\sin^2\varphi} + \lambda\sin\varphi}{\sqrt{4 + \lambda^2\sin^2\varphi} - \lambda\sin\varphi}\,, \qquad b = \frac{1}{a}\,.$$

Für den Sinus der halben größten Winkelverzerrung hat man

$$\text{10)} \qquad \sin w = \frac{a-b}{a+b} = \frac{a^2-1}{a^2+1} = \frac{\lambda \sin\varphi}{\sqrt{4+\lambda^2 \sin^2\varphi}} \; .$$

Die Winkelverzerrung hängt daher hier von beiden Parametern λ und φ ab und ist mit dem Produkte $\lambda \sin\varphi$ beständig. Setzt man

$$\sin w = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{\lambda^2 \sin^2\varphi} + 1}} \; ,$$

so erkennt man, daß w dort am größten wird, wo $\lambda \sin\varphi$ am größten ist; wenn die Karte ein Rechteck ist, dessen Mittellinien die Koordinatenachsen sind, so kommen die größten Winkelverzerrungen an den vier Ecken vor.

Es bedarf wohl nicht der Bemerkung, daß auch dieser Entwurf nach Bedürfnis anders als geradständig ausgeführt werden kann.

15. Wie schon erwähnt, rührt dieser Entwurf, der sich durch einfache Konstruktion des Gradnetzes auszeichnet, zweifellos ebenfalls von MERCATOR her; benannt wird er zumeist nach NICOLAS SANSON, der von diesem Entwurfe um 1650 mehrfach Gebrauch machte, oder nach FLAMSTEED, der ihn in seinem Himmelsatlas (1700—1729) anwandte.

Man findet ihn bei SCHRADER, PRUDENT und ANTHOINE, Nr. 43, Asiatischer Archipel, 1 : 12500000; Nr. 46 und 47, Afrika 1 : 300000; Nr. 48, Nordwestafrika; Nr. 49, Nordostafrika; Nr. 50, Südafrika, 1 : 15000000; übereinstimmend damit bei SPAMER, Nr. 113/114, Nr. 115/116, Nr. 117/118, Nr. 119/120 und Nr. 121/122. Die Netzentwürfe SCHRADER u. s. w. Nr. 48, 49, 50 und SPAMER, Nr. 117/118, Nr. 119/120, Nr. 121/122 sind die geometrisch ähnlichen, auf den doppelten Maßstab gebrachten entsprechenden Teile der Entwürfe des ganzen Erdteiles. Wir können dieses Verfahren nicht billigen. Es hat schlechterdings keinen Sinn, die großen Randverzerrungen der Übersichtskarte auf die Karten größern Maßstabes zu übertragen und diese dadurch geradezu zu verderben. Hier mußten selbständige Entwürfe gewählt werden. Wollte man Flächentreue beibehalten, so war etwa ein flächentreuer echter ebener am Platze, dessen Entwurfspol natürlich nicht die Mitte der Übersichtskarte, sondern die des dargestellten nordöstlichen Teiles von Afrika u. s. w. hätte sein müssen.

Außerdem ist der Entwurf noch angewandt bei SCHRADER, PRUDENT und ANTHOINE Nr. 61 und Nr. 62, Südamerika, 1 : 30000000, sowie Nr. 63 und Nr. 64, nördlicher und südlicher Teil von Südamerika, 1 : 15000000, und dementsprechend bei SPAMER, Nr. 143/144, Nr. 145/146, Nr. 147/148, Nr. 149/150. Auch hier sind die Netzentwürfe der Karten größern Maßstabes ähnliche Abbilder der betreffenden Teile der Übersichtskarten; dagegen läßt sich bei dem nördlichen Teile Südamerikas nichts einwenden, da das dargestellte Gebiet sich ungefähr gleich weit nördlich und südlich vom Gleicher erstreckt; der Entwurf für den südlichen Teil von Südamerika kann aber nur als unzweckmäßig bezeichnet werden, wie auch für die Darstellung des ganzen Südamerika ein besser geeigneter flächentreuer Entwurf zu empfehlen sein möchte.

Auf der Tafel 13 findet sich der Entwurf für Afrika (nach SPAMER Nr. 115/116).

16. Es bedarf nur eines Hinweises, daß auch bei quer- oder zwischenständigen Säulenentwürfen die Berechnung von Tafeln zur Änderung der Koordinaten durch Zwischenschaltung eines stereographischen Entwurfs vermieden werden kann. Ist die Ebene des stereographischen Entwurfs senkrecht zur Säulenachse, so entnimmt man aus dem stereographischen Entwurfe sofort die geänderten Koordinaten der Netzknotenpunkte u. s. w. (§ 3, Nr. 5).

§ 5. Kegelentwürfe.

1. Bei einem echten geradständigen Kegelentwurfe legen wir, wie schon oben bemerkt, einen Umdrehungskegel zugrunde, dessen Achse die Erdachse ist, betreffs dessen Öffnung wir uns aber vor der Hand den Entschluß noch vorbehalten. Die Meridiane werden durch die Spuren ihrer Ebenen auf dem Kegelmantel, die Breitenkreise als Parallelkreise des Kegels abgebildet. Legen wir für den Kegel die Koordinatenebenen durch die Spitze und nehmen die Erdachse als Z_1-Achse, und bestimmen wir einen Punkt P der Erde durch Polabstand δ und Länge λ, so ist für die Erde (§ 3, Nr. 1)

$$x = \sin\delta\cos\lambda\,, \quad y = \sin\delta\cos\lambda\,, \quad z = \cos\delta \quad ,$$

$$e = 1\,, \quad f = 0\,, \quad g = \sin^2\delta \quad .$$

Bezeichnet man den Sinus der halben Kegelöffnung mit n, mit ζ den Abstand eines Kegelpunktes von der Spitze, so hat man für das Bild P_1

$$1)\quad \begin{cases} x_1 = n\zeta\cos\lambda\,, & y_1 = n\zeta\sin\lambda\,, & z_1 = \sqrt{1-n^2}\cdot\zeta \quad , \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial\delta} = n\zeta'\cos\lambda\,, & \dfrac{\partial y_1}{\partial\delta} = n\zeta'\sin\lambda\,, & \dfrac{\partial z_1}{\partial\delta} = \sqrt{1-n^2}\cdot\zeta'^2 \quad , \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial\lambda} = -n\zeta\sin\lambda\,, & \dfrac{\partial y_1}{\partial\lambda} = n\zeta\cos\lambda\,, & \dfrac{\partial z_1}{\partial\lambda} = 0 \quad , \end{cases}$$

$$2)\qquad e_1 = \zeta'^2\,, \quad f_1 = 0\,, \quad g_1 = n^2\zeta^2 \quad .$$

Hieraus ergibt sich das Flächenverhältnis

$$3)\qquad S = \frac{n\zeta\zeta'}{\sin\delta} \quad ,$$

die Halbachsen des Maßzugs

$$4)\qquad a = \zeta'\,, \quad b = \frac{n\zeta}{\sin\delta} \quad ,$$

und die Winkelverzerrung

$$5)\qquad \sin w = \frac{\zeta'\sin\delta - n\zeta}{\zeta'\sin\delta + n\zeta} \quad .$$

2. LAMBERTS flächentreuer Kegelentwurf. Soll der Entwurf flächentreu sein, so muß für das ganze Gebiet die Gleichung gelten

$$n\zeta\zeta' = \sin\delta \quad ,$$

aus der man durch Integration erhält

$$\frac{n}{2}\zeta^2 = m - \cos\delta \quad ,$$

wobei m die Integrationskonstante ist; hieraus folgt

$$\zeta = \sqrt{\frac{2}{n}}\sqrt{m - \cos\delta} \quad .$$

Über die beiden Konstanten des Entwurfs, m und n, kann man nun so verfügen, daß zwei geeignete Bedingungen erfüllt werden.

Wird verlangt, daß ζ mit δ verschwindet, daß also die Kegelspitze das Bild des Pols ist, so muß $m = 1$ sein, und man erhält die Entwurfsgleichung

$$1)\qquad \zeta = \frac{2}{\sqrt{n}}\cdot\sin\frac{\delta}{2} \quad .$$

Für die Winkelverzerrung erhält man

$$2)\quad \begin{cases} \sin w = \dfrac{n\zeta\zeta'\sin\delta - n^2\zeta^2}{n\zeta\zeta'\sin\delta + n^2\zeta^2} = \dfrac{\sin^2\delta - 4n\sin^2\frac{1}{2}\delta}{\sin^2\delta + 4n\sin^2\frac{1}{2}\delta} \\ \quad = \dfrac{\cos^2\frac{1}{2}\delta - n}{\cos^2\frac{1}{2}\delta + n} \end{cases}$$

Man kann n so wählen, daß der Entwurf für den Polabstand a winkeltreu ist; dann muß

$$n = \cos\tfrac{1}{2}a$$

sein, und man hat

$$3)\quad \zeta = \frac{2}{\cos\frac{1}{2}a}\cdot\sin\tfrac{1}{2}\delta \quad .$$

$$4)\quad \sin w = \frac{\cos^2\frac{1}{2}\delta - \cos^2\frac{1}{2}a}{\cos^2\frac{1}{2}\delta + \cos^2\frac{1}{2}a} \quad .$$

3. Kegelrumpfentwurf. Zur Darstellung einer Zone um den Pol herum, oder eines Ausschnitts einer solchen, kann auch ein Entwurf in Betracht kommen, für den n von 1 verschieden, also die Kegelspitze nicht das Bild des Pols ist, sondern der Pol sich auf dem Kegel als Parallelkreis abbildet; das ist ebenso zulässig, wie der Umstand, daß bei Säulenentwürfen eine Gerade das Bild des Pols ist. Indem man dann über zwei Konstante willkürlich verfügen kann, ist man in der Lage, möglichst günstige Bedingungen für die Winkelverzerrungen zu erfüllen. Wir wollen verlangen, daß für die Rand-Polabstände a und β die Maßzüge gleiches Achsenverhältnis haben und daß für den mittlern Polabstand γ des Gebietes das Achsenverhältnis des Maßzugs dem am Rande umgekehrt gleicht. Geht man von a und β nach γ, so muß man zu unendlich vielen Paaren von Polabständen a' und β' kommen, die gleiches Verhältnis der Achsen des Maßzugs haben; insbesondere muß es zwei Polabstände, einen zwischen a und γ, den andern zwischen γ und β geben, wo Winkeltreue herrscht; im Polabstande γ fallen zwei solche Werte a' und β' in einen zusammen. Für jedes solche Paar a' und β' gilt die Gleichung

$$\left(\frac{a}{b}\right)_{a'} = \left(\frac{a}{b}\right)_{\beta'}, \quad \text{d. i.} \quad \left(\frac{\zeta'\sin\delta}{\zeta}\right)_{a'} = \left(\frac{\zeta'\sin\delta}{\zeta}\right)_{\beta'} ,$$

also

$$\frac{\sin^2 a'}{m - \cos a'} = \frac{\sin^2\beta'}{m - \cos\beta'} ,$$

$$m(\sin^2\beta' - \sin^2 a') = \sin^2\beta'\cos a' - \sin^2 a'\cos\beta' ,$$

$$m(\cos^2 a' - \cos^2\beta') = \cos a' - \cos\beta' + \cos a'\cos\beta'(\cos a' - \cos\beta') ,$$

woraus folgt

$$1)\quad m = \frac{1 + \cos a'\cos\beta'}{\cos a' + \cos\beta'} \quad .$$

Da

$$1 + \cos a'\cos\beta' = \tfrac{1}{2}[1 + \cos(a' - \beta')] + \tfrac{1}{2}[1 - \cos(a' + \beta')]$$
$$= \cos^2\tfrac{1}{2}(a' - \beta') + \cos^2\tfrac{1}{2}(a' + \beta') ,$$

und

$$\cos a' + \cos\beta' = 2\cos\tfrac{1}{2}(a' - \beta')\cos\tfrac{1}{2}(a' + \beta') ,$$

so hat man auch

$$2)\quad m = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\frac{1}{2}(a' + \beta')}{\cos\frac{1}{2}(a' - \beta')} + \frac{\cos\frac{1}{2}(a' - \beta')}{\cos\frac{1}{2}(a' + \beta')}\right) \quad .$$

Setzt man hierin für das Wertpaar α' und β' den besondern Wert γ, so erhält man

$$\cos\gamma + \frac{1}{\cos\gamma} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha'+\beta')}{\cos\frac{1}{2}(\alpha'-\beta')} + \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha'-\beta')}{\cos\frac{1}{2}(\alpha'+\beta')} \quad ,$$

woraus sich ergibt

$$3) \qquad \cos\gamma = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha'+\beta')}{\cos\frac{1}{2}(\alpha'-\beta')} \quad .$$

Ersetzt man hier α' und β' durch α und β, so folgt

$$4) \qquad \cos\gamma = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} \quad .$$

Ferner folgt für die Winkelverzerrung (vgl. Nr. 1, 5))

$$5) \qquad \sin w = \frac{\sin^2\delta - 2n(m-\cos\delta)}{\sin^2\delta + 2n(m-\cos\delta)} \quad .$$

Für die Polabstände α' und β' hat man aus 1)

$$6) \qquad \begin{cases} m - \cos\alpha' = \dfrac{\sin^2\alpha'}{\cos\alpha' + \cos\beta'} \,, \qquad m - \cos\beta' = \dfrac{\sin^2\beta'}{\cos\alpha' + \cos\beta'} \quad , \\ (\sin w)_{\alpha'} = \dfrac{\cos\alpha' + \cos\beta' - 2n}{\cos\alpha' + \cos\beta' + 2n} = (\sin w)_{\beta'} \quad . \end{cases}$$

Da nun für α und γ die Winkelverzerrungen entgegengesetzt gleich sein sollen, so folgt

$$\frac{\cos\alpha + \cos\beta - 2n}{\cos\alpha + \cos\beta + 2n} = -\frac{\cos\gamma - n}{\cos\gamma + n} \quad ,$$

woraus sich die zweite Zahl n ergibt; man erhält

$$n^2 = \tfrac{1}{2}(\cos\alpha + \cos\beta)\cos\gamma \quad ,$$

und hieraus folgt mit Rücksicht auf 4)

$$7) \qquad n = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \quad .$$

Für die Polabstände ε_1 und ε_2, in denen die Abbildung winkeltreu ist, folgt aus 3) und 6), wenn man α' und β' durch ε_1 und ε_2 und w durch 0 ersetzt,

$$8) \qquad \begin{cases} \dfrac{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)} = \cos\gamma \quad , \\ \cos\varepsilon_1 + \cos\varepsilon_2 = 2n \quad . \end{cases}$$

Benutzt man hier

$$\cos\varepsilon_1 + \cos\varepsilon_2 = 2\cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) \quad ,$$

so folgt

$$\cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) = n \quad .$$

Hieraus und aus 9) und 10) folgt

$$9) \qquad \begin{cases} \cos\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sqrt{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}} \quad , \\ \cos\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2) = \sqrt{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} \quad . \end{cases}$$

Die schlechthin größte Winkelverzerrung W kommt am Rande, sowie im Polabstande γ vor, und man hat

$$10) \qquad \sin W = \frac{\cos\gamma - n}{\cos\gamma + n} = \frac{1 - \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{1 + \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} = \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{4}(\alpha-\beta) \quad .$$

Für zwei zusammengehörige Polabstände α' und β' bemerke man noch die aus 3) und 4) folgende Beziehung

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha'-\beta')}{\cos\frac{1}{2}(\alpha'+\beta')} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \quad ;$$

ersetzt man

$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha'-\beta') = \cos\tfrac{1}{2}\alpha'\cos\tfrac{1}{2}\beta' + \sin\tfrac{1}{2}\alpha'\sin\tfrac{1}{2}\beta' \quad \text{u. s. w.},$$

und beseitigt die Nenner, so erhält man sofort

$$11) \qquad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha'\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta = \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\gamma \quad ,$$

die man dazu benutzen kann, aus einem Polabstande α' den zugehörigen β' zu finden.

Mit Hilfe dieser Formeln läßt sich schließlich noch ζ vereinfachen; denn man hat, wenn δ und δ_1 zueinander gehörige Polabstände sind

$$m - \cos\delta = \frac{\sin^2\delta}{\cos\delta + \cos\delta_1} = \frac{\sin^2\delta}{2\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta_1)\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)} \quad .$$

Da nun ferner

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta_1)}{\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} \quad ,$$

so ist

$$\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta_1)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1) = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\cos^2\tfrac{1}{2}(\delta+\delta_1) \quad ,$$

und daher schließlich

$$12) \qquad \zeta = \frac{1}{\sqrt{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}}\cdot\frac{\sin\delta}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta_1)} \quad .$$

Man kann bei der Ausführung dieses Entwurfs die Formeln in folgender Reihe benutzen:

a) $\cos\gamma = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$; b) $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\delta_1 = \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\gamma\cdot\cot\frac{1}{2}\delta$;

c) $\zeta = \dfrac{1}{\sqrt{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}}\cdot\dfrac{\sin\delta}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta_1)}$;

d) $\cos\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sqrt{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}}$, $\cos\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2) = \sqrt{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$;

e) $\sin w = \dfrac{\cos\delta+\cos\delta_1-2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\delta+\cos\delta_1+2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$, f) $\sin W = \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$.

4. Den flächentreuen Kegelentwurf gab Lambert in der schon mehrfach angeführten berühmten Abhandlung, Ostwalds Klassiker u. s. w. Nr. 54, § 108 und 109.

Die zweckmäßige Bestimmung der Konstanten rührt von Albers her: Beschreibung einer neuen Kegelprojektion, Zachs monatliche Korrespondenz, November 1805; vergleiche auch Tissot-Hammer, Die Netzentwürfe geographischer Karten, S. 141. Der von Albers abgeänderte Lambertsche Entwurf wird als Kegelrumpfentwurf von Albers bezeichnet.

Gretschel, Lehrbuch der Kartenprojektion, Tafel III, Figur XIX, gibt das Gradnetz einer nördlichen Halbkugel nach Albers.

Anwendungen trifft man bei Andree, S. 178/179, Nebenkarten zu Südamerika, geradständiger flächentreuer Kegelentwurf; S. 174/175, Nebenkarten zu Südamerika, schiefachsiger, flächentreuer Kegelrumpfentwurf.

5. LAMBERTS **winkeltreuer Kegelentwurf.** Die Differentialgleichung für Winkeltreue

$$\text{1)} \qquad \frac{\zeta' \sin\delta}{n\,\zeta} = 1$$

liefert durch Integration

$$\text{2)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} l\zeta = c\, l \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\delta + c \quad , \\ \zeta = c \operatorname{tang}^n \tfrac{1}{2}\delta \quad . \end{array} \right.$$

Die Zahl c hat auf die Gestaltung des Entwurfs keinen Einfluß, denn ein Wechsel von c bedeutet nur den Übergang zu einem ähnlichen Bilde; sie ist übrigens der Halbmesser des Gleicherbildes. Das Flächenverhältnis ist

$$S = \frac{n\,\zeta\,\zeta'}{\sin\delta} \quad .$$

Ersetzt man hier nach 1)

$$n\,\zeta\,\zeta' = \zeta'^2 \sin\delta \quad ,$$

so erhält man

$$S = \zeta'^2 \quad .$$

Da nun nach 2)

$$\zeta' = \frac{n\,c}{2} \cdot \frac{\operatorname{tang}^{n-1}\tfrac{1}{2}\delta}{\cos^2\tfrac{1}{2}\delta} = \frac{n\,c}{2} \cdot \frac{\sin^{n-1}\tfrac{1}{2}\delta}{\cos^{n+1}\tfrac{1}{2}\delta} \quad ,$$

so ergibt sich

$$\text{3)} \qquad S = \frac{n^2 c^2}{4} \cdot \frac{\sin^{2n-2}\tfrac{1}{2}\delta}{\cos^{2n+2}\tfrac{1}{2}\delta} \quad .$$

Soll in den Rand-Polabständen α und β gleiches Flächenverhältnis sein, so muß

$$\frac{\sin^{2n-2}\tfrac{1}{2}\alpha}{\cos^{2n+2}\tfrac{1}{2}\alpha} = \frac{\sin^{2n-2}\tfrac{1}{2}\beta}{\cos^{2n+2}\tfrac{1}{2}\beta} \quad ,$$

$$\frac{\operatorname{tang}^{2n-2}\tfrac{1}{2}\alpha}{\operatorname{tang}^{2n-2}\tfrac{1}{2}\beta} = \frac{\cos^4\tfrac{1}{2}\alpha}{\cos^4\tfrac{1}{2}\beta} \quad .$$

Hieraus ergibt sich für n die Gleichung

$$\text{4)} \qquad (n-1)\, l \frac{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha}{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta} = 2\, l \frac{\cos\tfrac{1}{2}\alpha}{\cos\tfrac{1}{2}\beta} \quad .$$

Für das vorkommende kleinste Flächenverhältnis (die größte Abweichung von der Einheit) ist

$$\frac{d\, l\, S^{\frac{1}{2}}}{d\delta} = 0 \quad ,$$

d. i.

$$(n-1) \cdot \frac{\cos\tfrac{1}{2}\delta}{\sin\tfrac{1}{2}\delta} + (n+1)\frac{\sin\tfrac{1}{2}\delta}{\cos\tfrac{1}{2}\delta} = 0 \quad ,$$

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\delta = \frac{1-n}{1+n} \quad ,$$

folglich

$$\cos\delta = n \quad ;$$

führt man dies in S ein, so erhält man

$$S_{\min} = \frac{n^2 c^2}{4} \cdot \frac{\operatorname{tang}^{2n-2}\tfrac{1}{2}\delta}{\cos^4\tfrac{1}{2}\delta} = \frac{n^2 c^2}{4} \cdot \left(\frac{1+n}{1-n}\right)^{1-n} \cdot \frac{4}{(1+n)^2} \quad .$$

$$= \frac{n^2 c^2}{(1-n)^{1-n} \cdot (1+n)^{1+n}} \quad .$$

6. Auch dieser Entwurf ist eine Schöpfung LAMBERTS, Anmerkungen und Zusätze u. s. w., OSTWALDS Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 54, § 47 bis 56, S. 24 u. ff.; über die Konstante verfügte LAMBERT in § 51 und § 53 in andrer Weise, als es oben geschehen ist, in § 53 nämlich so, daß zwei Breitenkreise sich längentreu abbilden (oder nach BREUSINGS Ausdruck, mit Abweitungstreue in zwei Polabständen).

Man sehe DEBES, Nr. 12a Europa, Flüsse und Gebirge, 12b Europa, politische und Verkehrsübersicht, 12c Europa, Sprachen und Völker, 1 : 12000000, geradständig; Nr. 39, Nordasien, 1 : 15000000; Nr. 40, Westasien, 1 : 10000000; Nr. 42, Südasien, 1 : 10000000; Nr. 44, Ostasien, 1 : 10000000; Nr. 46, die Atlasländer, 1 : 10000000; Nr. 52, Australien und Polynesien, 1 : 27000000; Nr. 55, Vereinigte Staaten mit den angrenzenden Teilen von Britisch Nordamerika und Mexiko, 1 : 10000000; Nr. 59, Mittleres Südamerika, 1 : 11000000, diese alle ebenfalls geradständig; Nr. 49, Westafrika, 1 : 10000000, zwischenständig, Projektionspol 10° südl. Br. und 5° westl. L. v. Gr.

Auf der Tafel 14 findet sich der Entwurf geradständig für Australien (nach DEBES Nr. 52), auf Tafel 15 zwischenständig für Westafrika (nach DEBES Nr. 49).

7. PTOLEMÄUS' speichentreuer Kegelentwurf. Die Abbildung erfolgt auf einen Kegel, der die verjüngte Erdkugel entlang des mittlern Breitenkreises des dargestellten Gebietes berührt; dieser Kreis, sowie die Meridiane werden längentreu dargestellt.

Ist γ der Polabstand der Gebietsmitte, so sind die Gleichungen des Entwurfs

$$1)\qquad \zeta = \operatorname{tang}\gamma - \gamma + \delta\,, \qquad \lambda_1 = \sin\gamma \cdot \lambda\quad .$$

Die Halbachsen des Maßzugs sind

$$a = \zeta' = 1\,, \qquad b = \frac{\cos\gamma\,(\operatorname{tang}\gamma - \gamma + \delta)}{\sin\delta} = \frac{\sin\gamma - \gamma\cos\gamma + \delta\cos\gamma}{\sin\delta}\,,$$

daher ist das Flächenverhältnis

$$2)\qquad S = \frac{\sin\gamma - \gamma\cos\gamma + \delta\cos\gamma}{\sin\delta}$$

und der Sinus der halben größten Winkelverzerrung

$$3)\qquad \sin w = \frac{\sin\delta - \sin\gamma + (\gamma - \delta)\cos\gamma}{\sin\delta + \sin\gamma - (\gamma - \delta)\cos\gamma}\quad .$$

8. Eine bessere Verteilung der Verzerrungen erzielt man, wenn man davon absieht, daß der Kegel die verjüngte Erdkugel berührt, indem man die Entwurfsgleichungen benutzt

$$1)\qquad \zeta = m + \delta\,, \qquad \lambda_1 = n\lambda\quad ,$$

und die Zahlen m und n so bestimmt, daß geeignete Bedingungen erfüllt werden. Man hat hier

$$2)\qquad a = 1\,, \qquad b = \frac{n\zeta}{\sin\delta} = \frac{n(m+\delta)}{\sin\delta}\quad .$$

Für das Flächenverhältnis und die Winkelverzerrung hat man

$$3)\qquad S = \frac{n(m+\delta)}{\sin\delta}\,, \qquad \sin w = \frac{\sin\delta - n(m+\delta)}{\sin\delta + n(m+\delta)}\quad .$$

Flächentreue und Winkeltreue treten hier daher immer an derselben Stelle auf, nämlich unter der Bedingung

$$4)\qquad \sin\delta = n(m+\delta)\quad .$$

Wird nun verlangt, daß die Verzerrungen an den Rändern gleich sind, so ergibt sich für m die Bedingung

$$\frac{m+\alpha}{\sin\alpha} = \frac{m+\beta}{\sin\beta} \quad ,$$

und hieraus folgt

$$5) \qquad m = \frac{\beta\sin\alpha - \alpha\sin\beta}{\sin\beta - \sin\alpha}\,, \qquad \frac{m+\alpha}{\sin\alpha} = \frac{m+\beta}{\sin\beta} = \frac{\beta-\alpha}{\sin\beta - \sin\alpha} \quad .$$

Die Halbachse b des Maßzugs und damit die Verzerrungen erhalten ihren kleinsten Wert für den Polabstand γ, der aus der Gleichung folgt

$$\sin\gamma - (m+\gamma)\cos\gamma = 0 \quad ,$$

daher ergibt sich für γ

$$6) \qquad \operatorname{tang}\gamma - \gamma = m \quad .$$

Zur Auflösung dieser Gleichung kann man des Verfassers fünfstellige Logarithmentafel*) benutzen, die auf Seite 54—56 die Zahlen Arcus, Sinus und Tangente in nebeneinander stehenden Spalten enthält; durch Vergleich der Arcusspalte mit der Tangentenspalte findet man die Auflösung von 6) mit geringer Mühe bis auf 10′ genau, und dann bis auf 1′ durch gewöhnliche geradlinige Einschaltung.

Der kleinste Wert für b ist

$$7) \qquad b_\gamma = \frac{n\operatorname{tang}\gamma}{\sin\gamma} = \frac{n}{\cos\gamma} \quad .$$

Sollen nun die in γ herrschenden Verzerrungen denen an den Rändern entgegengesetzt gleich sein, so ergibt sich für n die Bedingung

$$b_\gamma = \frac{1}{b_\alpha}\,, \qquad n\sec\gamma = \frac{\sin\alpha}{n(k+\alpha)} = \frac{\sin\beta - \sin\alpha}{n(\beta-\alpha)} \quad .$$

Hieraus folgt die zweite wesentliche Zahl des Entwurfs zu

$$8) \qquad n = \sqrt{\frac{\cos\gamma(\sin\beta - \sin\alpha)}{\beta-\alpha}} \quad .$$

Mit Hilfe dieses Wertes hat man für die größten Verzerrungen

$$9) \qquad b = \frac{n(\beta-\alpha)}{\sin\beta - \sin\alpha} = \frac{\cos\gamma}{n}\,, \qquad S = b = \frac{\cos\gamma}{n}\,, \qquad \sin w = \frac{n-\cos\gamma}{n+\cos\gamma} \quad .$$

Die Polabstände ε_1 und ε_2, in denen keine Verzerrungen stattfinden, ergeben sich als Wurzeln der Gleichung

$$10) \qquad \frac{n(m+\varepsilon)}{\sin\varepsilon} = 1\,, \qquad \frac{1}{n}\sin\varepsilon - \varepsilon = m \quad .$$

Um sie aufzulösen, schreibt man für eine zwischen α und β enthaltene, von Grad zu Grad fortschreitende Reihe von Winkeln φ die Spalten auf

$$\log\sin\varphi + \log\frac{1}{n}\,, \qquad \frac{1}{n}\sin\varphi\,, \qquad \operatorname{arc}\varphi\,, \qquad \frac{1}{n}\sin\varphi - \operatorname{arc}\varphi \quad .$$

Aus dieser Hilfstafel erhält man die Wurzeln von 10) bis auf 1° genau, und durch gewöhnliche Einschaltung dann die genügend genauen Auflösungen. In der Hilfstafel muß der Mindestwert von

$$\frac{1}{n}\sin\varphi - \operatorname{arc}\varphi$$

dem Werte $\varphi = \gamma$ entsprechen.

*) HEGER, Fünfstellige Logarithmen, Leipzig, TEUBNER 1900.

9. Wendet man diese Formeln auf Gebiete an, die 39° mittlern Polabstand, entsprechend dem Deutschen Reiche, haben, so erhält man:

$$1) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} & \alpha = 36^0 , & \beta = 42^0 \quad , \\ m = 0{,}12823 \, , & \gamma = 38^0 \, 55',3 \, , & n = 0{,}77732 \quad , \\ & S_\gamma = 1{,}00076 \, , & w_\gamma = 0^0 \, 1' \, 20'' \quad ; \end{array} \right.$$

$$2) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} & \alpha = 35^0 , & \beta = 43^0 \quad , \\ m = 0{,}12774 \, , & \gamma = 38^0 \, 54',3 \, , & n = 0{,}77738 \quad , \\ & S_\gamma = 1{,}0011 \, , & w_\gamma = 0^0 \, 1' \, 53'' \quad ; \end{array} \right.$$

$$3) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} & \alpha = 34^0 , & \beta = 44^0 \quad , \\ m = 0{,}12697 \, , & \gamma = 38^0 \, 48',7 \, , & n = 0{,}77770 \quad , \\ & S_\gamma = 1{,}00194 \, , & w_\gamma = 0^0 \, 3' \, 15'' \quad . \end{array} \right.$$

Man kann daher sicher für den zweiten Fall, aber unbedenklich auch für den dritten die Abbildung praktisch als grundrißtreu, d. i. als flächen- und winkeltreu, bezeichnen. Man würde zu nahezu demselben Ergebnisse gelangt sein, wenn man auf die Gebiete einen geradständigen flächentreuen oder winkeltreuen Entwurf angewendet hätte; im ersten Falle wäre die Winkelverzerrung, im andern die Flächenverzerrung etwas größer ausgefallen als bei dem obigen vermittelnden Entwurfe.

10. Einen echten Kegelentwurf mit zwei längentreuen Breitenkreisen hat schon MERCATOR 1585 verwendet; DE L'ISLE (oder DE LISLE, 1688—1768) legte ihn der von ihm entworfenen Karte des russischen Reiches zugrunde und glaubte die Verzerrungen möglichst zu mildern, indem er die beiden längentreuen Breitenkreise vom nördlichsten und südlichsten des Gebietes um den vierten Teil der gesamten Breitenausdehnung entfernt annahm. LEONHARD EULER stellt 1777 (De projectione geographica DE LISLIANA etc., deutsch von WANGERIN in OSTWALDS Klassikern der exakten Wissenschaften, Nr. 93, S. 53) die Forderung gleicher Verzerrungen an den Rändern und entgegengesetzt gleicher Meistverzerrung im Innern der Karte auf, versteht aber unter Verzerrung nicht das Verhältnis eines Längengradbildes zur wahren Größe, sondern den Unterschied beider Strecken, und verwendet außerdem im Verlaufe seiner Rechnung die nur als grobe Annäherung zu bezeichnende Annahme, daß die innere Meistverzerrung in der mittlern Breite stattfinde. EULER wendet seine Formeln auf die Karte des russischen Reiches an, begrenzt von 70° und 40° Breite, entsprechend also $\alpha = 20^0$ und $\beta = 50^0$ in unsern Entwicklungen. Die obigen Formeln ergeben dann

$$m = 0{,}07325 \, , \quad \gamma = 32^0 \, 58',3 \, , \quad b_\alpha = b_\beta = 1{,}0178 \quad .$$

E. DEBES, Nr. 11, Mittelländisches Meer, 1 : 8250000; Nr. 13, Mittel-Europa, Verkehrskarte, 1 : 3500000; Nr. 56, Östliche Vereinigte Staaten, 1 : 20000000.

Die Karten des Deutschen Reiches und seiner Teile und andrer Gebiete von ähnlicher Ausdehnung sind bei DEBES, wie bei ANDREE und SPAMER in Kegelentwürfen ausgeführt; innerhalb der Grenzen der Karte ist es bei dieser großen Anzahl Karten gleichgültig, ob der Entwurf ursprünglich als flächentreuer oder winkeltreuer oder irgendwie vermittelnder gedacht worden ist.

Die Tafeln 16 und 17 geben PTOLEMÄUS' speichentreuen Kegelentwurf nach SPAMER Nr. 23/24, und DE L'ISLES Entwurf nach DEBES Nr. 13.

11. Kegelentwürfe für Zonen von mäßiger Breite, begründet auf Reihenentwicklung. Ist v der Meridianbogen zwischen dem Punkte P des Gebietes und einem gewissen mittlern Breitenkreise, dessen Polabstand δ_0 sei, so daß also

$$\delta = \delta_0 + v \quad ,$$

so setzen wir

$$1)\qquad \zeta = A + Bv + Cv^2 + Dv^3 + \dots$$

Ferner sei

$$\lambda_1 = n\lambda \quad .$$

Da man hat

$$\sin\delta = \sin(\delta_0 + v) = \sin\delta_0 + \cos\delta_0 \cdot v - \tfrac{1}{2}\sin\delta_0\, v^2 - \tfrac{1}{6}\cos\delta_0\, v^3 + \dots$$

$$\frac{1}{\sin\delta} = \frac{1}{\sin\delta_0}[1 - \cot\delta_0\, v + (\tfrac{1}{2} + \cot^2\delta_0)v^2 + \dots] \quad ,$$

so folgt für die Halbachsen des Maßzugs

$$2)\qquad \begin{cases} a = B + 2Cv + 3Dv^2 + \dots \quad , \\ b = \dfrac{n}{\sin\delta_0}(A + Bv + Cv^2 + \dots)[1 - \cot\delta_0\, v + (\tfrac{1}{2} + \cot^2\delta_0)v^2 + \dots] \quad . \end{cases}$$

Wir wollen nun zunächst verlangen, daß die Abbildung entlang des Mittelparallels δ_0 flächen- und winkeltreu, daß also $a = b = 1$ für $v = 0$ sei. Hieraus folgt

$$3)\qquad nA = \sin\delta_0\,, \quad B = 1 \quad .$$

Es werde ferner verlangt, daß a und b keine Glieder enthalten, die für v von der ersten Ordnung sind. Dies führt zunächst auf die Bedingung

$$4)\qquad C = 0 \quad .$$

Setzt man dies in b ein, so erhält man

$$b = \frac{n}{\sin\delta_0}(A + v + \dots)(1 - \cot\delta_0\, v + \dots) \quad .$$

In Rücksicht auf 3) ergibt dies

$$b = 1 - \left(\frac{n}{\sin\delta_0} - \cot\delta_0\right)v + \dots$$

Daher folgt

$$5)\qquad n = \cos\delta_0 \quad ,$$

$$6)\qquad \begin{cases} a = 1 + 3Dv^2 + \dots \\ b = 1 + \tfrac{1}{2}v^2 + \dots \end{cases}$$

Man kann daher die Längenverzerrung b in der Richtung der Breitenkreise nicht auf Größen dritter Ordnung herabdrücken. Für das Längenverhältnis a im Meridiane ist es dagegen möglich, indem man $D = 0$ setzt; nimmt man auch $E = F = \dots = 0$, bildet also den Meridian längentreu ab, so kommt man auf die Abbildungsformeln

$$\zeta = \operatorname{tang}\delta_0 + v\,, \quad \lambda_1 = \cos\delta_0 \cdot \lambda \quad ,$$

d. i. auf den speichentreuen Entwurf des Ptolemäus (Nr. 7).

Bevorzugt man die Flächentreue, so muß das Flächenverhältnis

$$S = ab = 1 + (\tfrac{1}{2} + 3D)v^2 + \dots$$

der Einheit möglichst nahe sein; man erniedrigt die Abweichung auf Größen dritter Ordnung, wenn man wählt

$$7)\qquad D = -\tfrac{1}{6} \quad ,$$

also die Entwurfsgleichungen benutzt

$$8)\qquad \zeta = \operatorname{tang}\delta_0 + v - \tfrac{1}{6}v^3\,, \quad \lambda_1 = \cos\delta_0 \cdot \lambda \quad .$$

Für die Winkelverzerrung hat man hier, wenn man von Größen höherer Ordnung absieht

$$9)\qquad \sin w = -\frac{v^2}{2} \quad .$$

Bevorzugt man dagegen die Winkeltreue, so hat man $a - b$ möglichst klein zu halten. Da nun

$$a - b = (3D - \tfrac{1}{2})v^2 + \dots \quad ,$$

so wird dies auf Größen dritter Ordnung herabgedrückt, wenn man

$$10) \qquad D = \tfrac{1}{6}$$

nimmt. Alsdann hat man die Entwurfsgleichungen

$$11) \qquad \zeta = \operatorname{tang}\delta_0 + v + \tfrac{1}{6}v^3 \,, \quad \lambda_1 = \cos\delta_0 \cdot \lambda \quad ,$$

und für das Flächenverhältnis folgt

$$S = (1 + \tfrac{1}{2}v^2 + \dots)(1 + \tfrac{1}{2}v^2 + \dots) \quad ,$$

also

$$12) \qquad S = 1 + v^2 \quad ,$$

wenn man nicht über die Größen zweiter Ordnung hinausgeht.

Will man in angemessener Weise zwischen beiden Forderungen — möglichst großer Flächen- und Winkeltreue — die Mitte halten, indem man den Mittelwert aus den Formeln 8) und 11) benutzt, so kommt man wieder zu PTOLEMÄUS Entwurf, der also nicht bloß durch die Einfachheit seiner Herstellung, sondern auch als gut vermittelnder Entwurf empfohlen ist.

12. BONNES Entwurf. Dieser Entwurf kann als unecht konischer hier angeschlossen werden. Der Mittelmeridian hat als Bild eine Gerade, die Bilder der Breitenkreise sind Kreise, die von demselben Punkte des Mittelmeridianbildes aus beschrieben werden. Der Halbmesser für das Bild des Mittelparallels ist $\cot\varphi_0$, wenn φ_0 die zugehörige Breite ist; die Bilder der übrigen Breitenkreise schneiden das Bild des Mittelmeridians längentreu; die Breitenkreise werden längentreu abgebildet. Zufolge der letztern, für den Entwurf wesentlichen Bestimmung, sind die Meridianbilder, den Mittelmeridian ausgenommen, keine Geraden, sondern krumme Linien, die nach dem Pole zu enger zusammentreten.

Nimmt man die Mitte O der Parallelkreisbilder als Nullpunkt und das Bild des Nullmeridians als Abscissenachse, so hat das Bild P_1 des Punktes φ, λ die Polarkoordinaten

$$1) \qquad \varrho = \cot\varphi_0 + \varphi_0 - \varphi \,, \quad \psi = \frac{\cos\varphi}{\varrho}\,\lambda \quad ,$$

und daher die rechtwinkligen

$$2) \qquad x_1 = \varrho\cos\psi \,, \quad y_1 = \varrho\sin\psi \,, \quad z_1 = 0 \quad .$$

Hieraus folgt

$$3) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial\varphi} = -\cos\varphi - \varrho\sin\psi\dfrac{\partial\psi}{\partial\varphi} \,, & \dfrac{\partial y_1}{\partial\varphi} = -\sin\psi + \varrho\cos\psi\dfrac{\partial\psi}{\partial\varphi} \quad , \\[2ex] \dfrac{\partial x_1}{\partial\lambda} = -\varrho\sin\psi\dfrac{\partial\psi}{\partial\lambda} \,, & \dfrac{\partial y_1}{\partial\lambda} = \varrho\cos\psi\dfrac{\partial\psi}{\partial\lambda} \quad , \end{cases}$$

wobei

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \frac{\cos\varphi - \varrho\sin\varphi}{\varrho^2}\,\lambda \,, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = \frac{\cos\varphi}{\varrho} \quad .$$

Daher ist

$$e_1 = 1 + \varrho^2 \cdot \left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2 , \quad f_1 = \varrho^2 \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} \,, \quad g_1 = \varrho^2 \cdot \left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)^2 .$$

Da nun für die Kugel

$$e = 1 \,, \quad f = 0 \,, \quad g = \cos^2\varphi \quad ,$$

so ist das Flächenverhältnis

$$4)\quad \begin{cases} S = \sqrt{\frac{e_1 g_1 - f_1^2}{e g}} = \sqrt{\frac{\left[1 + \varrho^2\left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\right)^2\right] \cdot \varrho^2\left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}\right)^2 - \left(\varrho^2 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}\right)^2}{\cos^2\varphi}} \\ = \frac{\varrho}{\cos\varphi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 1 \quad . \end{cases}$$

Der BONNEsche Entwurf ist also **flächentreu**.

Die Längenverhältnisse a_1 und b_1 in Richtung der Parameterkurven sind konjugierte Halbmesser des Maßzugs; ist μ ihr Schnittwinkel, so hat man nach bekannten Eigenschaften der Ellipse

$$5)\qquad a \mp b = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 \mp 2\, a_1 b_1 \sin\mu_1} \quad .$$

Da nun

$$\cos\mu_1 = \frac{f_1}{\sqrt{e_1 g_1}} = \frac{\varrho \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}}{\sqrt{1 + \varrho^2\left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\right)^2}}, \quad \sin\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \varrho^2\left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\right)^2}} \quad ,$$

$$a_1^2 = 1 + \varrho^2\left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\right)^2, \quad b_1 = 1 \quad ,$$

so folgt

$$a - b = \varrho \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad a + b = 4 + \varrho^2\left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\right)^2 \quad ,$$

$$\operatorname{tang} w = \tfrac{1}{2} \varrho \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \frac{\cos\varphi - \varrho \sin\varphi}{2\varrho} \cdot \lambda \quad .$$

Hiernach ist Abbildung an den Stellen winkeltreu, für die entweder $\lambda = 0$ oder $\varrho = \cot\varphi$ ist, d. i. im Mittelmeridian, sowie im Mittelparallel, in der Breite φ_0.

13. Dieser Entwurf steht in engem Zusammenhange mit dem zweiten Kegelentwurfe des PTOLEMÄUS (über die beiden Kegelentwürfe des PTOLEMÄUS vergleiche man GRETSCHEL, Lehrbuch der Kartenprojektion, § 15, Nr. 7 und § 16, Nr. 2). Die durch mancherlei Wandlungen in den gegenwärtigen Zustand gebrachte Abbildung empfahl 1752 der Geograph BONNE, nach dem sie benannt wurde. Sie wird immer noch in den gangbaren Atlanten am öftersten angewendet, obgleich ihr andre flächentreue, oder den Umständen angemessen ausgewählte vermittelnde Entwürfe in vielen Fällen vorzuziehen wären.

DEBES, Nr. 14—31, Nr. 33—37, Nr. 41. ANDREE, S. 21/22, Europa; S. 121/122, Asien; S. 156/157, Nordamerika; S. 174/175, Südamerika; S. 117, 120, Westrußland; S. 111, 114, Balkanländer u. a. m.

Tafel 18 enthält einen BONNEschen Entwurf für Deutschland (nach SPAMER Nr. 15/16).

14. Auch an dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß bei Herstellung eines quer- oder zwischenständigen Kegelentwurfs die rechnerische Änderung der Koordinaten durch Zeichnung eines geeigneten stereographischen Entwurfs ersetzt werden kann (vgl. § 3, Nr. 15, sowie § 4, Nr. 15).

§ 6. Flächentreue Abbildung des abgeplatteten Umdrehungsellipsoids auf die Ebene.

1. Betrachtet man die mathematische Erdoberfläche als ein abgeplattetes Umdrehungsellipsoid, so stellt man von ihr zunächst ein ähnliches, verkleinertes Abbild her, und nimmt den Maßstab der Karte als Ähnlichkeitsverhältnis. Der Halbmesser des Gleichers dieser verjüngten Erde E gilt als Längen-

einheit. Die Meridiane von E sind Ellipsen mit der Hauptachse 2 und der Nebenachse $\sqrt{1-\varepsilon^2}$, wenn ε die numerische Excentrizität ist.

Die geographische Breite φ eines Punktes P ist der Winkel, den in P die Lotlinie der durch P gehenden Meridianellipse mit dem Gleicher bildet; sind r und z die rechtwinkligen Koordinaten von P in Bezug auf die Achsen dieser Ellipse, so ist bekanntlich

$$1)\qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{a^2 z}{b^2 r} = \frac{z}{(1-\varepsilon^2) r} \quad .$$

Die Koordinaten von P im Raume sind

$$x = r\cos\lambda\,,\quad y = r\sin\lambda\,,\quad z = z \quad ;$$

da nun aus 1) und der Ellipsengleichung folgt

$$2)\qquad r = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}\,,\quad z = \frac{(1-\varepsilon^2)\sin\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}} \quad ,$$

so ist

$$3)\qquad x = \frac{\cos\varphi\cos\lambda}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}\,,\quad y = \frac{\cos\varphi\sin\lambda}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}\,,\quad z = \frac{(1-\varepsilon^2)\sin\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}} \quad .$$

Hieraus folgt weiter

$$4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} = -\dfrac{(1-\varepsilon^2)\sin\varphi\cos\lambda}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}^3}\,, & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} = -\dfrac{(1-\varepsilon^2)\sin\varphi\sin\lambda}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}^3}\,, \quad \dfrac{\partial z}{\partial\varphi} = \dfrac{(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}^3}\,, \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial\lambda} = -\dfrac{\cos\varphi\sin\lambda}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}\,, & \dfrac{\partial y}{\partial\lambda} = \dfrac{\cos\varphi\cos\lambda}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}\,, \quad \dfrac{\partial z}{\partial\lambda} = 0 \quad , \\[2ex] e = \dfrac{(1-\varepsilon^2)^2}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^3}\,, & f = 0\,, \quad g = \dfrac{\cos^2\varphi}{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi} = r^2 \quad . \end{cases}$$

Für die Zwecke der Herstellung geographischer Karten kann man ε^4 und höhere Potenzen von ε vernachlässigen, und hat unter dieser Beschränkung der Genauigkeit

$$5)\qquad e = 1 - \varepsilon^2(2 - 3\sin^2\varphi)\,,\quad f = 0\,,\quad g = \cos^2\varphi\,(1 + \varepsilon^2\sin^2\varphi) \quad .$$

Wir beschränken uns hier zunächst auf die Betrachtung **geradständiger** Entwürfe.

2. Für einen **echten ebenen Entwurf** ist (§ 3, Nr. 1, 6)), auch wenn φ statt δ als Parameter genommen wird,

$$1)\qquad e_1 = \varrho'^2\,,\quad f_1 = 0\,,\quad g_1 = \varrho^2 \quad ;$$

das Flächenverhältnis ist daher

$$S = \frac{-\varrho\varrho'}{\cos\varphi\sqrt{[1-\varepsilon^2(2-3\sin^2\varphi)]\cdot(1+\varepsilon^2\sin^2\varphi)}} = -\frac{\varrho\varrho'(1+\varepsilon^2\cos 2\varphi)}{\cos\varphi} \quad ,$$

wobei das negative Zeichen vorgesetzt werden muß, weil ϱ' mit wachsendem φ negativ ist. Setzt man, um in Übereinstimmung mit § 3 zu kommen,

$$\varphi = 90^0 - \delta \quad ,$$

so erhält man als Bedingung der Flächentreue

$$\varrho\frac{d\varrho}{d\delta} = \sin\delta\,(1 + \varepsilon^2\cos 2\,\delta) \quad ,$$

woraus durch Integration folgt

$$\varrho^2 = -2\cos\delta + 2\,\varepsilon^2\!\int\!\sin\delta\cos 2\,\delta\, d\delta \quad .$$

Da nun bekanntlich

$$2\int \sin\delta \cos 2\,\delta\, d\delta = \int [\sin(2\,\delta + \delta) - \sin(2\,\delta - \delta)]\, d\delta$$
$$= \cos\delta - \tfrac{1}{3}\cos 3\,\delta \quad ,$$

so hat man schließlich, wenn C die Integrationskonstante bezeichnet,

$$2) \qquad \varrho^2 = C - 2\cos\delta + \frac{\varepsilon^2}{3}(3\cos\delta - \cos 3\,\delta) \quad .$$

Verlangt man, daß $\varrho = 0$, wenn $\delta = 0$ ist, so muß man nehmen

$$3) \qquad C = 2 - \frac{2\,\varepsilon^2}{3} \quad ,$$

und hat also

$$\varrho^2 = 4\sin^2\frac{\delta}{2} - \frac{2\,\varepsilon^2}{3}\left(3\sin^2\frac{\delta}{2} - \sin^2\frac{3\,\delta}{2}\right) \quad ,$$

woraus folgt

$$\varrho = 2\sin\frac{\delta}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right) + \frac{\varepsilon^2}{6}\sin^2\frac{3\,\delta}{2}\operatorname{cosec}\frac{\delta}{2} \quad .$$

Für die Winkelverzerrung kann man jedenfalls bei mäßig ausgedehnten Kappen, unbedenklich aber auch bei größern, dieselben Formeln benutzen, die für die Abbildung der Kugel, für $\varepsilon = 0$, aufgestellt worden sind; denn die Abweichungen von den richtigen Verzerrungen sind von der Ordnung ε^2, und Schwankungen in den Verzerrungen, die diesen unbedeutenden Betrag haben, sind praktisch einflußlos.

Ebenso kann man für Zonen um den Pol herum die in § 3, Nr. 5 getroffene Bestimmung der Integrationskonstanten auch hier ohne Änderung verwenden. Man wird dann die dort bezweckte günstige Verteilung der Winkelverzerrungen nicht genau erreichen, aber doch ihr so nahe kommen, daß man sich dabei vollständig befriedigen kann.

3. Flächentreuer Säulenentwurf. Nach § 4, Nr. 1 hat man hier

$$x_1 = n\cos\lambda\,, \quad y_1 = n\sin\lambda\,, \quad z_1 = \zeta \quad ,$$
$$e_1 = \zeta'^2\,, \quad f_1 = 0\,, \quad g_1 = n^2 \quad .$$

Das Flächenverhältnis ist hiernach (vgl. Nr. 2 zu Anfang)

$$S = \frac{n\,\zeta'(1 + \varepsilon^2\cos 2\,\varphi)}{\cos\varphi} \quad .$$

Die Differentialgleichung für Flächentreue folgt hieraus zu

$$n\,\zeta' = \cos\varphi(1 - \varepsilon^2\cos 2\,\varphi) \quad ,$$

woraus man durch Integration erhält

$$\zeta = C + \frac{1}{n}\sin\varphi - \frac{\varepsilon^2}{n}\int \cos\varphi\cos 2\,\varphi\, d\varphi \quad ,$$
$$= C + \frac{1}{n}\sin\varphi - \frac{\varepsilon^2}{2\,n}\int (\cos\varphi + \cos 3\,\varphi)\, d\varphi \quad ,$$
$$= C + \frac{1}{n}\sin\varphi - \frac{\varepsilon^2}{6\,n}(3\sin\varphi + \sin 3\,\varphi) \quad .$$

Man wird immer $\zeta = 0$ für $\varphi = 0$ verlangen, also $C = 0$ nehmen; setzt man für den einfachsten Fall $n = 1$, so folgt die Entwurfsgleichung

$$\zeta = \sin\varphi - \frac{\varepsilon^2}{6}(3\sin\varphi + \sin 3\,\varphi) \quad .$$

Wählt man nicht $n = 1$, sondern in Übereinstimmung mit den Formeln von § 4, Nr. 3, so erhält man, wie im vorigen Falle, nicht ganz genau die Erfüllung der dort gestellten Bedingungen, aber jedenfalls eine für alle praktischen Zwecke weitaus genügende Annäherung. Ebenso kann man auch hier für die Winkelverzerrungen dieselben Formeln wie in § 4, Nr. 3 verwenden.

4. Bei SANSON-FLAMSTEEDS unechtem Säulenentwurfe (§ 4, Nr. 14) hat man in Rücksicht auf Abplattung für x_1 den Wert r (Nr. 1, 2)) und für y_1 den Meridianbogen zu nehmen, dessen Differential ist

$$ds = \sqrt{dr^2 + dz^2} \quad .$$

Da nun

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{(1-\varepsilon^2)\sin\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}^3}\,, \quad \frac{dz}{d\varphi} = \frac{(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}^3}\,,$$

so folgt

$$1)\quad \frac{ds}{d\varphi} = \frac{1-\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}^3} = 1 - \varepsilon^2 + \frac{3\,\varepsilon^2}{2}\sin^2\varphi = 1 - \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 - \tfrac{3}{4}\varepsilon^2 \cdot \cos 2\varphi \quad .$$

Hieraus folgt, wenn man den Bogen vom Gleicher aus rechnet,

$$s = (1 - \tfrac{1}{4}\varepsilon^2)\varphi - \tfrac{3}{8}\varepsilon^2 \sin 2\varphi \quad .$$

Die Koordinaten des Bildes von λ, φ sind daher

$$x_1 = \lambda\cos\varphi(1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\sin^2\varphi)\,, \quad y_1 = (1 - \tfrac{1}{4}\varepsilon^2\varphi) - \tfrac{3}{8}\varepsilon^2\sin 2\varphi \quad .$$

5. Flächentreuer Kegelentwurf. Für die Koordinaten eines Punktes P auf der verjüngten Erde benutzen wir die Formeln

$$x = \frac{\sin\delta\cos\lambda}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\delta}}\,, \quad y = \frac{\sin\delta\sin\lambda}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\delta}}\,, \quad z = \frac{(1-\varepsilon^2)\cos\delta}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\delta}}\,,$$

$$e = 1 - \varepsilon^2(2 - 3\cos^2\delta)\,, \quad f = 0\,, \quad g = \sin^2\delta(1 + \varepsilon^2\cos^2\delta) \quad ;$$

und für die Koordinaten des Bildes P_1 (§ 5, Nr. 1))

$$x_1 = n\,\zeta\cos\lambda\,, \quad y_1 = n\,\zeta\sin\lambda\,, \quad z_1 = \sqrt{1-n^2}\cdot\zeta \quad ,$$

$$e_1 = \zeta'^2\,, \quad f_1 = 0\,, \quad g_1 = n^2\zeta^2 \quad .$$

Das Flächenverhältnis ist daher

$$S = \frac{n\,\zeta\,\zeta'}{\sin\delta\sqrt{1-\varepsilon^2(2-3\cos^2\delta)(1+\varepsilon^2\cos^2\delta)}} = \frac{n\,\zeta\,\zeta'}{\sin\delta}(1 - \varepsilon^2\cos 2\,\delta) \quad .$$

Die Gleichung für die flächentreue Abbildung ist daher

$$\zeta^2 = \frac{2}{n}\int(\sin\delta + \varepsilon^2\sin\delta\cos 2\,\delta)\,d\delta \quad ,$$

woraus folgt, wenn m eine Konstante bezeichnet

$$1)\qquad \zeta = \sqrt{\frac{2}{n}}\sqrt{m - \cos\delta + \tfrac{1}{6}\varepsilon^2(3\cos\delta - \cos 3\,\delta)} \quad .$$

Soll die Kegelspitze das Bild des Poles sein, so müssen sich $\delta = 0$ und $\zeta = 0$ entsprechen; hierzu gehört

$$m = 1 - \tfrac{1}{3}\varepsilon^2 \quad ,$$

und (vgl. Nr. 2, 4))

$$2)\qquad \zeta = \frac{2}{\sqrt{n}}\sin\tfrac{1}{2}\delta - \frac{\varepsilon^2}{3\sqrt{n}}\sin 2\,\delta\cos\tfrac{1}{2}\delta \quad .$$

Für Kegelentwürfe, bei denen der Pol als Parallelkreis abgebildet wird, kann man neben 1) die Formeln § 5, Nr. 3, a) bis e) benutzen, und wird damit zwar keine vollständige, aber doch eine beinahe vollständige Erfüllung der dort gestellten Forderungen erreichen.

6. Bonnes **Entwurf mit Rücksicht auf Abplattung.** Die Koordinaten des Punktes φ, λ der Karte sind (§ 5, Nr. 2)

$$1)\qquad x_1 = \varrho\cos\psi\,,\qquad y_1 = \varrho\sin\psi\quad,$$

dabei ist, wenn s den Meridianbogen vom Gleicher bis zur Breite φ und ϱ_0 das Stück Tangente der Meridianellipse bezeichnet, das zwischen der Erdachse und der Breite φ_0 enthalten ist,

$$2)\qquad \varrho = \varrho_0 - s_0 + s\,,\qquad \psi = \frac{r\lambda}{\varrho}\,,\qquad r = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}\quad.$$

Aus 1) und 2) folgt, wie a. a. O.,

$$\frac{\partial x_1}{\partial\varphi} = \varrho'\cos\psi - \varrho\sin\psi\cdot\psi'\quad,$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial\varphi} = \varrho'\sin\psi + \varrho\cos\psi\cdot\psi'\quad,$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial\lambda} = -r\sin\psi\,,\qquad \frac{\partial y_1}{\partial\lambda} = r\cos\psi\quad,$$

wobei ϱ' und ψ' Differentialquotienten nach φ bedeuten. Hieraus folgt wie oben

$$e_1 = \varrho'^2 + \varrho^2\psi'^2\,,\qquad f_1 = \varrho\psi' r\,,\qquad g_1 = r^2\quad.$$

Da nun ferner nach Nr. 1 und Nr. 4, 1)

$$eg = \frac{(1-\varepsilon^2)^2\cos^2\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^4} = r^2\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2$$

und

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{ds}{d\varphi}\quad,$$

so folgt für das Flächenverhältnis

$$S^2 = \frac{(\varrho'^2 + \varrho^2\psi'^2)r^2 - \varrho^2 r^2\psi'^2}{r^2 s'^2} = 1\quad.$$

Bonnes Entwurf ist also auch dann noch flächentreu, wenn man die Abplattung berücksichtigt.

7. Allgemeinste Formeln für flächentreue Abbildung unter Rücksicht auf Abplattung. Bezeichnet man die Parameter ganz allgemein wieder mit u und v, so hat man

$$e_1 g_1 - f_1^2 = \left\{\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial u}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial v}\right)^2\right\} - \left\{\frac{\partial x_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial y_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial v}\right\}^2$$

$$= \left\{\frac{\partial x_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial v} - \frac{\partial x_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial u}\right\}^2\quad.$$

Ersetzt man u und v durch φ und λ, so hat man daher

$$S = \left(\frac{\partial x_1}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial\lambda} - \frac{\partial x_1}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial\varphi}\right) : r\frac{ds}{d\varphi}\quad.$$

Die Bedingung für Flächentreue ist daher

$$1)\qquad \frac{\partial x_1}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial\varphi} - \frac{\partial x_1}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial\lambda} = r\frac{ds}{d\varphi}\quad.$$

Dies ist die einzige Bedingung, der die unbekannten Funktionen x_1 und y_1 zu genügen haben. Da durch eine Differentialgleichung nur eine unbekannte Funktion bestimmt wird, so kann man entweder für eine der beiden Koordinaten x_1

oder y_1 eine ganz willkürliche Funktion der Parameter setzen, oder man kann einen ganz beliebigen Zusammenhang zwischen x_1 und y_1 annehmen.

Setzt man für x_1 eine bestimmte Funktion von φ und λ, so sind damit auch

$$p_1 = \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \quad \text{und} \quad q_1 = \frac{\partial x_1}{\partial \lambda}$$

gegebene Funktionen der Parameter, und man hat die Funktion y_1 aus der partialen Differentialgleichung zu ermitteln

$$2) \qquad q_1 \frac{\partial y_1}{\partial \varphi} - p_1 \frac{\partial y_1}{\partial \lambda} = \frac{(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi)^2} \quad .$$

Hierzu kann folgender Weg eingeschlagen werden. Man denke sich y als Funktion von x und φ, und benutze unter dieser Voraussetzung das Zeichen (y). Alsdann hat man

$$\frac{\partial y_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial (y_1)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial (y_1)}{\partial \varphi} = \frac{\partial (y_1)}{\partial x} \cdot p_1 + \frac{\partial (y_1)}{\partial \varphi} \quad ,$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial \lambda} = \frac{\partial (y_1)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \lambda} = \frac{\partial (y_1)}{\partial x_1} \cdot q_1 \quad ,$$

woraus folgt

$$q_1 \frac{\partial y_1}{\partial \varphi} - p_1 \frac{\partial y_1}{\partial \lambda} = q_1 \frac{\partial (y_1)}{\partial \varphi} \quad ;$$

daher geht 2) über in

$$3) \qquad q_1 \frac{\partial (y_1)}{\partial \varphi} = \frac{(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi)^2} \quad ,$$

$$4) \qquad y_1 = \int \frac{(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{p(1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi)^2} d\varphi + f(x_1) \quad ,$$

wobei $f(x_1)$ eine willkürliche Funktion von x_1 ist. Das Auftreten dieser Funktion im Verein damit, daß für x_1 eine ganz willkürliche Funktion von φ und λ genommen werden kann, zeigt, daß man irgend einem herausgegriffenen Werte von φ eine ganz beliebige Funktion von x und y zuordnen, d. i. irgend einem Breitenkreise ein ganz beliebiges Bild zuordnen kann; das Weitere ist alsdann aber unzweideutig bestimmt.

So kann man z. B. aus einer flächentreuen Plattkarte andre flächentreue Entwürfe dadurch ableiten, daß man jedes Meridianbild in sich um eine ganz beliebige Strecke verschiebt; statt gerader Breitenkreisbilder erhält man dann unter sich kongruente krumme Linien von ganz willkürlicher Gestalt.

Anstatt für x_1 eine willkürliche Funktion, kann man auch, wie schon bemerkt, einen Zusammenhang zwischen x_1 und y_1 willkürlich annehmen. Setzt man z. B.

$$y_1 = l x_1 \quad ,$$

wobei l eine willkürliche Funktion von λ allein bezeichnen mag, so ist

$$\frac{\partial y_1}{\partial \varphi} = l \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} , \qquad \frac{\partial y_1}{\partial \lambda} = l' x_1 + l \frac{\partial x_1}{\partial \lambda} \quad ;$$

daher hat man

$$\frac{\partial x_1}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial \lambda} = l \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} - l' x_1 \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} - l \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} = - l' x_1 \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \quad .$$

Folglich ergibt sich für x_1 die Differentialgleichung

$$- l' x_1 \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} = r \frac{ds}{d\varphi} \quad ,$$

und hieraus

$$5)\qquad \tfrac{1}{2}x_1^2 = -\frac{1}{l'}\int r\frac{ds}{d\varphi}\,d\varphi + f(\lambda) \quad ,$$

wobei $f(\lambda)$ eine willkürliche Funktion von λ ist.

Für $r\,ds$ hat man innerhalb der festgehaltenen Genauigkeitsgrenzen

$$r\,ds = (1-\varepsilon^2)\cos\varphi\,(1+\varepsilon^2\sin^2\varphi)$$
$$= \cos\varphi\,(1-\varepsilon^2+2\,\varepsilon^2\sin^2\varphi) \quad ,$$

und daher

$$\int_0^\varphi r\,ds = (1-\varepsilon^2)\sin\varphi + \tfrac{2}{3}\varepsilon^2\sin^3\varphi \quad .$$

Beispiele. A) Nimmt man $x_1 = \lambda$, also $\dfrac{\partial x_1}{\partial\lambda} = p = 1$, $f(\lambda) \equiv 0$, so ergeben sich die Abbildungsformeln

$$x_1 = \lambda\,, \qquad y_1 = (1-\varepsilon^2)\sin\varphi + \tfrac{2}{3}\varepsilon^2\sin^3\varphi \quad ;$$

dies ist, wie man sich leicht überzeugt, LAMBERTs Entwurf (Nr. 3).

B) Die Annahme $x_1 = r\lambda$ führt zu

$$p_1 = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}\,, \qquad y_1 = (1-\varepsilon^2)\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}^{\,3}} + f(x) \quad .$$

Da nun

$$(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \tfrac{3}{2}\varepsilon^2\sin^2\varphi \quad ,$$
$$(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \varepsilon^2 + \tfrac{3}{2}\varepsilon^2\sin^2\varphi \quad ,$$

so folgt

$$y_1 = \left(1-\frac{\varepsilon^2}{4}\right)\varphi - \tfrac{3}{8}\varepsilon^2\sin 2\varphi + f(x) \quad .$$

Für $f(x) \equiv 0$ stimmt dies mit SANSON-FLAMSTEEDs unechtem Säulenentwurfe (Nr. 4) überein.

C) Für $l = \operatorname{tang}\lambda$ ist $1 : l' = \cos^2\lambda$; daher ergibt 5)

$$\tfrac{1}{2}x_1^2 = -\cos^2\lambda\,[(1-\varepsilon^2)\sin\varphi + \tfrac{2}{3}\varepsilon^2\sin^3\varphi] + f(\lambda)$$

und daher

$$\tfrac{1}{2}y_1^2 = -\sin^2\lambda\,[(1-\varepsilon)\sin\varphi + \tfrac{2}{3}\varepsilon^2\sin^3\varphi] + f(\lambda)\operatorname{tang}\lambda \quad .$$

Setzt man $x_1^2 + y_1^2 = \varrho^2$, so ergibt sich weiter

$$\varrho^2 = -2\,[(1-\varepsilon^2)\sin\varphi + \tfrac{2}{3}\varepsilon^2\sin^3\varphi] + f(\lambda)\,(1+\operatorname{tang}\lambda) \quad .$$

Wenn man hier φ durch $90^0 - \delta$ und $f(\lambda)\,(1+\lambda)$ durch eine Konstante C ersetzt, so folgt

$$\varrho^2 = C - 2\,(1-\varepsilon^2)\cos\delta - \tfrac{4}{3}\varepsilon^2\cos^3\delta \quad ,$$

und dies stimmt mit Nr. 2, 2) überein.

§ 7. Winkeltreue Abbildung des abgeplatteten Umdrehungsellipsoids auf die Ebene.

1. Aus den Formeln von § 6, Nr. 1 und 2 folgt als Bedingung der Winkeltreue bei einem echten ebenen Entwurfe

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = -\frac{1-\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)\cos\varphi}$$
$$= -\frac{1}{\cos\varphi} + \varepsilon^2\cos\varphi \quad .$$

Hieraus folgt
$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{d\delta}{\sin\delta} - \varepsilon^2 \sin\delta\, d\delta \quad ,$$
$$l\varrho = l c \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\delta + \varepsilon^2 \cos\delta \quad ,$$
$$\varrho = c \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\delta \cdot e^{\varepsilon^2 \cos\delta} \quad .$$

Um die Abbildung am Pole längentreu zu machen, muß man $c = 2e^{-\varepsilon^2}$ nehmen, und erhält somit
$$\varrho = 2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\delta\, e^{-2\varepsilon^2 \sin^2\frac{\delta}{2}} \quad ,$$
oder mit genügender Genauigkeit
$$\varrho = 2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\delta\,(1 - 2\varepsilon^2 \sin^2\tfrac{1}{2}\delta) \quad .$$
Dies ist der stereographische Entwurf mit Rücksicht auf Abplattung.

2. Winkeltreuer Säulenentwurf. Die Differentialgleichung des Entwurfs ist
$$\zeta' = n \cdot \frac{1 - \varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi)\cos\varphi} = n\left(\frac{1}{\cos\varphi} - \varepsilon^2 \cos\varphi\right) \quad ,$$
$$\zeta = n\, l \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - n\varepsilon^2 \sin\varphi + C \quad .$$

Damit $\varphi = 0$ und $\zeta = 0$ zusammengehören, hat man $C = 0$ zu nehmen; soll der Gleicher sich flächentreu abbilden, so muß $n = 1 - \varepsilon^2$ sein; man erhält damit die Gleichung des Entwurfs
$$\zeta = l \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - \varepsilon^2\left[l \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - \sin\varphi\right] \quad .$$
Dies ist MERCATORS Entwurf mit Rücksicht auf Abplattung.

3. Winkeltreuer Kegelentwurf. Für diesen Entwurf hat man die Differentialgleichung
$$\frac{\zeta'}{n\zeta} = \frac{1 - \varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi)\cos\varphi} = n\left(\frac{1}{\cos\varphi} - \varepsilon^2 \cos\varphi\right) \quad ,$$
$$\frac{\zeta'}{\zeta} = n\left(\frac{1}{\sin\delta} - \varepsilon^2 \sin\delta\right) \quad ;$$
$$l\zeta = n\, l \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\delta + \varepsilon^2 n \cos\delta + C \quad ,$$
$$\zeta = c \operatorname{tang}^n \tfrac{1}{2}\delta \cdot e^{\varepsilon^2 n \cos\delta} \quad ,$$
oder
$$\zeta = c \operatorname{tang}^n \tfrac{1}{2}\delta\,(1 + \varepsilon^2 n \cos\delta) \quad .$$
Dies ist LAMBERTS winkeltreuer Kegelentwurf mit Rücksicht auf Abplattung.

4. Allgemeinste Formeln für winkeltreue Abbildung unter Rücksicht auf Abplattung. Die notwendige und ausreichende Bedingung für winkeltreue Abbildung ist, daß das Längenverhältnis eine Funktion des Ortes ist, nicht aber von der Fortschrittsrichtung abhängt. Bezeichnet μ eine Funktion von φ und λ, so muß also die Gleichung gelten
$$1) \quad \begin{cases} dx_1^2 + dy_1^2 = \mu^2(r^2 d\lambda^2 + ds^2) \quad , \\ \qquad\qquad = \mu^2 r^2\left[\left(\dfrac{ds}{r}\right)^2 + d\lambda^2\right] \quad . \end{cases}$$

Wir setzen hier $ds : r = du$, und denken uns x_1 und y_1 als Funktionen von u und λ; unter dieser Voraussetzung ist
$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial u} du + \frac{\partial x_1}{\partial \lambda} d\lambda\,, \qquad dy_1 = \frac{\partial y_1}{\partial u} du + \frac{\partial y_1}{\partial \lambda} d\lambda \quad ,$$
$$dx_1^2 + dy_1^2 = e_1\, du^2 + 2 f_1\, du\, d\lambda + g_1\, d\lambda^2 \quad ,$$

wobei, wie immer

$$e_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial u}\right)^2, \quad f_1 = \frac{\partial x_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial y_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial \lambda}, \quad g_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial \lambda}\right)^2 .$$

Daher hat man die Differentialgleichungen

$$2) \qquad e_1 = \mu^2 r^2, \quad g_1 = \mu^2 r^2, \quad f_1 = 0 .$$

Setzt man in $f_1 = 0$

$$3) \qquad \frac{\partial y_1}{\partial u} = m\frac{\partial x_1}{\partial \lambda} ,$$

so erhält man

$$4) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial u} = -m\frac{\partial y_1}{\partial \lambda} ,$$

und dies gibt, wenn man es in $e_1 = \mu^2 r^2$ einführt,

$$5) \qquad m^2 = 1 .$$

Durch Differentiation erreicht man aus 3) und 4) und unter Verwendung von 5) die Sonderung der Funktionen x und y, denn es ergibt sich

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \lambda^2} = \frac{1}{m}\cdot\frac{\partial^2 y_1}{\partial u\,\partial\lambda}, \quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} = -m\frac{\partial^2 y_1}{\partial u\,\partial\lambda} ,$$

woraus wegen $1 : m = m$ folgt

$$6) \qquad \frac{\partial^2 x_1}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial x_1^2}{\partial u^2} = 0 ;$$

ebenso erhält man

$$7) \qquad \frac{\partial^2 y_1}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} = 0 .$$

Die Integrale dieser Gleichungen sind (3. Buch, § 7, Nr. 4)

$$x_1 = \frac{1}{2i}[F(\lambda + ui) - F_1(\lambda - ui)] ,$$

$$y_1 = -\frac{m}{2}[F(\lambda + ui) + F_1(\lambda - ui)] ,$$

wobei F und F_1 willkürliche Funktionen der dahinter in Klammer stehenden komplexen Veränderlichen $\lambda + ui$ bezw. $\lambda - ui$ sind; für m kann man $+1$ setzen, da die andre mögliche Wahl $m = -1$ nur eine symmetrische Vertauschung des Bildes bewirkt. Man hat also schließlich

$$x_1 = \frac{1}{2i}[F(\lambda + ui) - F_1(\lambda - ui)] ,$$

$$y_1 = -\tfrac{1}{2}[F(\lambda + ui) + F_1(\lambda - ui)] .$$

Dabei besteht zwischen u und φ der Zusammenhang

$$du = \frac{ds}{r} = \frac{1-\varepsilon^2}{\cos\varphi(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)}d\varphi = \left(\frac{1}{\cos\varphi} - \varepsilon^2\cos\varphi\right)d\varphi ,$$

$$u = l\,\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \varepsilon^2\sin\varphi .$$

Beispiele. A) Setzt man

$$F(\lambda + ui) \equiv (1-\varepsilon^2)(\lambda + ui)i ,$$

$$F_1(\lambda - ui) \equiv -(1-\varepsilon^2)(\lambda - ui)i ,$$

so erhält man
$$x_1 = (1 - \varepsilon^2)\lambda\,, \quad y_1 = (1 - \varepsilon^2)u \quad ,$$
was bis aufs Vorzeichen von y_1, auf das nichts ankommt, mit den Abbildungsgleichungen für MERCATORs Entwurf übereinstimmt.

B) Wenn
$$F(\lambda + ui) = 2e^{-\varepsilon^2} \cdot i \cdot e^{i(\lambda + ui)} = 2e^{-u-\varepsilon^2}(-\sin\lambda + i\cos\lambda) \quad ,$$
$$F_1(\lambda - ui) = -2e^{-\varepsilon^2} \cdot i \cdot e^{-i(\lambda - ui)} = 2e^{-u-\varepsilon^2}(-\sin\lambda - i\cos\lambda) \quad ,$$
so ist
$$x_1 = 2e^{-u-\varepsilon^2} \cdot \cos\lambda\,, \quad y_1 = e^{-u-\varepsilon^2} \cdot \sin\lambda \quad .$$
Diese Formeln stimmen mit denen für die stereographische Abbildung überein*).

§ 8. TISSOTs Entwurf für schmale Zonen.

1. Um für eine Zone von mäßiger Breite eine vermittelnde Abbildung herzustellen, die möglichst frei von Voraussetzungen ist, wählen wir auf dem Gebiete einen Mittelmeridian, und auf diesem einen Nullpunkt. Wir werden im Laufe der Untersuchung zeigen, wie die endgültige Wahl dieser beiden Bestimmungsstücke so erfolgen kann, daß die Winkel- und Flächenverzerrungen möglichst klein bleiben. Mit u werde die Bogenlänge auf dem Nullmeridiane, vom Nullpunkte aus, mit t die Bogenlänge auf dem durch den Nullpunkt gehenden Mittelparallel, vom Mittelmeridian aus, bezeichnet; diese Größen t und u nehmen wir zu Parametern. Im Bilde legen wir Koordinatenachsen zugrunde, die vom Bilde des Nullpunktes ausgehen, und die Bilder des Mittelparallels und Mittelmeridians im Nullpunkt berühren. Da x_1 und y_1 mit t und u zugleich verschwinden, so können sie nach t und u in Potenzreihen ohne Absolutglieder entwickelt werden
$$1) \quad \begin{cases} x_1 = At + Bu + Ct^2 + 2Dtu + Eu^2 + \ldots \\ y_1 = at + bu + ct^2 + 2dtu + eu^2 + \ldots \end{cases}$$
Hieraus folgen
$$2) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial t} = A + 2(Ct + Du) + \ldots, & \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = B + 2(Dt + Eu) + \ldots \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial t} = a + 2(ct + du) + \ldots, & \dfrac{\partial y_1}{\partial u} = b + 2(dt + eu) + \ldots \end{cases}$$

Da die Achsen den Mittelmeridian und Mittelparallel im Nullpunkte berühren, so muß im Nullpunkte
$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{\partial y_1}{\partial t} = 0$$
sein, woraus die Bedingungen folgen
$$3) \qquad B = 0\,, \quad a = 0 \quad .$$

Die Längenverhältnisse h und k in der Richtung des Breitenkreises und des Meridians sind, wenn man die geographische Breite und den Breitenkreishalbmesser mit φ und r, dieselben Stücke für den Nullpunkt mit φ_0 und r_0 bezeichnet,
$$4) \quad \begin{cases} h = \dfrac{r_0}{r} \cdot \dfrac{\partial s_1}{\partial t} = \dfrac{r_0}{r} \sqrt{[A + 2(Ct + Du) + \ldots]^2 + [2(ct + du) + \ldots]^2} \quad , \\ k = \dfrac{\partial s_1}{\partial u} = \sqrt{[2(Dt + Eu) + \ldots]^2 + [b + 2(ct + du) + \ldots]^2} \quad . \end{cases}$$

*) GAUSS, Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Teile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird, in SCHUMACHERs Astronom. Abhandlungen, Altona 1825.

Wir setzen fest, daß der Meridian sich im Nullpunkte längentreu abbildet, daß also k im Nullpunkte die Einheit wird; hieraus folgt

$$5)\qquad b = 1 \quad .$$

Auch für den Mittelparallel setzen wir fest, daß er sich im Nullpunkte längentreu abbildet, und erhalten daraus

$$6)\qquad A = \frac{r}{r_0} \quad .$$

Daher haben wir bis jetzt die Abbildungsformeln

$$7)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{r}{r_0} t + C t^2 + 2 D t u + E u^2 + \ldots \\ y_1 = u + c t^2 + 2 d t u + e u^2 + \ldots \end{cases}$$

2. Die Zahlen C, D, E, c, d, e bestimmen wir so, daß $1 - h$, $1 - k$ und der Sinus der Schnittwinkelverzerrung ϑ zwischen Längen- und Breitenkreis allenthalben Größen zweiter Ordnung sind. Vorher ist noch zu bemerken, daß die Darstellung von x insofern von der gewöhnlichen Art, eine Funktion nach steigenden Potenzen zweier unabhängiger Veränderlichen zu entwickeln, abweicht, als doch der Halbmesser r eine Funktion von u ist; doch ist es für unsere Zwecke geeigneter, die obige Entwicklung der weitern Untersuchung zugrunde zu legen. Man hat nach Nr. 1, 7)

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{r}{r_0} + 2Ct + 2Du + \ldots, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{1}{r_0} \cdot \frac{dr}{du} t + 2Dt + 2Eu + \ldots$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial t} = 2ct + 2du + \ldots, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial u} = 1 + 2dt + 2eu + \ldots$$

$$h = \frac{r_0}{r} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial t} = \frac{r_0}{r} \sqrt{\left(\frac{r}{r_0} + 2Ct + 2Du + \ldots\right)^2 + \left(2ct + 2du + \ldots\right)^2} \;,$$

$$k = \frac{\partial s_1}{\partial u} = \sqrt{\left(\frac{1}{r_0} \cdot \frac{dr}{du} t + 2Dt + 2Eu + \ldots\right)^2 + \left(1 + 2dt + 2eu + \ldots\right)^2} \;.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \sin\vartheta &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial y_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial u}\right) : \frac{\partial s_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial u} \\ &= \Bigg[\left(\frac{r}{r_0} + 2Ct + 2Du + \ldots\right)\left(\frac{1}{r_0} \cdot \frac{dr}{du} t + 2Dt + 2Eu + \ldots\right) \\ &\quad + (2ct + 2du + \ldots)(1 + 2dt + 2eu + \ldots)\Bigg] : \frac{\partial s_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial u} \quad . \end{aligned}$$

Soll $1 - h$ keine Glieder erster Ordnung enthalten, so folgt

$$1)\qquad C = D = 0 \quad .$$

Daß $1 - k$ keine Glieder erster Ordnung enthält, wird bedingt durch

$$2)\qquad d = e = 0 \quad .$$

Unter den Voraussetzungen 1) und 2) wird

$$\begin{aligned} \sin\vartheta = \Bigg[&\left(\frac{r}{r_0} + \ldots\right)\left(\frac{1}{r_0} \cdot \frac{dr}{du} t + 2Eu + \ldots\right) \\ &+ \left(2ct + \ldots\right)\left(1 + \ldots\right)\Bigg] : \frac{\partial s_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial u} \quad . \end{aligned}$$

Entwickelt man r nach Potenzen von u, so erhält man nach TAYLOR, da

$$\frac{dr}{du} = -\sin\varphi_0 + \ldots, \qquad r = r_0 - \sin\varphi_0 u + \ldots$$

Folglich enthält die eckige Klammer in $\sin\vartheta$ die Glieder erster Ordnung

$$-\frac{\sin\varphi_0}{r_0}\cdot t + 2ct + 2Eu \quad ;$$

sollen diese wegfallen, so folgen die Bedingungen

$$3) \qquad E = 0\,, \quad c = \frac{\sin\varphi_0}{2r_0} \quad .$$

Unter Berücksichtigung von 1), 2) und 3) nehmen die Abbildungsformeln die Gestalt an

$$x_1 = \frac{r}{r_0}t + Ft^3 + 3Gt^2u + 3Htu^2 + Iu^3 + \ldots \quad ,$$

$$y_1 = u + \frac{\sin\varphi_0}{2r_0}t^2 + ft^3 + 3gt^2u + 3htu^2 + iu^3 + \ldots \quad ,$$

$$h = \frac{r_0}{r}\cdot\frac{\partial s_1}{\partial t}$$

$$= \frac{r_0}{r}\sqrt{\left(\frac{r}{r_0} + 3Ft^2 + 6Gtu + 3Hu^2\right)^2 + \left(\frac{\sin\varphi_0}{r_0}t + 3ft^2 + 6gtu + 3hu^2\right)^2}\,,$$

$$k = \frac{\partial s_1}{\partial u}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{r_0}\cdot\frac{dr}{du}t + 3Gt^2 + 6Htu + 3Iu^2\right)^2 + \left(1 + 3gt^2 + 6htu + 3iu^2\right)^2}\,,$$

$$\sin\vartheta$$

$$= \left[\left(\frac{r}{r_0} + 3Ft^2 + 6Gtu + 3Hu^2\right)\left(\frac{1}{r_0}\cdot\frac{dr}{du}t + 3Gt^2 + 6Htu + 3Iu^2\right)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\sin\varphi_0}{r_0}t + 3ft^2 + 6gtu + 3hu^2\right)\left(1 + 3gt^2 + 6htu + 3iu^2\right)\right] : \frac{\partial s_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial s_1}{\partial u}\,.$$

3. Aus dem Werte von h folgt durch Entwicklung der Quadratwurzel bis zu Gliedern zweiter Ordnung

$$1) \qquad \begin{cases} h = 1 + \dfrac{r_0}{r}(3Ft^2 + 6Gtu + 3Hu^2) + \dfrac{\sin^2\varphi_0}{2r^2}t^2 \quad , \\[2ex] k = 1 + 3gt^2 + 6htu + 3iu^2 + \dfrac{1}{2r_0^2}\cdot\left(\dfrac{dr}{du}\right)^2 t^2 \quad . \end{cases}$$

Wenn es nur auf Größen zweiter Ordnung ankommt, so kann man in diesen Formeln die Abplattung bei r außer Betracht lassen, und r durch r_0, d. i. durch $\cos\varphi_0$, $\left(\frac{dr}{du}\right)^2$ durch $\sin^2\varphi_0$ ersetzen; die letzten Glieder in h und k sind daher bis auf Glieder höherer Ordnung gleich. Man kann daher h und k bis auf Glieder dritter Ordnung in Übereinstimmung bringen, wenn man festsetzt, daß

$$2) \qquad F = g\,, \quad G = h\,, \quad H = i \quad .$$

Setzt man ferner in $\sin\vartheta$

$$\frac{r}{r_0} = 1 - \operatorname{tang}\varphi_0\, u - \tfrac{1}{2}u^2 + \ldots ,$$

$$\frac{dr}{du} = -\sin\varphi_0 - u + \ldots, \qquad r_0 = \cos\varphi_0 ,$$

so ergibt sich bis auf Glieder zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}\sin\vartheta \cdot \frac{\partial s_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial u} &= (1 - \operatorname{tang}\varphi_0\, u - \tfrac{1}{2}u^2 + 3Ft^2 + \ldots)(-\operatorname{tang}\varphi_0\, t - ut + 3Gt^2 + \ldots)\\ &+ (\operatorname{tang}\varphi_0\, t + 3ft^2 + \ldots)(1 + 3gt^2 + \ldots)\\ &= -tu + 3Gt^2 + 6Htu + 3Iu^2 + \operatorname{tang}^2\varphi_0\, tu + 3ft^2 + 6gtu + 3hu^2 .\end{aligned}$$

Die Glieder zweiter Ordnung verschwinden, wenn

$$3)\qquad H + g = \tfrac{1}{6}(1 - \operatorname{tang}^2\varphi_0) = \frac{\cos 2\varphi_0}{6\cos^2\varphi_0}, \qquad G + f = 0, \qquad I + h = 0 .$$

Aus 1) und 2) folgen die Abbildungsformeln

$$4)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{r}{r_0}\, t + Ft^3 + 3Gt^2u + 3Htu^2 - Gu^3 , \\ y_1 = u + \dfrac{\sin\varphi_0}{2r_0} t^2 - Gt^3 + 3Ft^2u + 3Gtu^2 + Hu^3 , \end{cases}$$

wobei

$$5)\qquad F + H = \frac{\cos 2\varphi_0}{6\cos^2\varphi_0} .$$

Die Abweichung ε der Längenverhältnisse h und k von der Einheit ist

$$\varepsilon = 1 - h = 1 - k = (3H - \tfrac{1}{2})t^2 - 6Gtu - 3Hu^2 ,$$

sie kann daher nicht auf Größen dritter Ordnung herabgedrückt werden.

4. Die unbestimmt gebliebenen Zahlen F, G, H, sowie φ_0 und den Nullmeridian hat man nun so zu wählen, daß der größte innerhalb der Karte vorkommende Wert von ε möglichst klein wird.

Führt man an Stelle von G und H zwei neue Größen μ und N durch die Gleichungen ein

$$1)\qquad \operatorname{tang}\mu = -\frac{G}{H - \frac{1}{12}}, \qquad N - \tfrac{1}{12} = (H - \tfrac{1}{12})\sec\mu ,$$

oder

$$H - \tfrac{1}{12} = (N - \tfrac{1}{12})\cos\mu , \qquad G = -(N - \tfrac{1}{12})\sin\mu ,$$

und macht von den Änderungsformeln Gebrauch

$$2)\qquad \begin{cases} t = v\cos\tfrac{1}{2}\mu - w\sin\tfrac{1}{2}\mu , \\ u = v\sin\tfrac{1}{2}\mu + w\cos\tfrac{1}{2}\mu , \end{cases}$$

so geht der obige Wert von ε über in

$$3)\qquad \varepsilon = (\tfrac{1}{6} - N)v^2 + Nw^2 .$$

Alle Punkte v, w, die für ein gegebenes N einen bestimmten Wert von ε erzeugen, liegen auf einer bestimmten Ellipse, wenn

$$4)\qquad 0 < N < \tfrac{1}{6} ,$$

auf einer Hyperbel, wenn N außerhalb dieser Begrenzung liegt; dabei sind die Kurven, die demselben N, aber verschiedenen Werten von ε zugehören, einander ähnlich. Man gebe nun N eine Reihe von Werten, die zwischen 0 und $\frac{1}{6}$ enthalten sind, und zeichne die Ellipsen, die zu diesen Werten und etwa zu $\varepsilon = 0{,}1$

gehören. Zu jeder dieser Ellipsen zeichne man auf durchsichtiges Papier einen Satz ähnlicher Ellipsen für verschiedene Werte von ε. Ferner zeichne man eine Hilfskarte für den Umriß des darzustellenden Gebietes, bei der man t und u als rechtwinklige Koordinaten aufträgt, suche unter jedem Satze ähnlicher Ellipsen die kleinste aus, innerhalb deren bei geschickter Lage des Mittelpunktes und der Achsen das ganze darzustellende Gebiet Raum hat; unter dieser ersten Auswahl legt man die Ellipse dem Entwurfe zugrunde, die zu dem kleinsten ε gehört. Hat man auf jeder Ellipse der ersten Wahl die Lage des Mittelpunktes $t_0\, u_0$ und den Winkel μ zwischen der Hauptachse und der t-Achse bemerkt, so liest man nun auf der dem kleinsten ε zugehörigen Ellipse sofort die Kartenmitte $(t_0\, u_0)$ ab und erhält alsdann G und H aus den Gleichungen 1), sowie F aus Nr. 3, 4), worauf die Abbildungsformeln 3) vollständig bestimmt sind.

Will man die Abplattung unberücksichtigt lassen, so kann man in 3) r durch $\cos\varphi$ ersetzen.

Negative Werte von N, oder solche, die größer als $\frac{1}{6}$ sind, liefern statt der Ellipsen Hyperbeln. Während bei Ellipsen nur positive ε in Betracht kommen, kann bei Hyperbeln ε auch negativ angenommen werden. Wir zeichnen jetzt die beiden denselben Asymptoten zugehörigen Hyperbeln, die einem bestimmten N und zwei entgegengesetzt gleichen ε von bestimmtem absolutem Betrage entsprechen, zu diesem Hyperbelpaare durch Änderung des ε einen Satz ähnlicher Hyperbelpaare, sowie hierauf durch Änderung des N eine Reihe von Hyperbelsätzen, und suchen unter diesen Hyperbelpaaren wieder, wie oben, das dem kleinsten ε zugehörige Hyperbelpaar, innerhalb dessen die Hilfskarte des Gebietes untergebracht wird. Je nachdem das ε dieses Paares größer oder kleiner als das oben gefundene kleinste ε ist, hat man das dem Hyperbelpaare oder das der obigen Ellipse zugehörige N und μ dem Entwurfe zugrunde zu legen*).

5. Durch die Herstellung möglichst kleiner Winkelabweichungen ϑ neben möglichst kleinen gleichen Längenabweichungen $1-h$ und $1-k$ wird in TISSOTs Entwurfe die Winkeltreue bevorzugt; man wird dagegen die Flächentreue in den Vordergrund stellen, wenn man in $1-h$ und $1-k$ die Glieder erster Ordnung beseitigt und die zweiter Ordnung entgegengesetzt gleich macht. Für diese Ausbildung des TISSOTschen Verfahrens hat man daher zunächst wieder die Bedingungen

$$1)\qquad H+g=\tfrac{1}{6}(1-\operatorname{tang}^2\varphi_0)\,,\qquad G+f=0\,,\qquad I+h=0\quad,$$

und daneben aus Nr. 3, 1), wenn man in den Gliedern zweiter Ordnung von h und k wieder die Abplattung außer acht läßt,

$$2)\qquad F+g=\tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^2\varphi_0\,,\qquad G=-h\,,\qquad H=-\iota\quad.$$

Aus 1) und 2) folgt

$$3)\qquad F-H=\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^2\varphi_0-\tfrac{1}{6}\,,\qquad I=G\,,\qquad f=-g\quad.$$

Daher folgen die Entwurfsgleichungen

$$4)\qquad \begin{cases} x_1=\dfrac{r}{r_0}t+Ft^3+3Gt^2u+3Htu^2+Gu^3\quad,\\[2ex] y_1=u+\dfrac{\sin\varphi_0}{2r_0}t^2+ft^3-3ft^2u-3Gtu^2-Hu^3\quad.\end{cases}$$

Hierbei ist

$$f=F-\tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^2\varphi_0\,,\qquad H=F-\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^2\varphi_0+\tfrac{1}{6}\varepsilon\quad.$$

Man hat jetzt

$$\varepsilon=1-h=-(1-k)=(3H+2\operatorname{tang}^2\varphi_0-\tfrac{1}{2})t^2+6Gtu+3Hu^2\quad.$$

*) Ein vollständig durchgeführtes Beispiel, sowie weitere Ausführungen findet man bei TISSOT-HAMMER, Die Netzentwürfe u. s. w., Nr. 57 u. ff.

Setzt man

$$\operatorname{tang}\nu = \frac{3G}{3H + 2\operatorname{tang}^2\varphi - \frac{1}{2}}, \quad P = (3H + 2\operatorname{tang}^2\varphi - \tfrac{1}{2})\sec\nu \quad ,$$

oder

$$3H + 2\operatorname{tang}^2\varphi - \tfrac{1}{2} = P\cos\mu\,, \qquad G = P\sin\mu \quad ,$$

und verwendet die Änderungsformeln

$$t = v\cos\tfrac{1}{2}\nu - w\sin\tfrac{1}{2}\nu \quad ,$$

$$u = v\sin\tfrac{1}{2}\nu + w\cos\tfrac{1}{2}\nu \quad ,$$

so erhält man

$$\varepsilon = (\tfrac{1}{12} - P)v^2 + (\tfrac{1}{12} + P)w^2 \quad .$$

Das weitere Verfahren zur Ermittlung des Entwurfs, der bei der Darstellung eines bestimmten Gebietes die günstigsten Flächenverzerrungen aufweist, ist von dem in Nr. 4 angegebenen nicht verschieden.

§ 9. Karten in sehr kleinem und sehr großem Maßstabe (Planigloben und Generalstabskarten).

1. Die Darstellung eines sehr großen Teiles der Erdoberfläche auf einem einzigen Kartenbilde kann natürlich nicht anders erfolgen, als daß bei Flächentreue sehr starke Winkelverzerrungen, bei Winkeltreue sehr starke Flächenverzerrungen, oder starke Verzerrungen beiderlei Art mit in den Kauf genommen werden müssen. Handelt es sich um Bilder der ganzen Erdoberfläche, so ist es unvermeidlich, daß Linien vorkommen, die zwischen zwei Punkten der Erde lückenlos verlaufen, auf der Karte dagegen in zwei oder mehr Stücke zerrissen sind.

2. Es darf behauptet werden, daß für die Abbildung der ganzen Erde auf einer einzigen Karte ein ernstes geographisches Bedürfnis nicht vorliegt, die Lösung dieser Aufgabe daher in Anbetracht der damit verbundenen unerträglichen Verzerrungen recht wohl ganz unterbleiben könnte. Begnügt man sich mit der Darstellung des durchforschten Teiles der Erde, schließt also die Gegenden um die Pole bis zu gewissen Polabständen aus, so kann jeder geradständige ebene, Säulen- oder Kegelentwurf verwendet werden.

Will man indes aus irgend einem theoretischen Bedürfnis nach Vollständigkeit die ganze Erde darstellen, so sind selbstredend die Entwürfe unverwendbar, bei denen die Bilder von Punkten ins Unendliche fallen; unter den oben besprochenen sind dies der winkeltreue und der vermittelnde Breusingsche ebene Entwurf, ferner Mercators winkeltreuer Säulenentwurf, sowie Lamberts winkeltreuer Kegelentwurf. Bei den Entwurfsarten, die eine Darstellung der ganzen Erde ermöglichen, wird man wohl von denen absehen, die beide Pole oder einen in gerade oder krumme Linien auseinanderzerren, wie z. B. vom flächentreuen und speichentreuen ebenen Entwurfe, von Lamberts flächentreuen Säulenentwurfe, sowie von den Plattkarten überhaupt, von Lamberts flächentreuen Kegelentwurfe, vom Kegelentwurfe des Ptolemäus u. a. m.

Zu den besser verwendbaren Entwürfen ist, soweit sie schon oben berücksichtigt worden sind, hier nichts hinzuzufügen; wohl aber ist noch einiger Entwurfsweisen zu gedenken, die oben nicht besprochen worden sind.

3. Stabs Entwürfe. Der Mittelmeridian wird gerade und längentreu oder längenverhältnistreu abgebildet, die Breitenkreise als Kreise um den Pol und ebenfalls längentreu oder doch längenverhältnistreu. Man überzeugt sich leicht, daß bei dieser Gruppe von Abbildungen das Flächenverhältnis überall dasselbe

ist; die Längenverhältnisse des Mittelmeridians und der Breitenkreise lassen sich leicht wählen.

Nimmt man das Bild des Mittelmeridians als Abscissenachse, das des Pols als Nullpunkt, bezeichnen m und n das Längenverhältnis auf dem Mittelmeridian, bezw. auf den Breitenkreisen, und sind r_1 und φ_1 die Polarkoordinaten eines Kartenpunktes, so hat man für den Entwurf die Gleichungen

$$r_1 = m\delta\,, \qquad \varphi_1 = \frac{n\sin\delta}{m\delta}\lambda \quad ,$$

$$x_1 = r_1\cos\varphi_1\,, \qquad y_1 = r_1\sin\varphi_1 \quad .$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial x_1}{\partial\delta} = m\cos\varphi_1 - r_1\sin\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial\delta}\,, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial\lambda} = -n\sin\varphi_1\sin\delta \quad ,$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial\delta} = m\sin\varphi_1 + r_1\cos\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial\delta}\,, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial\lambda} = n\cos\varphi_1\sin\delta \quad .$$

Aus diesen Formeln ergibt sich

$$e_1 = m^2 + r_1^2\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\delta}\right)^2 \quad ,$$

$$f_1 = mn\,\delta\sin\delta\frac{\partial\varphi_1}{\partial\delta} \quad ,$$

$$g_1 = n^2\sin^2\delta \quad .$$

Für das Flächenverhältnis findet man daher

$$S = mn \quad .$$

Nimmt man

$$mn = 1 \quad ,$$

so wird die Abbildung flächentreu.

4. Der Urheber dieses Entwurfs ist Johann Stab oder Stabius im Anfange des 16. Jahrhunderts. Johann Werner, ein hervorragender Geometer und Kartenzeichner und Zeitgenosse Stabs, wandte in seinem großen Kartenwerke die Stabschen Entwürfe mehrfach an; sie werden daher nach Stab oder nach Werner, oder nach beiden bezeichnet. Man vergleiche Gretschel, Lehrbuch, S. 185 und Tafel IV, Figur 23.

Eine Anwendung dieses Entwurfs geben Schrader, Prudent und Anthoine, Nr. 37, Russisches Reich 1:20000000, und entsprechend Spamer Nr. 97/98. Tafel 19 gibt, nach Spamer Nr. 97/98 die östliche Hälfte dieses Entwurfs.

5. Nicolosis Entwurf. Der Mittelmeridian und der Gleicher werden längentreu als zwei sich rechtwinklig schneidende Gerade abgebildet; das Bild des Grenzmeridians ist ein um den Schnittpunkt von Mittelmeridian und Gleicher mit dem Halbmesser $\frac{1}{2}\pi$ beschriebener Kreis; die Meridianbilder, sowie die Bilder der Breitenkreise sind Kreise, und zwar teilen die Breitenkreisbilder das Bild des Grenzmeridians längenverhältnistreu.

Diesen Entwurf, der für die Abbildung der östlichen und westlichen Halbkugel noch im Gebrauch ist, legte Niolosi einer Anzähl großer in Rom 1660 von ihm herausgegebener Karten zugrunde; er wird in England oft nach Arrowsmyth benannt, der ihn am Ende des 18. Jahrhunderts benutzte, und führt auch noch die Bezeichnung Globularentwurf.

6. Mollweides Entwurf zur Abbildung der ganzen Erde. Der Mittelmeridian und der Gleicher werden als einander rechtwinklig schneidende Gerade, der Grenzmeridian als Ellipse abgebildet, deren Fläche der Erdoberfläche gleicht; ist daher m die große Halbachse, n die kleine, so ist

$$mn = 4 \quad .$$

Die Bilder der Meridiane sind Ellipsen, die die Polbilder zu Scheiteln haben, und die Fläche der Grenzellipse flächentreu teilen. Hat das Bild des Meridians λ die zweite Halbachse l, so ist das Bild des Kugelwinkels zwischen dem Nullmeridian (Mittelmeridian) und dem Meridian λ

$$\tfrac{1}{2}\pi l n \quad ;$$

der Kugelwinkel selbst hat die Fläche

$$4\pi \cdot \frac{\lambda}{2\pi} = 2\lambda \quad ,$$

folglich ist

$$l = \frac{4\lambda}{n\pi} \quad .$$

Die Breitenkreise bildet Mollweide als Gerade von der Richtung des Gleicherbildes ab; ist ψ die excentrische Anomalie für den Endpunkt des Bildes des Breitenkreises, der den Polabstand δ hat, so wird ψ so bestimmt, daß die vom Breitenkreise begrenzte Kappe sich flächentreu abbildet. Wie man sofort erkennt, wird durch die flächentreue Abbildung der zwischen Meridianen und Breitenkreisen liegenden Gebiete die flächentreue Abbildung beliebiger Flächen bewirkt. Hat eine Ellipse die Halbachsen a und b, so ist der Abschnitt, dessen Sehne zur excentrischen Anomalie 2ψ gehört, bekanntlich

$$f = \frac{1}{2} a b (2\psi - \sin 2\psi) \quad ;$$

setzt man $a = n$, $b = m$, und für f den Inhalt der Kugelkappe, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 2\psi - \sin 2\psi &= \pi(1 - \cos\delta) \quad , \\ &= 2\pi \sin^2 \frac{\delta}{2} \quad . \end{aligned}$$

Aus dieser transcendenten Gleichung kann ψ leicht gefunden werden*).

Mollweide hat für n den Wert $\sqrt{2}$ gewählt; er veröffentlichte diesen Entwurf 1805; Babinet legte ihn seinem 1857 erschienenen Atlas zugrunde und nannte ihn homalographischen Entwurf.

7. Aus einem echten ebenen Entwurfe B einer Halbkugel hat Aïtoff (Schrader, Prudent und Anthoine, Atlas de Géographie moderne, Paris 1891) das von einer Ellipse begrenzte Bild B_1 der ganzen Erde in eigentümlicher Weise abgeleitet. Bei einem querständigen echten ebenen Entwurfe bilden sich der Gleicher und der Meridian der Kartenmitte als Gerade ab, die aufeinander senkrecht stehen. Verkürzt man nun die senkrecht zum Gleicherbilde gezogenen Ordinaten der Punkte von B um die Hälfte, und sieht das dadurch gewonnene Bild des Meridians, der von der Kartenmitte den Längenabstand λ hat, in B_1 als den Ort der Punkte an, die von der Kartenmitte den Längenabstand 2λ haben, so ergibt sich aus dem ursprünglichen Bilde B der Halbkugel ein Bild der ganzen Erde, das von einer Ellipse begrenzt wird, deren kleine Achse die Hälfte der großen ist. Aïtoff hat diese Konstruktion auf den speichentreuen Entwurf angewendet. Hammer hat in Petermanns Mitteilungen aus Justus Perthes geographischer Anstalt (38. Bd., 1892, S. 85) die Bemerkung gemacht, daß man mit demselben Rechte hierbei auch jeden andern querständigen echten ebenen Entwurf verwenden kann, und daß man dabei auf einen flächentreuen Entwurf der ganzen Erde kommt, wenn man Lamberts flächentreuen echten ebenen Entwurf zugrunde legt. S. 86 zeigt ein von 20^0 zu 20^0 fortschreitendes Gradnetz dieses Entwurfs, wobei der Maßstab in der Kartenmitte ungefähr 1 : 182 000 000 ist.

Auf Tafel 20 geben wir Aïtoffs Entwurf (nach Spamer, Nr. 9/10).

---

*) In des Verfassers fünfstelligen Logarithmentafeln, Leipzig 1901, sind auf S. 79 die Werte von $\operatorname{arc}\varphi - \sin\varphi$, von 0^0 bis 180^0, um 1^0 fortschreitend, angegeben.

8. Vielflachkarten. Ein Bild der ganzen Erde wird erhalten, wenn man der verjüngten Erde ein Vielflach umschreibt und auf den einzelnen Flächen bestimmte, nicht übereinander hinweggreifende, die Erde lückenlos bedeckende Gebiete abbildet. Dabei hat man noch die Bedingung zu erfüllen, daß die Kanten des Vielflachs kongruente Abbildungen derselben Linie auf der Erde sind, gleichgültig, zu welcher der beiden anstoßenden Flächen sie gerechnet werden. Die angegebenen Bedingungen werden erfüllt, wenn man die Erde vom Mittelpunkte aus perspektivisch abbildet (gnomonischer Entwurf). Erfolgt die Abbildung auf den der verjüngten Erdkugel umschriebenen Würfel, so kommt auf jede Seite des Würfels der sechste Teil der Erdoberfläche, und die Flächen- und Winkelverzerrungen halten sich noch in erträglichen Grenzen. Eine solche Darstellung der ganzen Erde gab Reichardt in Weimar, 1803.

9. Sternförmige Planigloben. Um die Verzerrungen zu vermeiden, die mit der Verebnung der ganzen Erdoberfläche auf einem einzigen Kartenblatte verbunden sind, hat man vorgeschlagen, eine Halbkugel nach irgend einer der bekannten Entwurfsweisen darzustellen, das Bild der andern Halbkugel aber in dreieckige, von Bogen begrenzte Zacken aufzulösen, die um den Rand der zusammenhängend dargestellten Halbkugel herumliegen. Betrachtet man das Halbkugelbild und die dreieckigen Karten als für sich bestehende Entwürfe, so ist nichts Wesentliches hinzuzufügen. Sieht man aber, wie immer, das Ganze als ein Bild der ganzen Erdoberfläche an, so hat es keinen rechten Sinn, um Winkel- und Flächenverzerrungen besorgt zu sein, wo man doch die ärgste Gewalttat, nämlich die Zerreißung zusammenhängender Linien in mehrere getrennte Stücke und die Zerreißung zusammenhängender Flächen, sich gefallen läßt.

10. Für die gnomonische Abbildung hat man

$$x_1 = \varrho \cos\lambda\,, \quad y_1 = \varrho \sin\lambda\,, \quad \varrho = \operatorname{tang}\delta \quad ,$$

$$e_1 = \frac{1}{\cos^2\delta}\,, \quad f_1 = 0\,, \quad g_1 = \sin^2\delta \quad ,$$

$$S = \frac{1}{\cos^3\delta}\,, \quad \sin\vartheta = \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\delta \quad .$$

Bei Karten sehr großen Maßstabes (Generalstabskarten) umfaßt das einzelne Blatt von der Mitte aus einen Polabstand, der erheblich kleiner als 1^0 ist; nun gehören aber zusammen

$$\delta = 1^0\,, \quad S = \sec^3 1^0 = 1{,}0005\,, \quad \sin\vartheta = 0{,}000076\,, \quad \vartheta = 15'' \quad .$$

So geringe Abweichungen verschwinden gegenüber den Genauigkeitsgrenzen der Zeichnung des Kartenurbildes, der Übertragung auf die Druckplatte, deren ungleichmäßiger Ausdehnung, und insbesondere gegenüber der Änderung des Kartenpapieres infolge des Anfeuchtens beim Druck sowie der wechselnden Wärme und Luftfeuchtigkeit; man kann daher die gnomonische Abbildung unter diesen Umständen für flächentreu und winkeltreu, als kongruentes Bild des dargestellten Teiles der Erdoberfläche ansehen. Daran ändert sich nichts, wenn man beim gnomonischen Entwurfe die Tangentenebene durch eine Ebene ersetzt, die durch zwei nahe benachbarte Punkte eines Breitenkreises und die zu gleichen Längen gehörigen Punkte eines nahe benachbarten Breitenkreises legt, denn der Abstand einer solchen Ebene von der dazu gleichgestellten Berührungsebene der Erde ist nur eine Größe höherer Ordnung. Auch macht es keinen bemerkbaren Unterschied, wenn man den gnomonischen durch einen andern der oben besprochenen echten ebenen Entwürfe geeignet ersetzt.

11. Zonenkarten. Anstatt auf Ebenen kann man auch auf Kegelzonen abbilden; reicht ein Kartenblatt vom Parallelkreise φ^0 bis zu φ'^0 (wobei $\varphi' - \varphi$ immer ein echter Bruch sein wird), so kann man die Kegelzone zugrunde legen, die durch die beiden Grenzparallelkreise bestimmt ist, und darauf wieder gnomonisch abbilden.

Die Kartenblätter, die Teile derselben Zone darstellen, kann man lückenlos aneinander stoßen; bei zwei Blättern, die von denselben Meridianen begrenzte benachbarte Gebiete darstellen, ist dies zwar nicht in aller Strenge möglich, indes ist die Abweichung der Grenzlinien von der Kongruenz so klein, daß praktisch das Zusammenstoßen zweier Nachbarzonen selbst bis auf einige Grad Längenausdehnung ausgeführt werden kann.

Ist nämlich ON die Erdachse (Fig. 93), O der Mittelpunkt, $QON = 90^0$, $BOA = AOC = \varepsilon$, $QOA = \varphi$, $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel OQ$, $AO = BO = CO = 1$, so ist

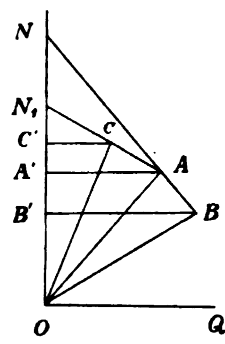


Fig. 93.

$$AA' = \cos\varphi\,, \qquad BB' = \cos(\varphi - \varepsilon)\,, \qquad CC' = \cos(\varphi + \varepsilon)\,,$$

$$AN = \frac{AA'}{\sin ANA'} = \frac{\cos\varphi}{\sin(\varphi - \frac{1}{2}\varepsilon)}\,, \qquad AN' = \frac{\cos\varphi}{\sin(\varphi + \frac{1}{2}\varepsilon)}\,.$$

Ist ε nur ein kleiner Winkel, so kann man setzen

$$\frac{1}{\sin(\varphi \mp \frac{1}{2}\varepsilon)} = \frac{2}{2\sin\varphi \mp \varepsilon\cos\varphi}\,,$$

$$\frac{1}{\sin(\varphi - \frac{1}{2}\varepsilon)} - \frac{1}{\sin(\varphi + \frac{1}{2}\varepsilon)} = \frac{\varepsilon\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\,,$$

$$NN_1 = \varepsilon\cot^2\varphi\,.$$

Bei der Verebnung der von AB und AC beschriebenen Kegelzonen löst sich der Breitenkreis, der A enthält, in zwei Kreise auf, deren Halbmesser AN und AN_1 sind (Fig. 94); nehmen wir an, daß sie sich in A berühren und daß der Halbmesser NM des größern Kreises den kleinern in M_1 schneidet, so ist, wenn $AN_1M_1 = \mu$ gesetzt wird,

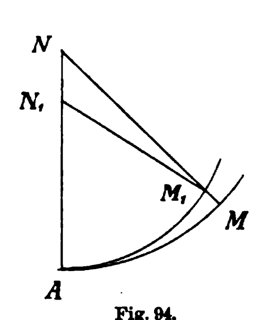


Fig. 94.

$$NM_1^2 = N_1M_1^2 + 2\,N_1M_1 \cdot NN_1 \cdot \cos\mu + NN_1^2\,.$$

Da NN_1 gegen N_1M_1 nur sehr klein ist, so kann man hieraus schließen

$$NM_1 = N_1M_1 + NN_1\cos\mu\,,$$

woraus dann weiter folgt

$$AN - MM_1 = AN_1 + NN_1\cos\mu$$
$$= AN - 2\,NN_1\sin^2\tfrac{1}{2}\mu\,.$$

Daher ergibt sich

$$MM_1 = 2\,\varepsilon\cot^2\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\mu\,.$$

Für 45^0 geographischer Breite hat man insbesondere

$$MM_1 = 2\,\varepsilon\sin^2\tfrac{1}{2}\mu\,.$$

Erstreckt sich z. B. bei einem Maßstabe 1 : 75000 ein Blatt der Karte über 15′ Breite und 30′ Länge, so ist selbst für $\mu = 2^0$

$$\log MM_1 = 4{,}425\,, \qquad M_1M = 0{,}0000027\,.$$

Bei dieser Verjüngung ist der Erdhalbmesser rund 90 m, daher $MM_1 = 0{,}24$ mm. Da

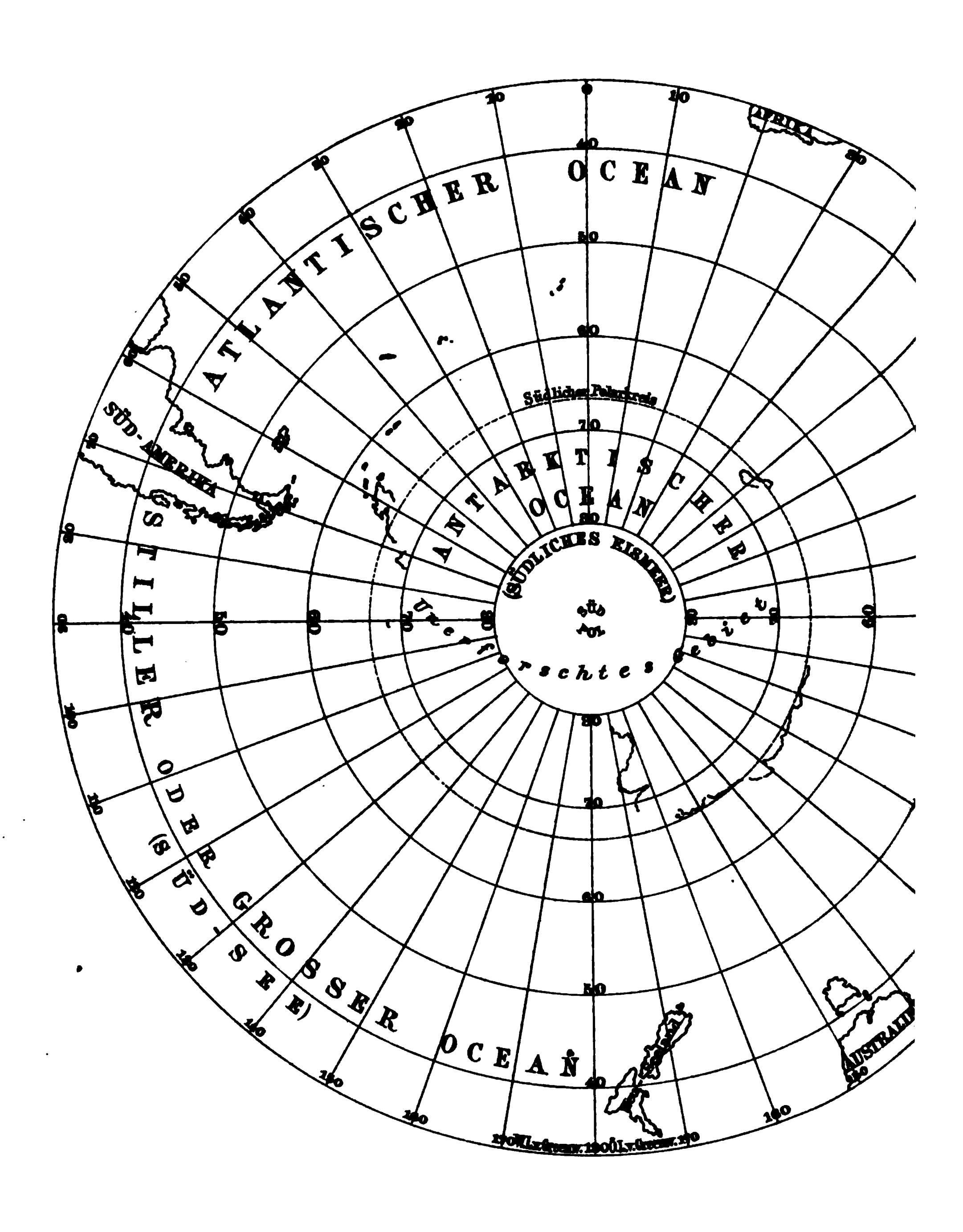
$$2{,}0 : \sin 45^0 = 2{,}8\,,$$

so kann man also zur Not 6, sicher aber 5 Blätter nach jeder Seite, im ganzen also 10—12 einer Zone, mit den nördlich und südlich angrenzenden ohne merkliche Störung zusammenstoßen.

Sachregister zu Band I bis III.

Die römischen Zahlen bedeuten den Band, die arabischen die Seite.

Spamersche Buchdruckerei in Leipzig.

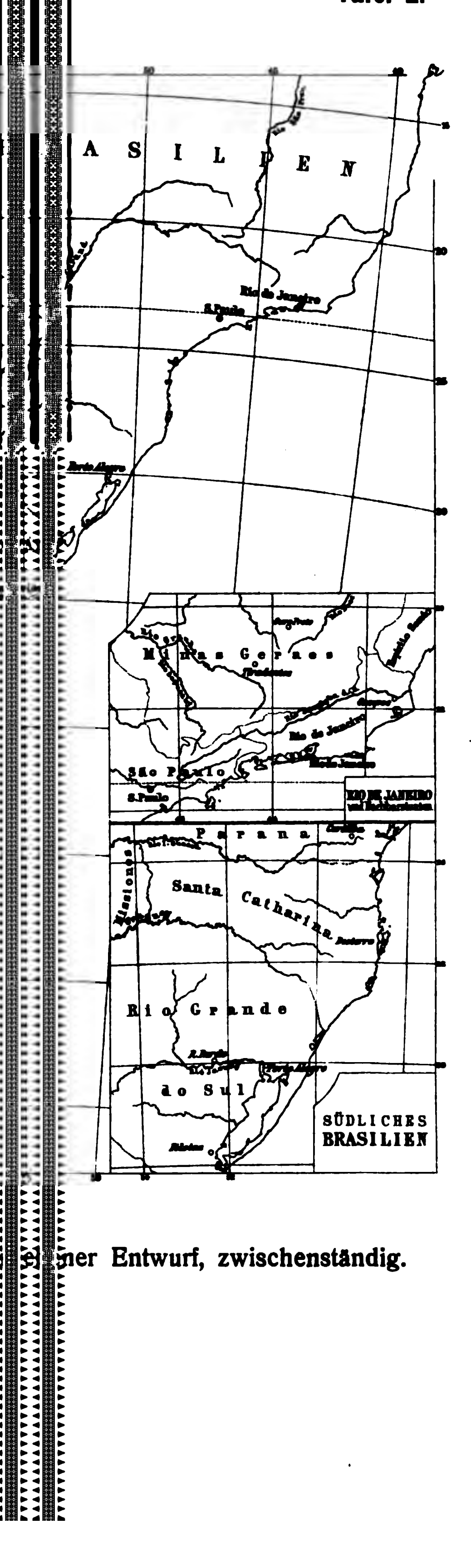


A. **Lambert's** flächentreuer echter ebener Entwurf, geradständi

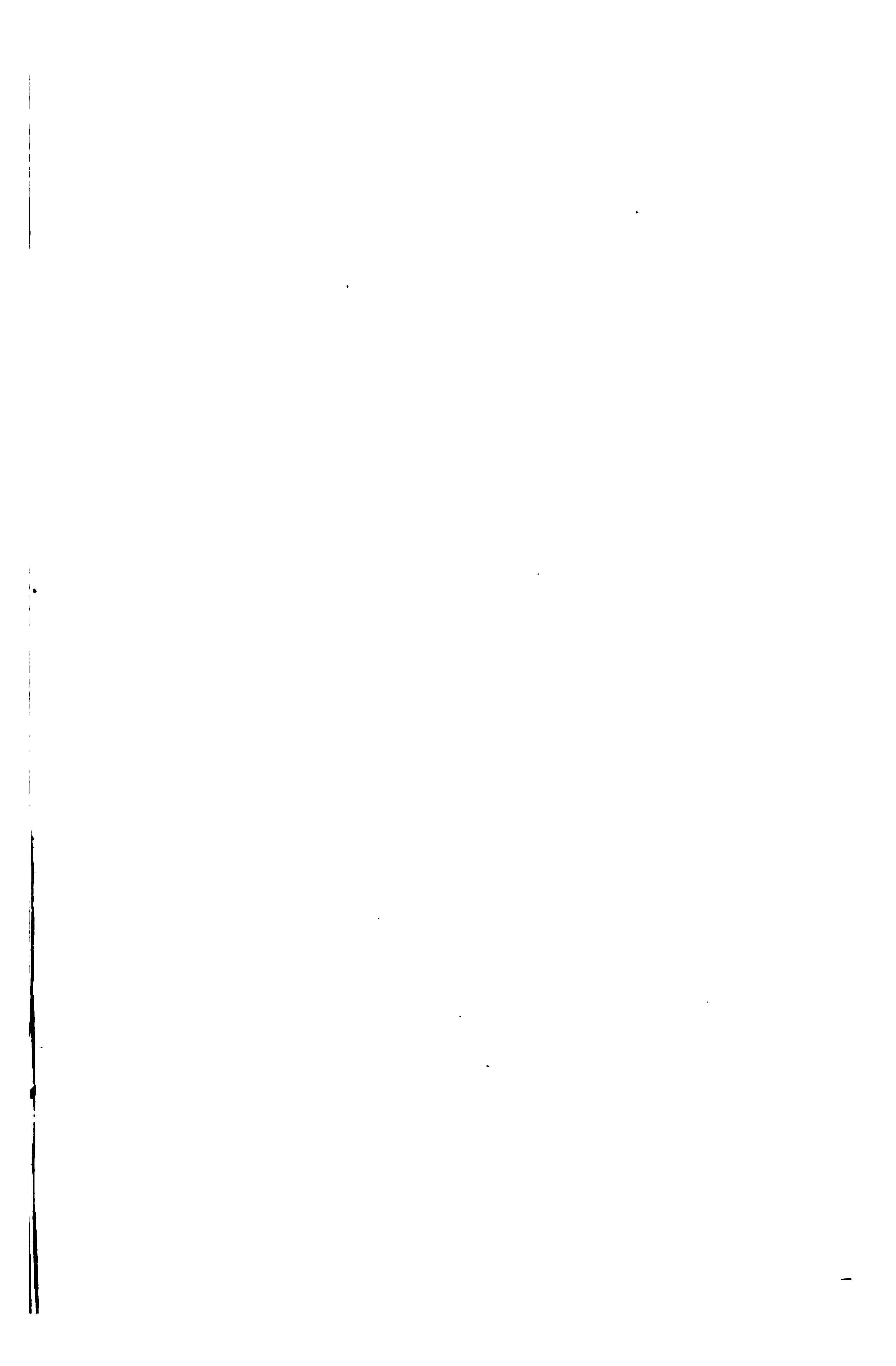


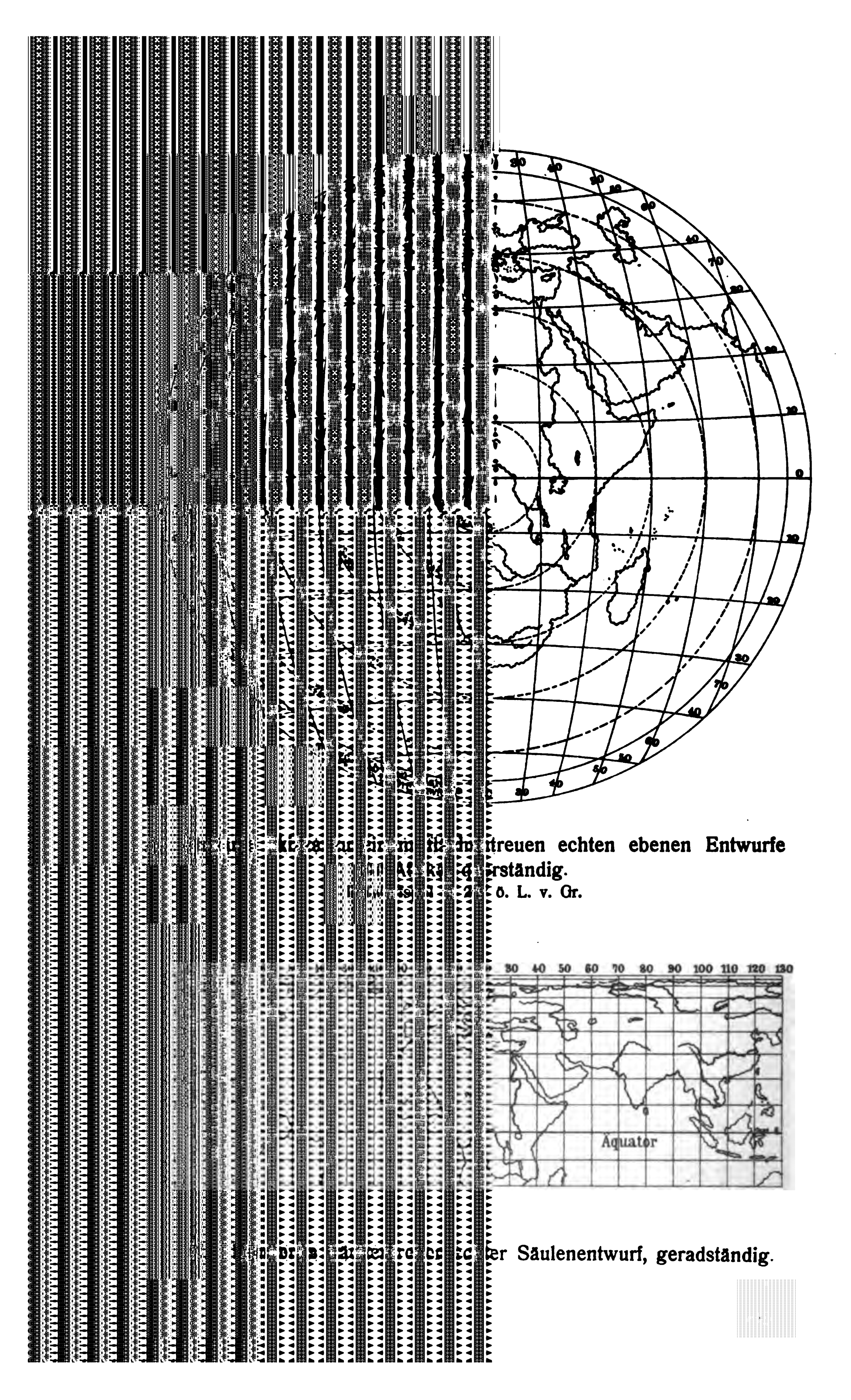
ebener Entwurf, querständig,

Hälfte.



[illegible] ner Entwurf, zwischenständig.



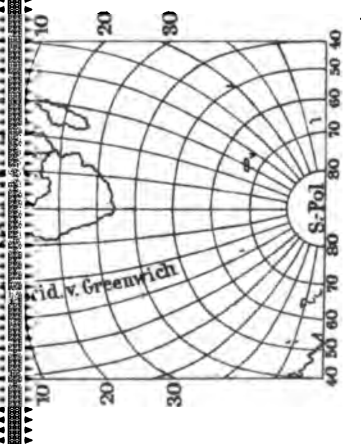


…treuen echten ebenen Entwurfe … Af… …rständig.
… ö. L. v. Gr.

…er Säulenentwurf, geradständig.

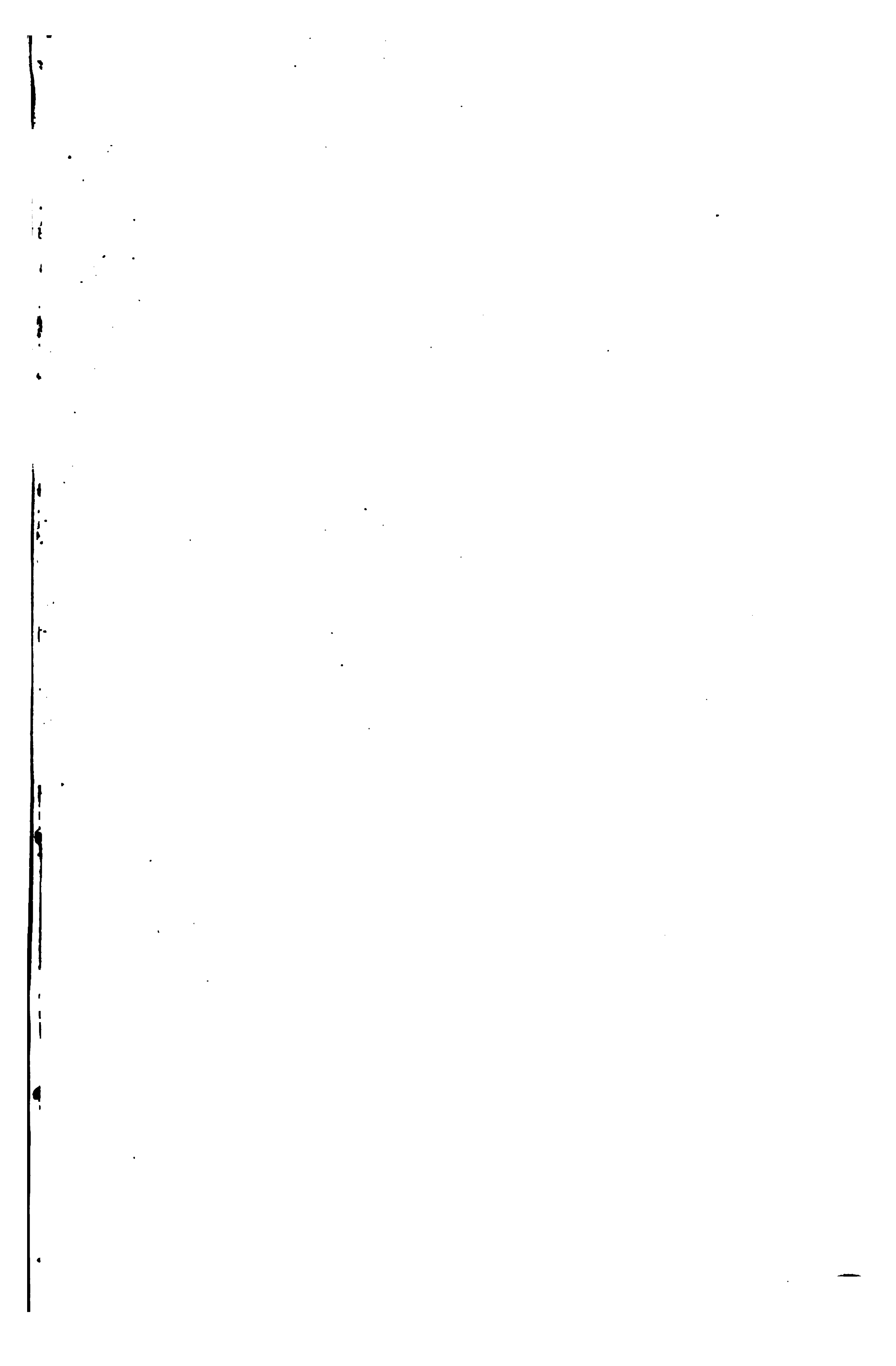
Tafel 3.

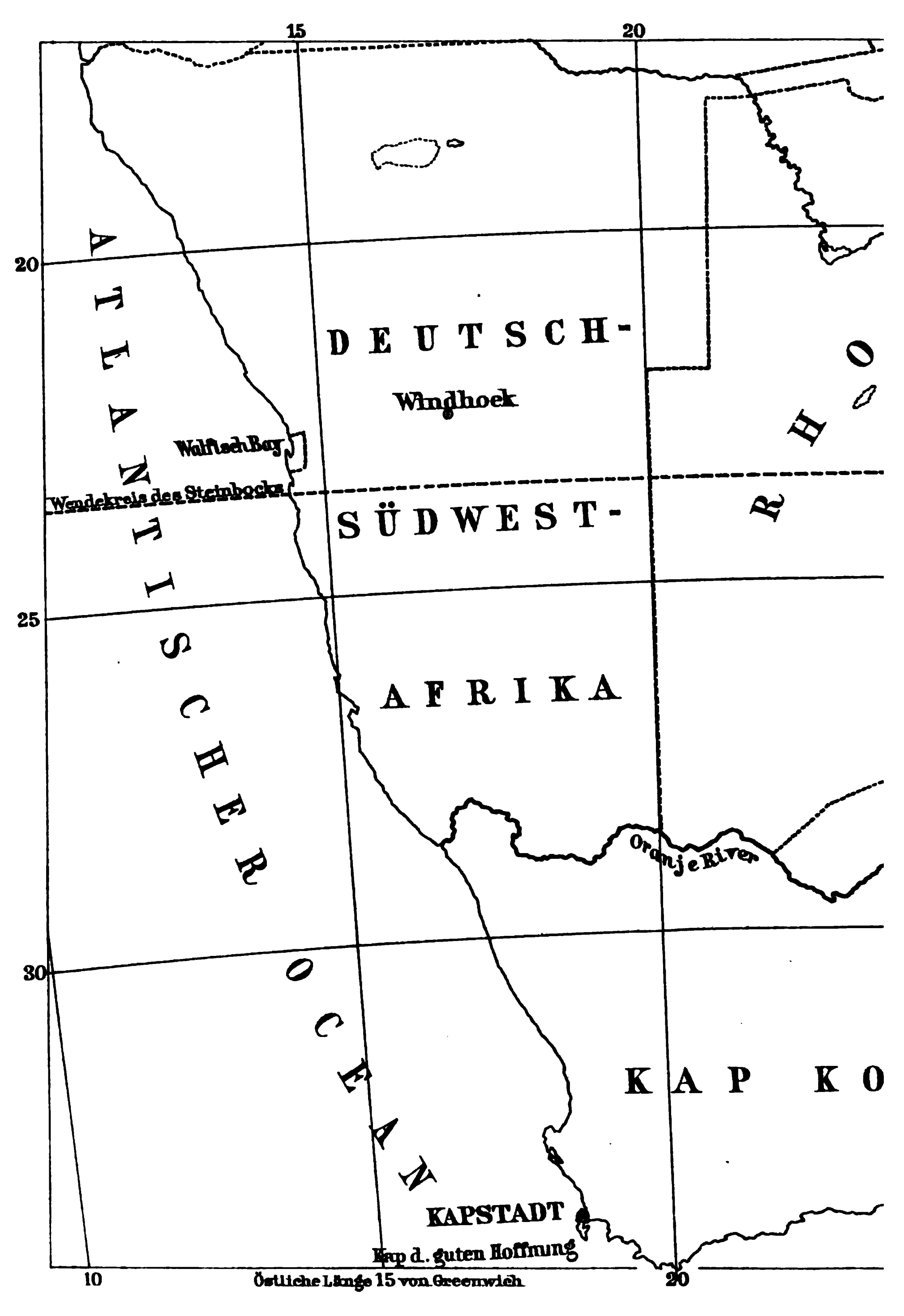
…entreuen echten ebenen Entwurfe
…ischenständig.
… u. 20° ö. L. v. Gr.



…Säulenentwurf, querständig.

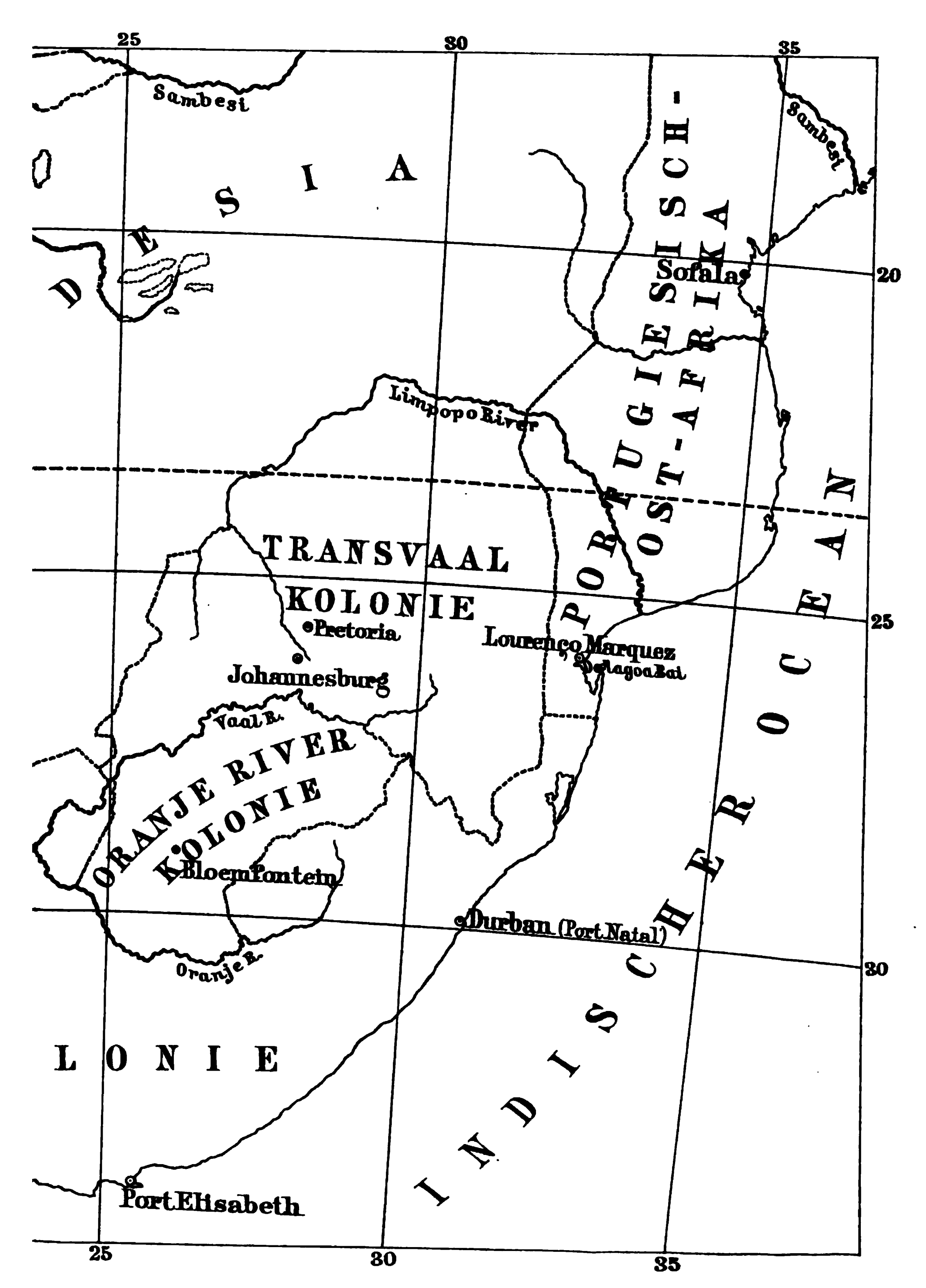






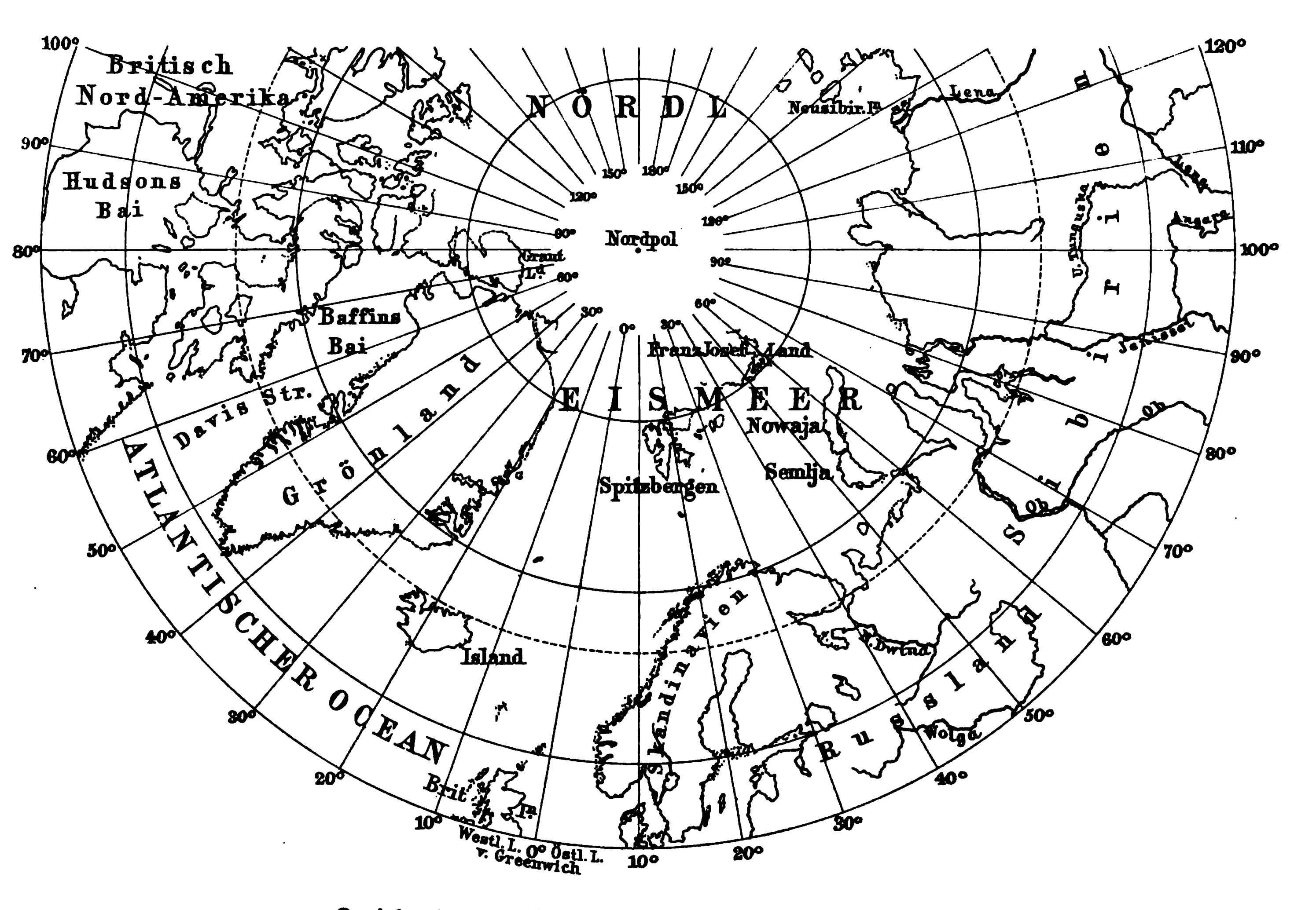
Winkeltreuer echter ebener (stereog

Entwurfspol in 25° s.



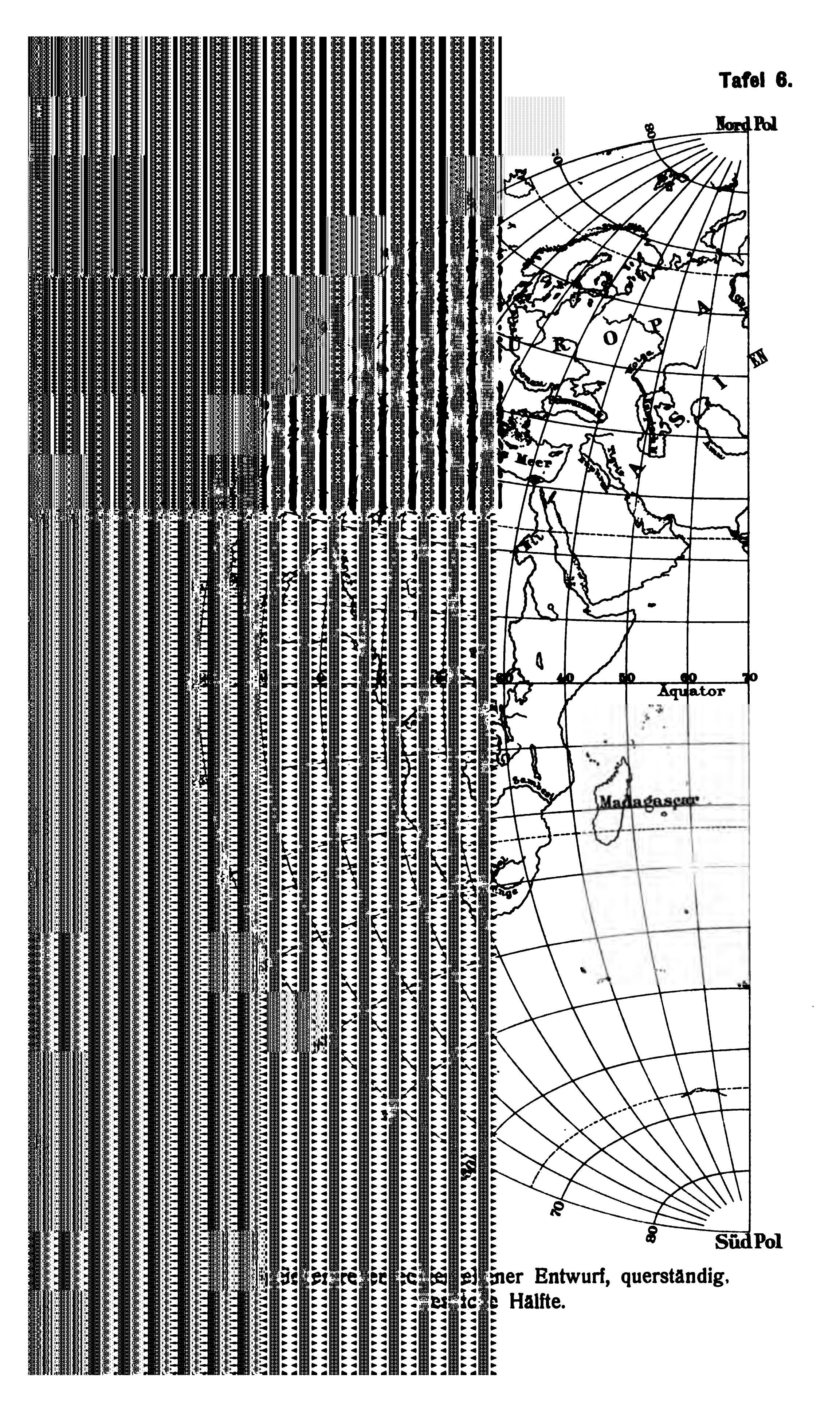
raphischer) Entwurf, zwischenständig.

Br. u. 25° ö. L. v. Gr.



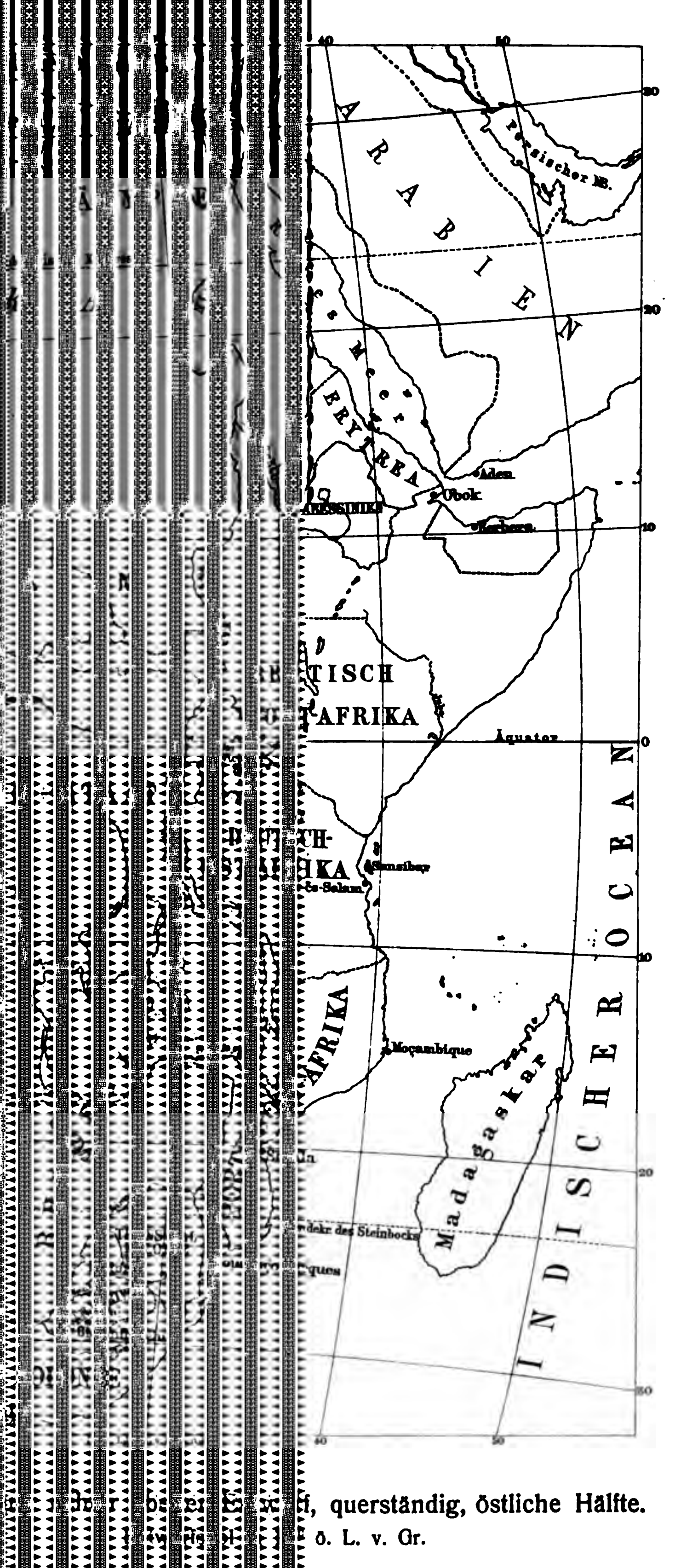
Speichentreuer echter ebener Entwurf, geradständig.

Tafel 6.

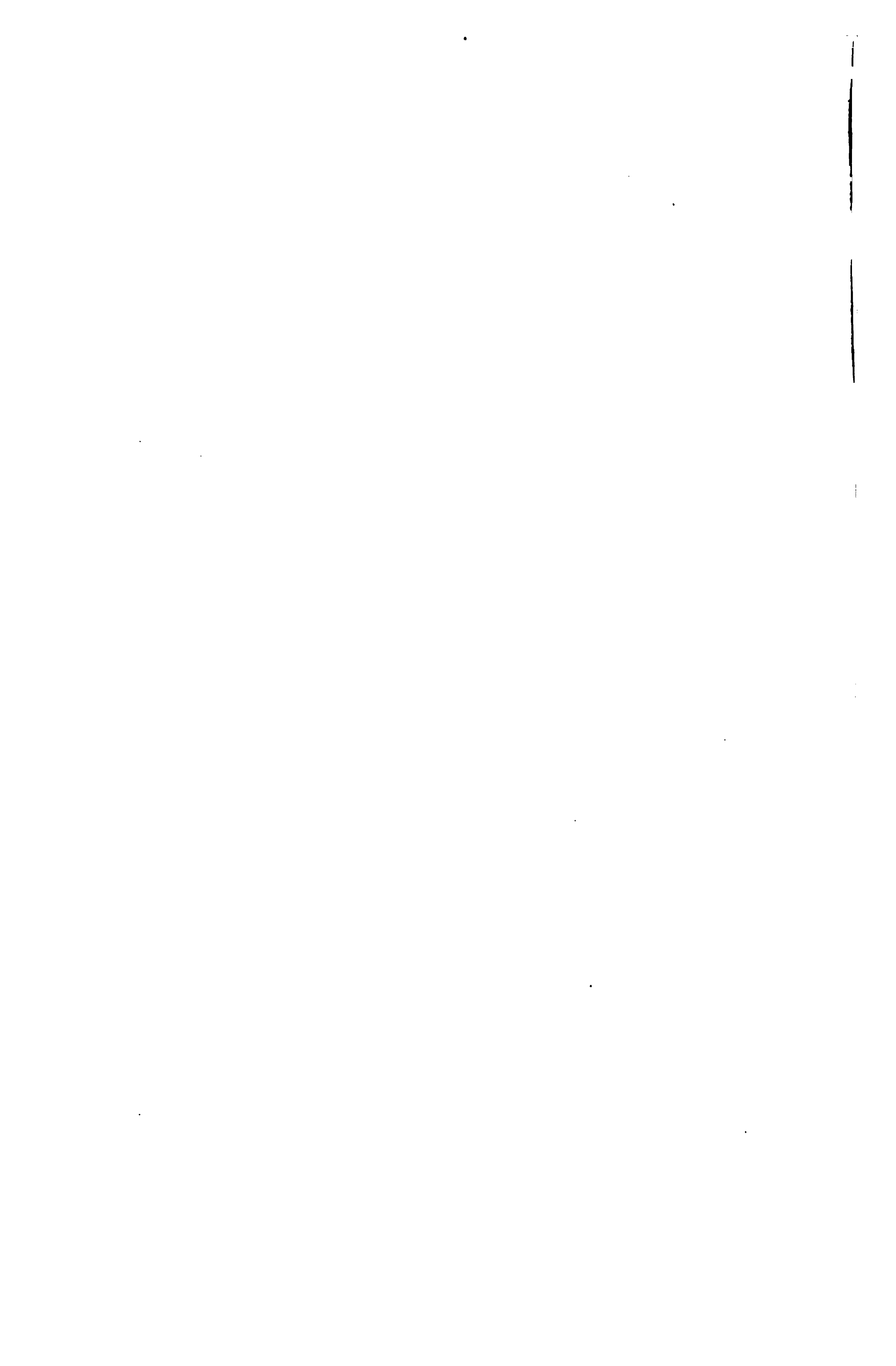


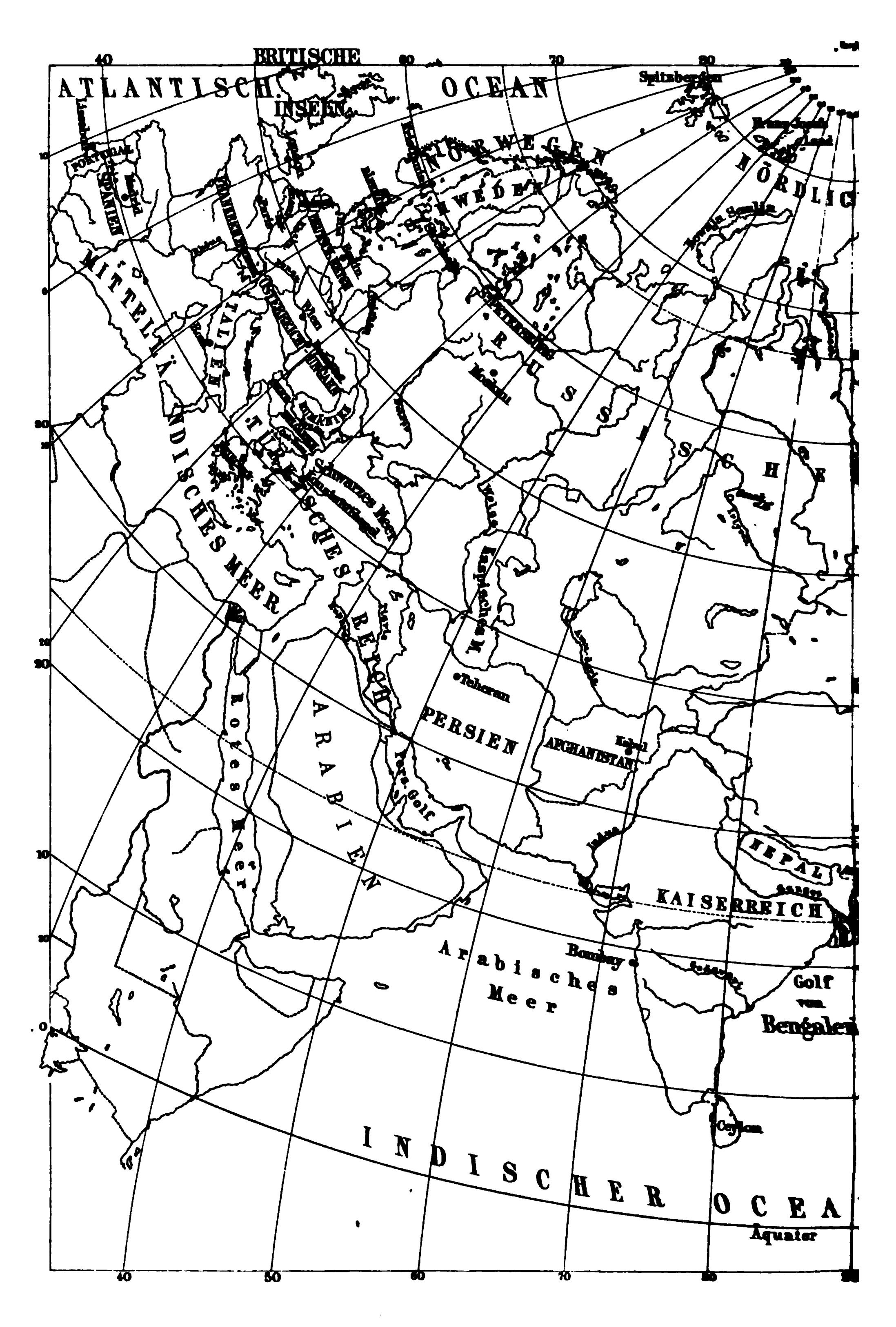
... ner Entwurf, querständig, ... Hälfte.

Tafel 7.



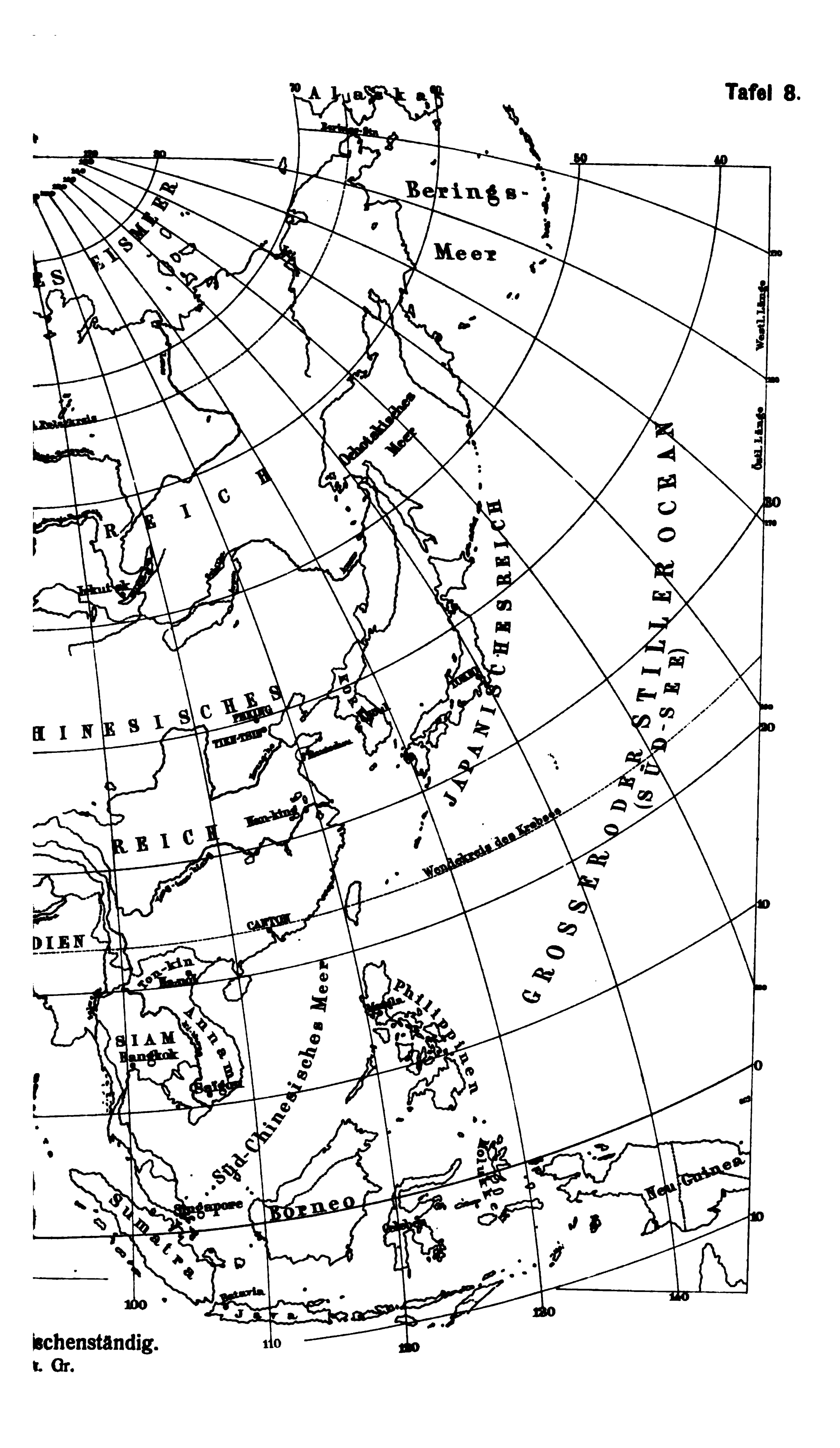
f, querständig, östliche Hälfte.
ö. L. v. Gr.



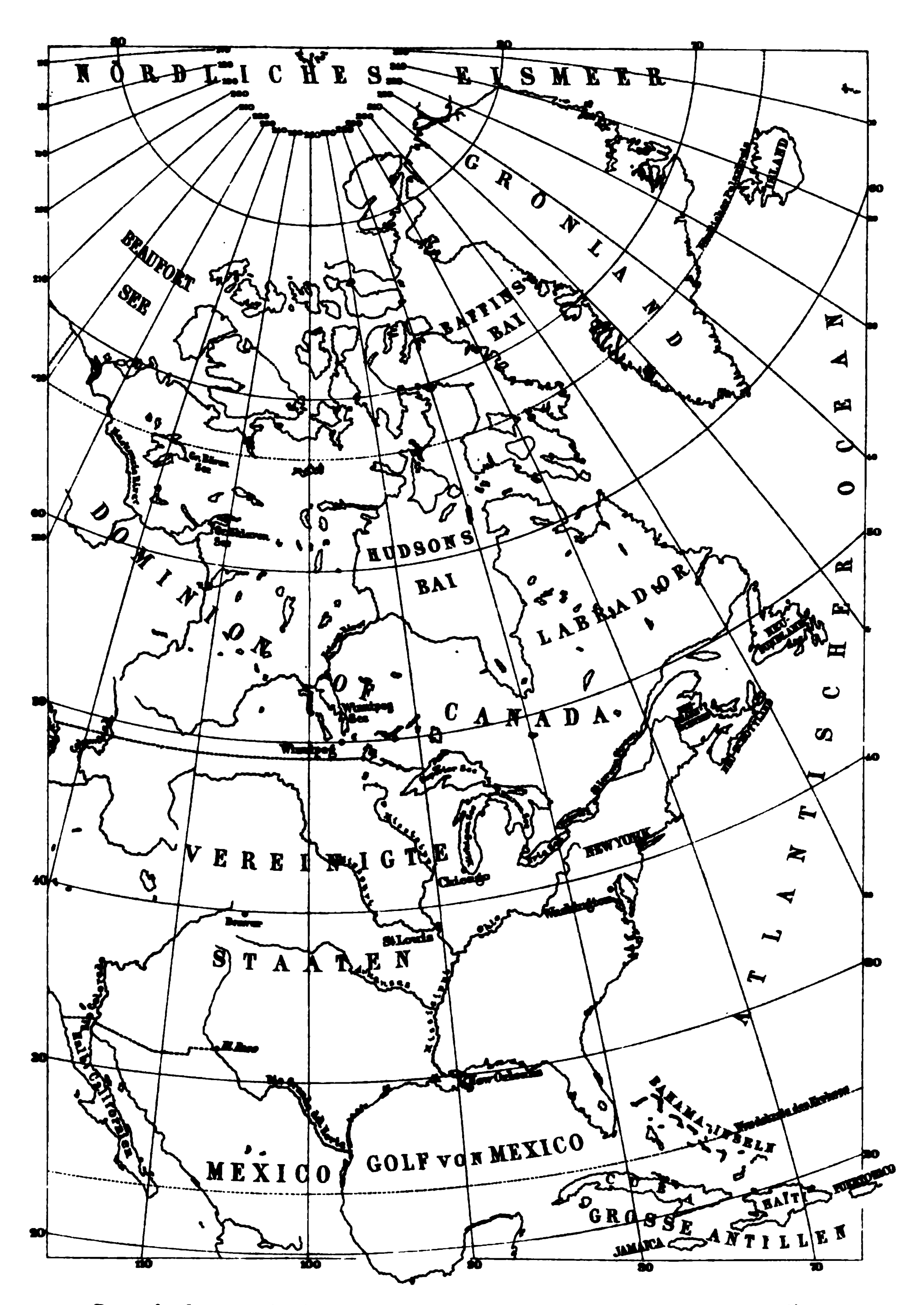


Speichentreuer echter ebener Entwurf,

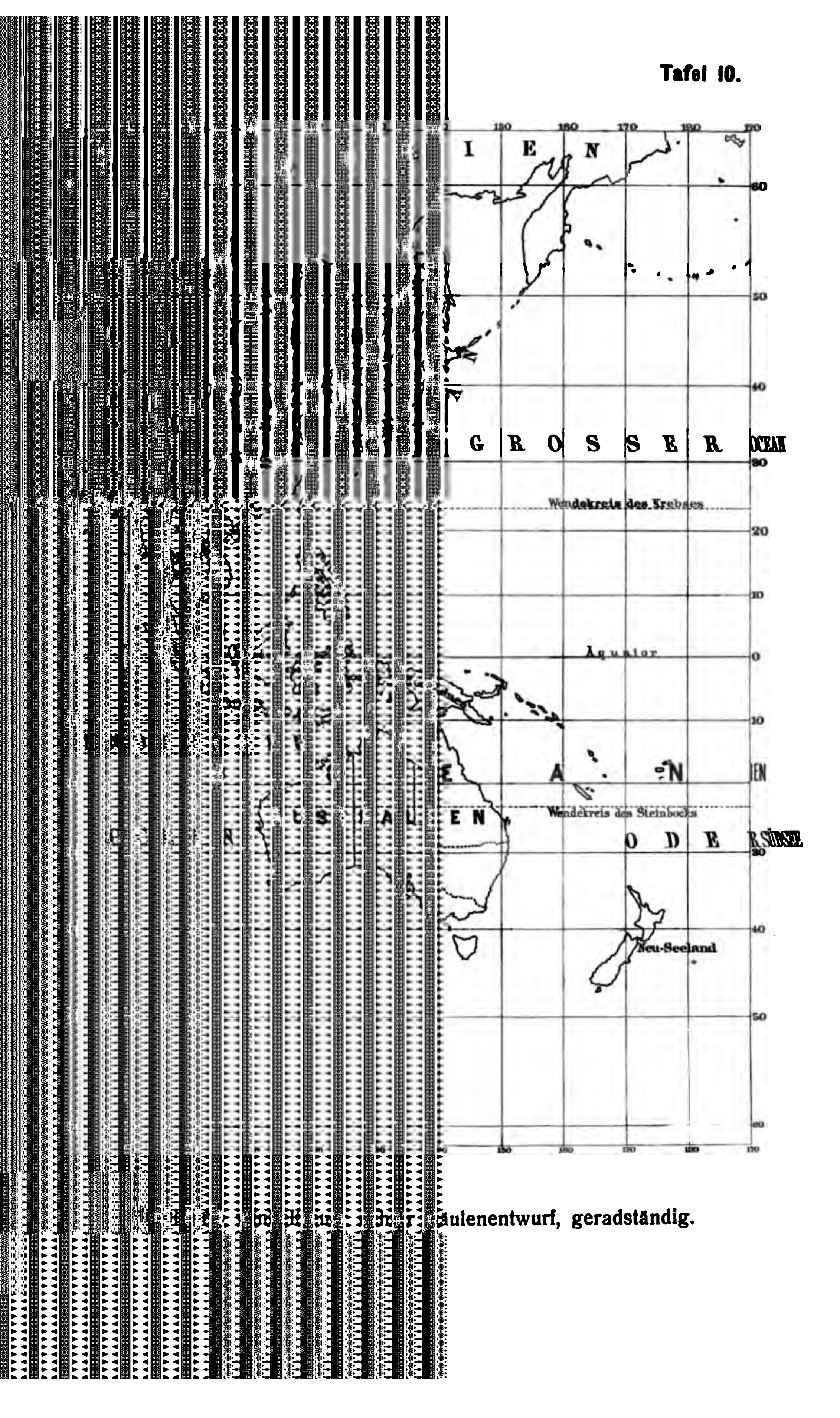
Entwurfspol in 40° n. Br. u. 90° ö.



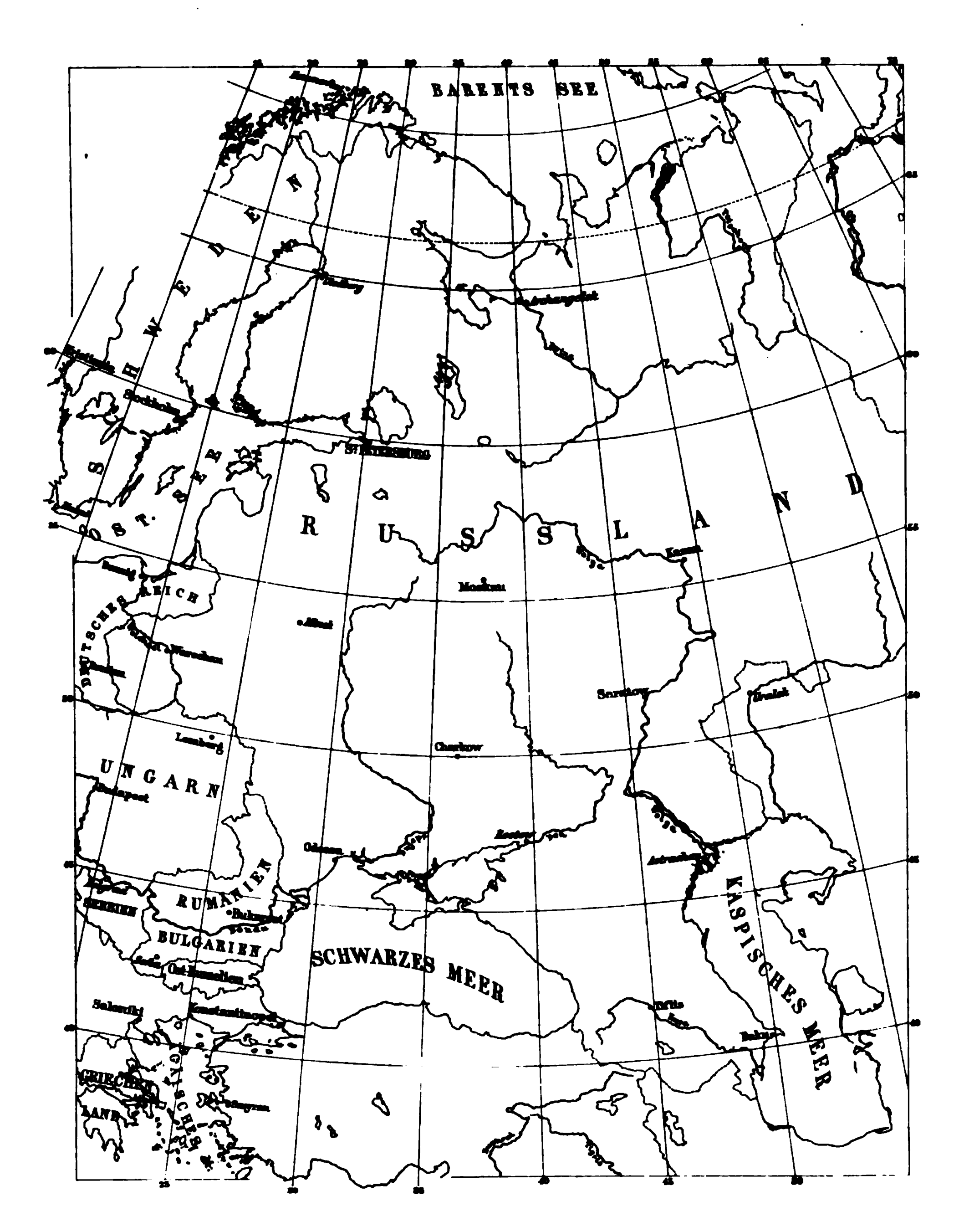
Tafel 8.
Alaska
Berings-Meer
ES EISMEER
REICH
Ochotskisches Meer
Irkutsk
HINESISCHES
PEKING
TIEN-TSIN
REICH
Nan-king
CANTON
DIEN
Ton-kin
Annam
SIAM
Bangkok
Saigon
Süd-Chinesisches Meer
Philippinen
Singapore
Borneo
Sumatra
Batavia
Java
Neu Guinea
JAPANISCHES REICH
GROSSER ODER STILLER OCEAN
(SÜD-SEE)
Wendekreis des Krebses
Westl. Länge
Östl. Länge
50
40
30
20
10
0
10
100
110
120
130
140
ischenständig.
t. Gr.



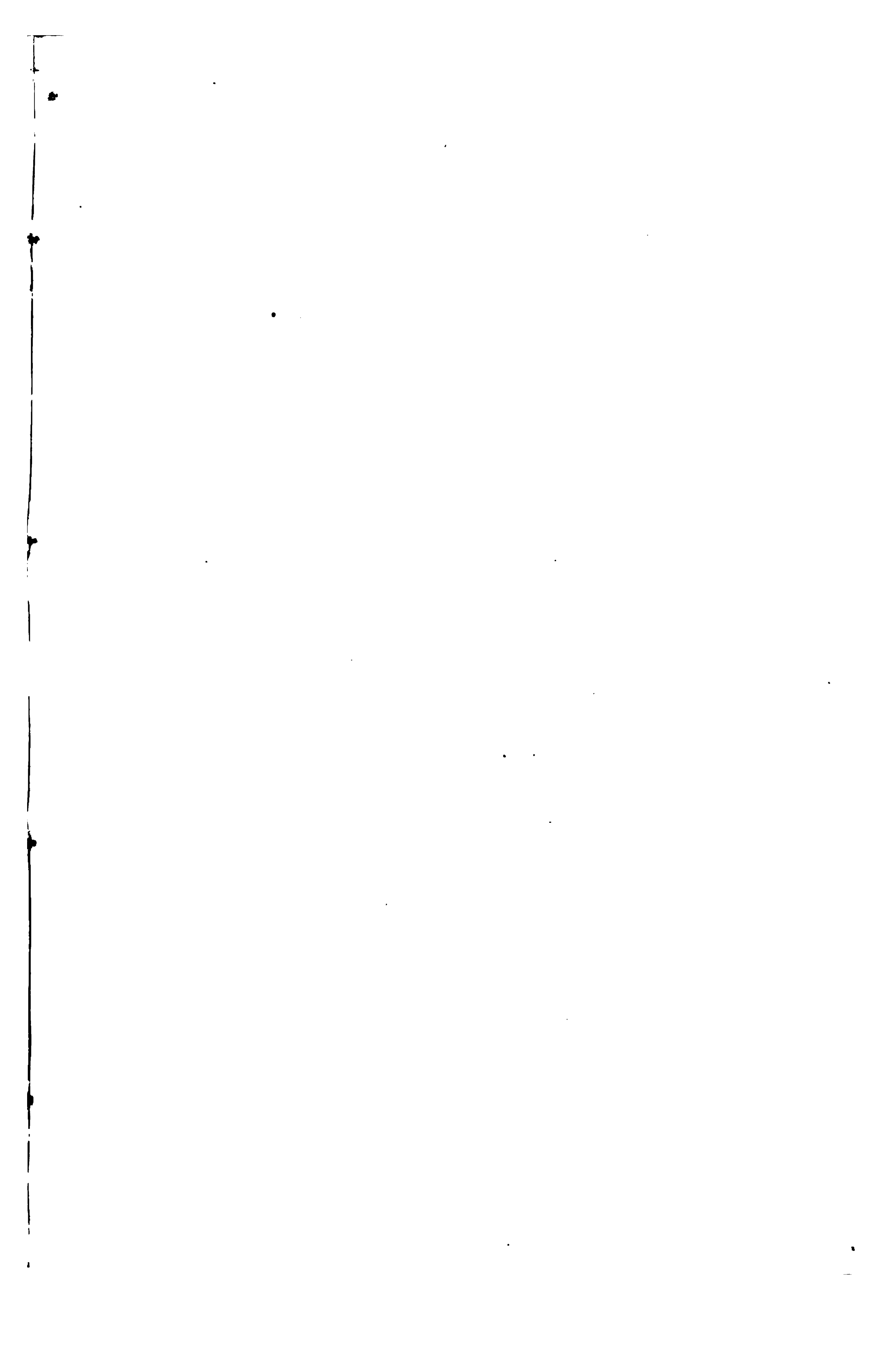
Breusing's vermittelnder echter ebener Entwurf, zwischenständig.
Entwurfspol in 45° n. Br. u. 100° ö. L. v. Gr. Östliche Hälfte, mit Hinweglassung des westlichen und südlichen Teils.

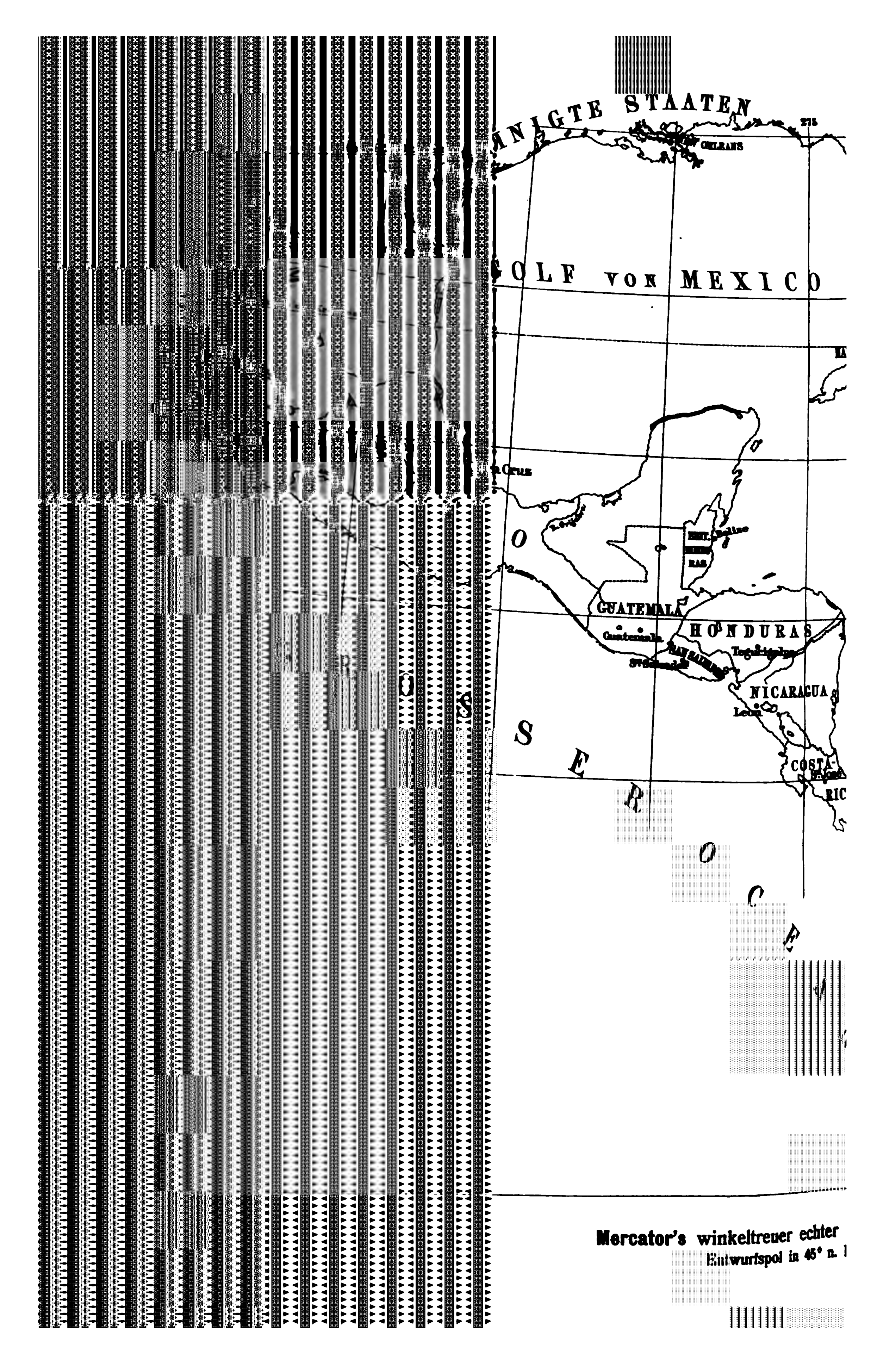


…ulenentwurf, geradständig.



Mercator's winkeltreuer echter Säulenentwurf, querständig.
Entwurfspol in 128° ö. L. v. Gr.





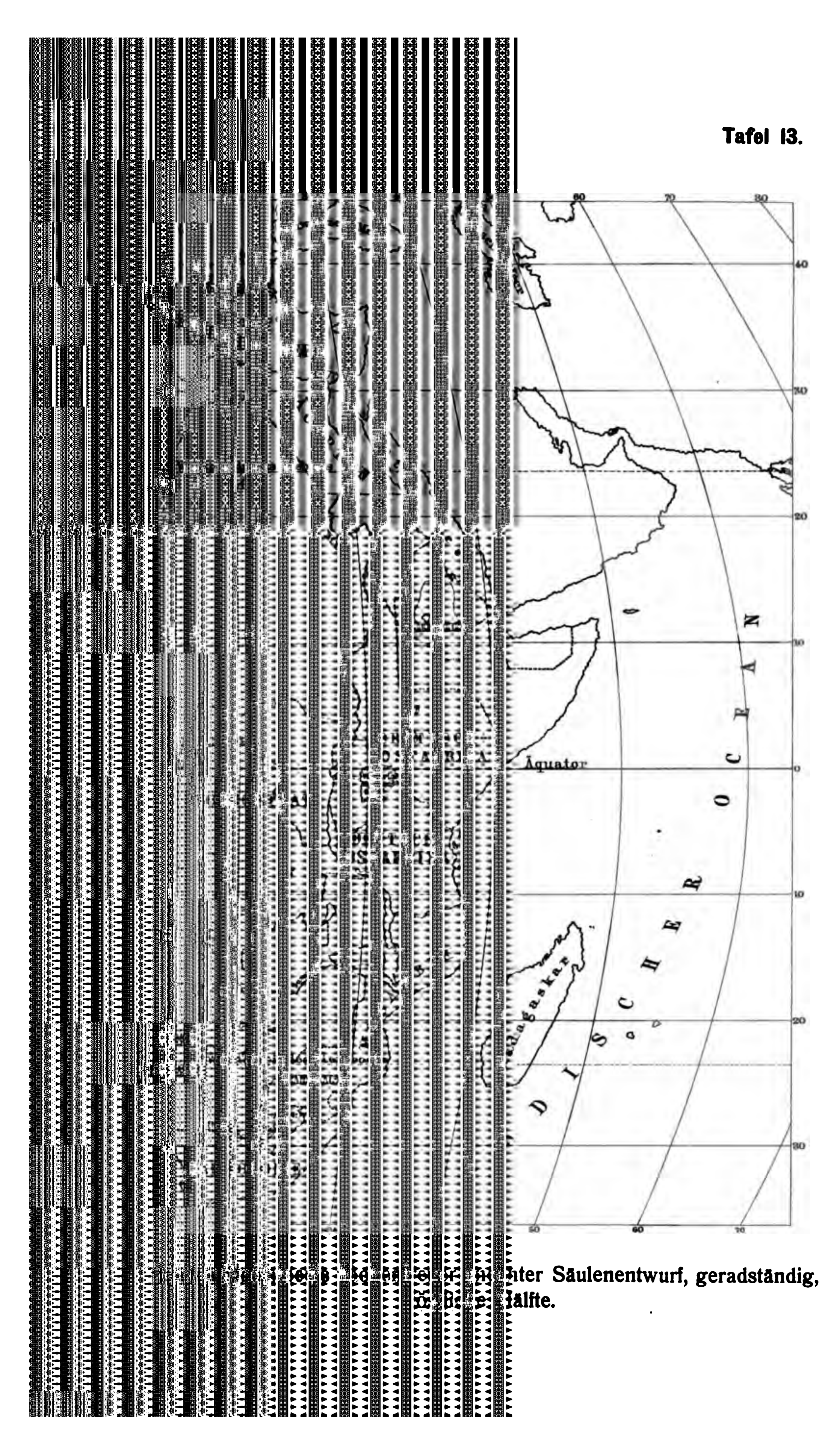
Mercator's winkeltreuer echter

Entwurfspol in 45° n.



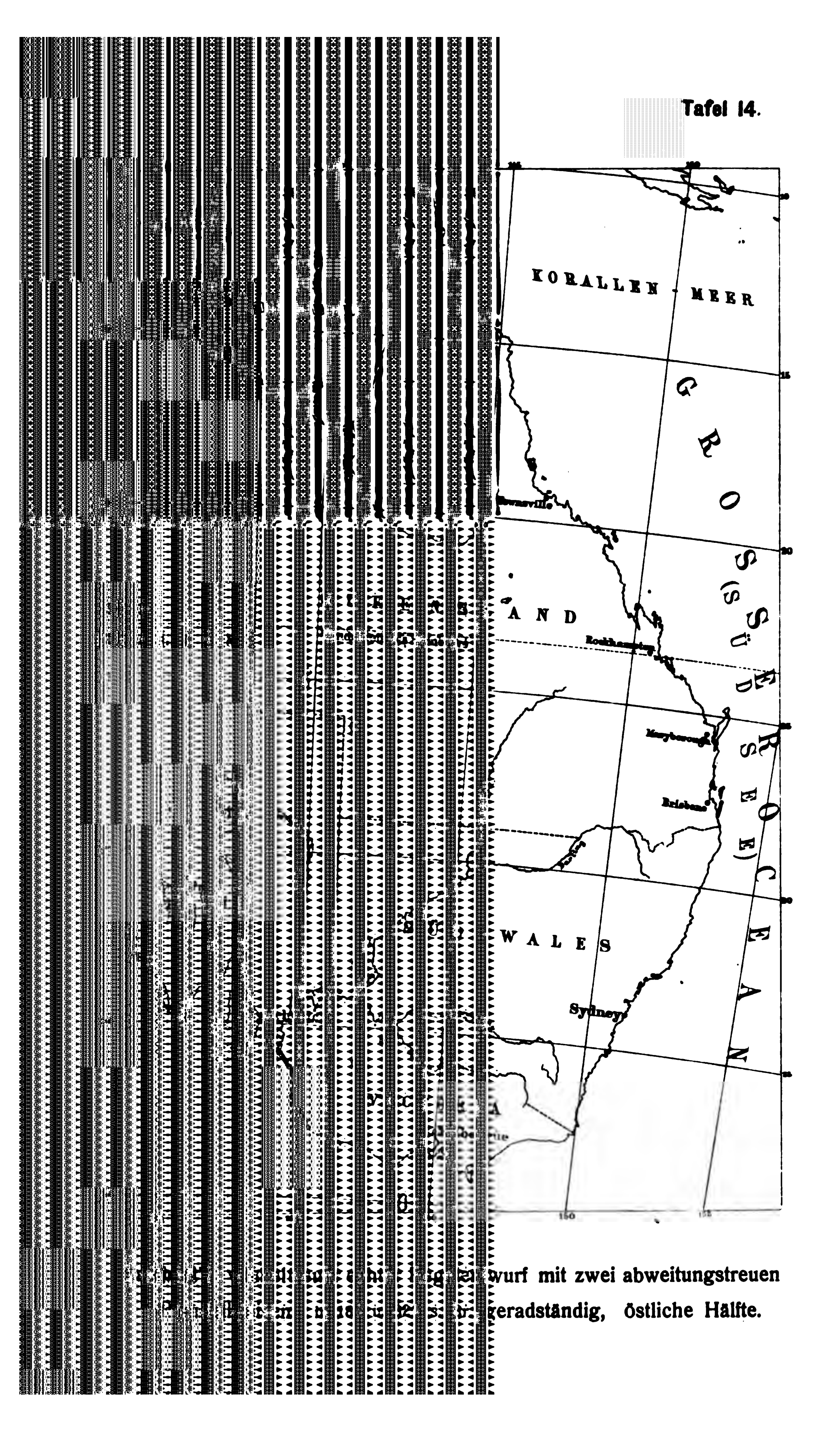
...ulenentwurf, zwischenständig.
...u. 25° ö. L. v. Gr.

Tafel 13.

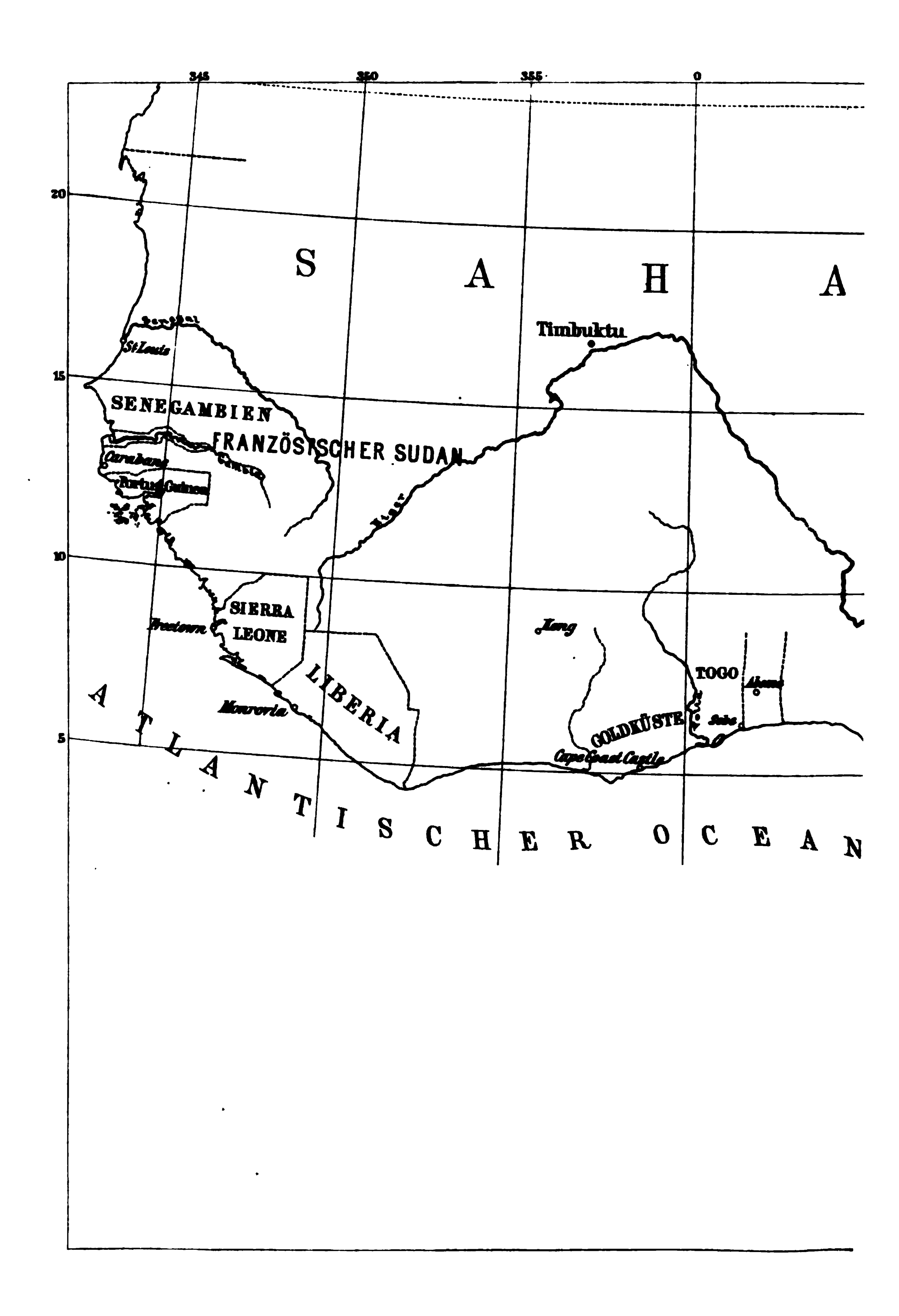


…hter Säulenentwurf, geradständig,
…Hälfte.

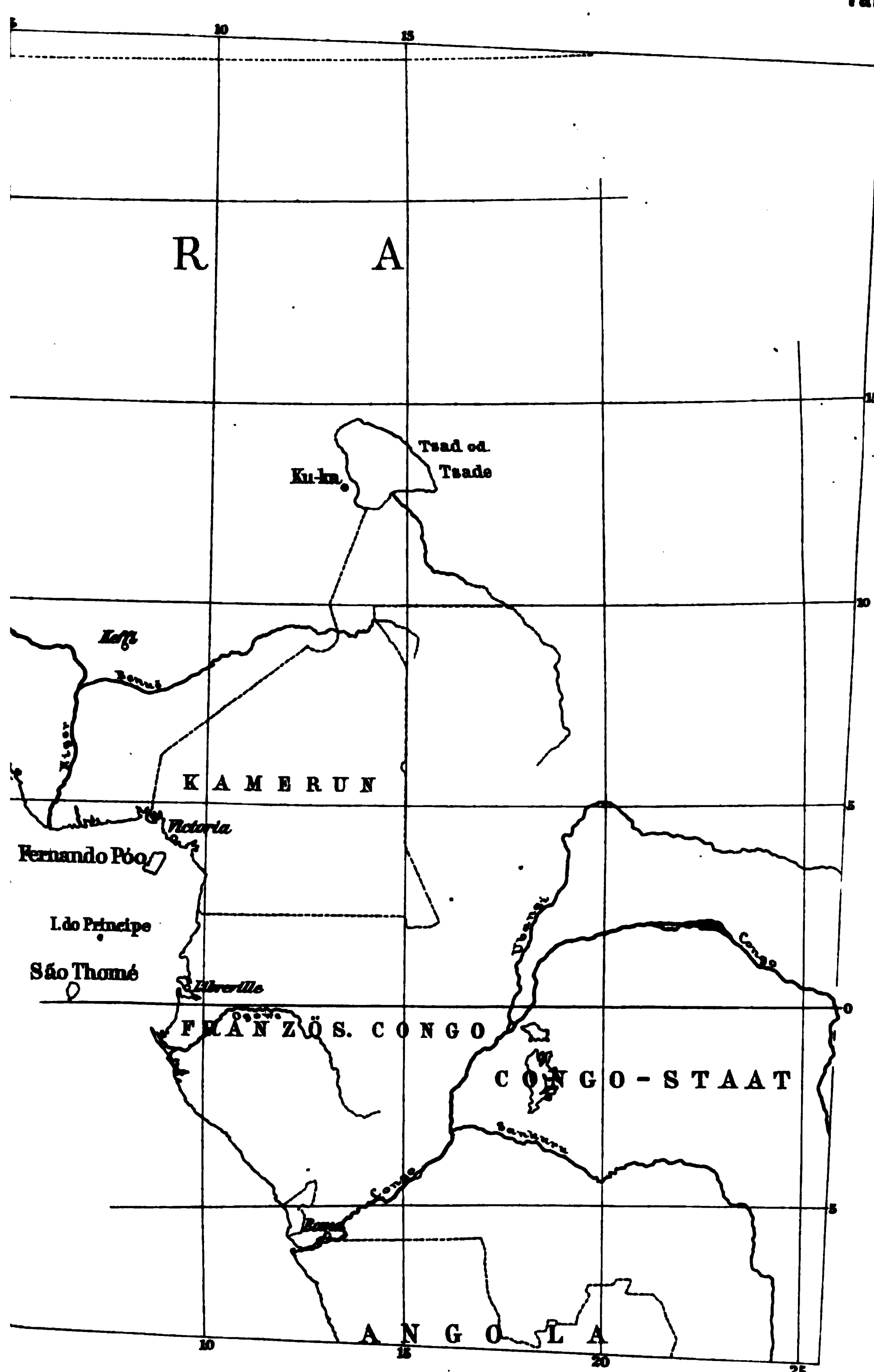
Tafel 14.



… wurf mit zwei abweitungstreuen
… geradständig, östliche Hälfte.

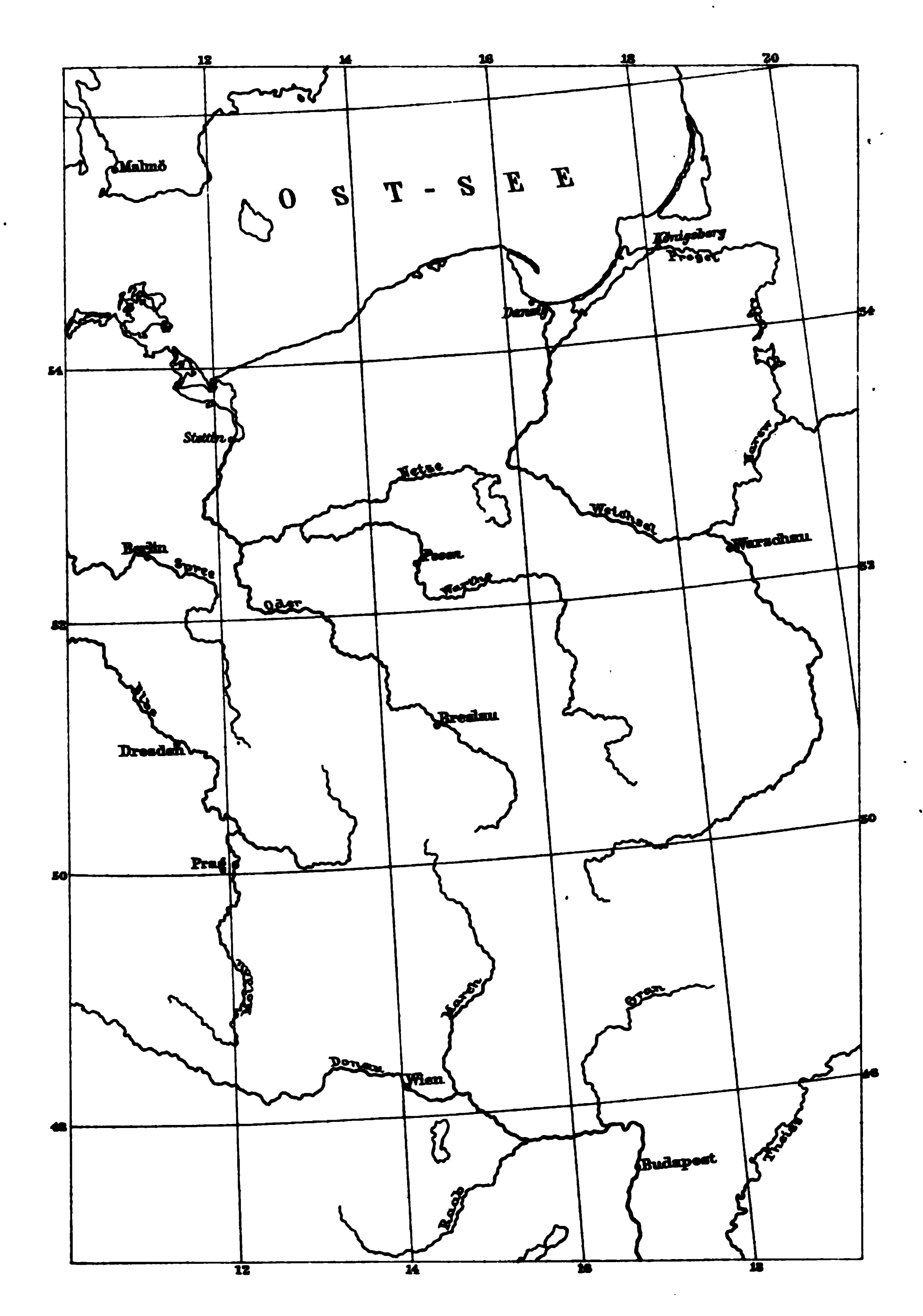


Lambert's winkeltreuer echter Kegelentwurf mit zwei
Entwurfspol in 10° s.

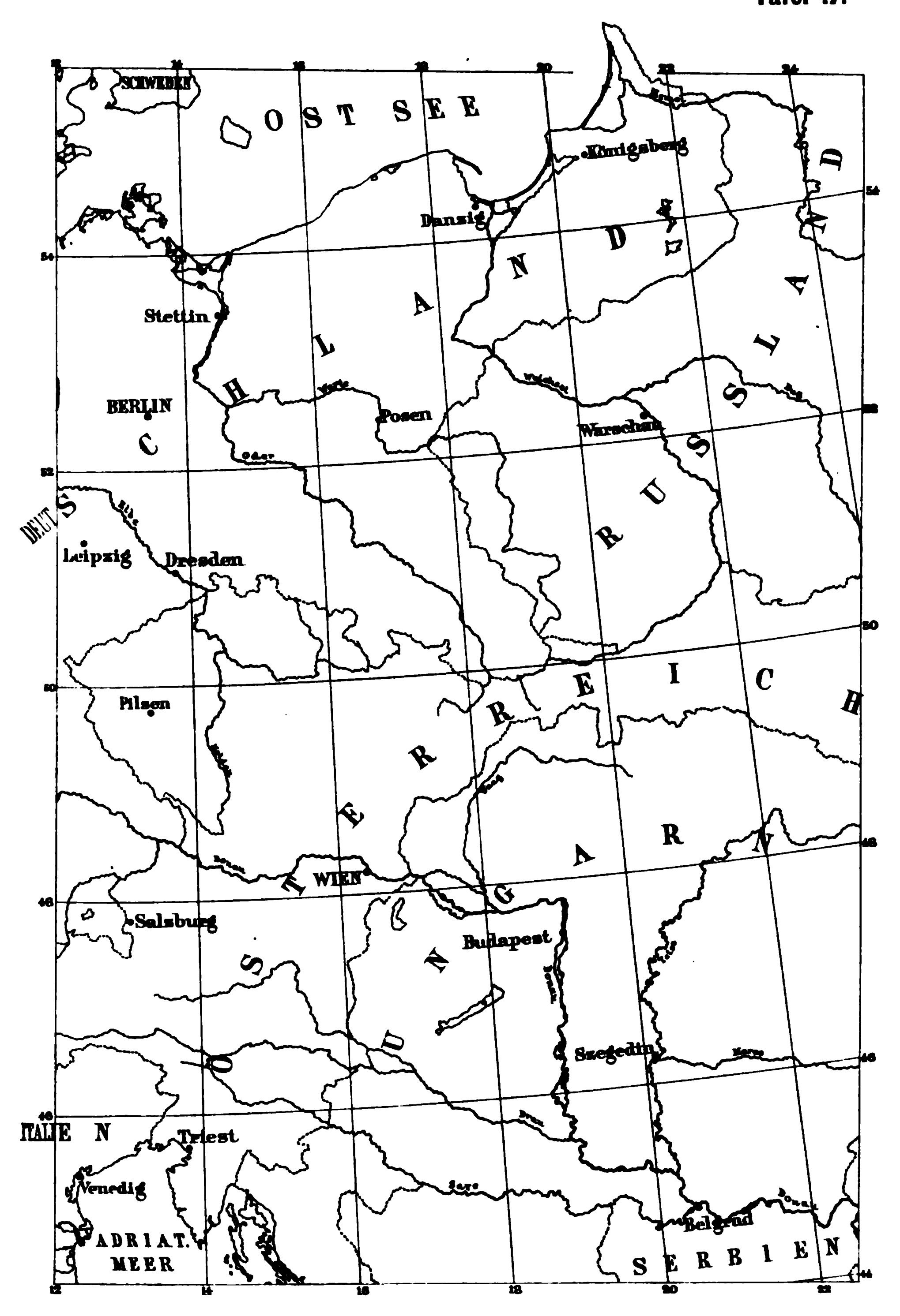


...weitungstreuen Parallelkreisen, zwischenständig.
...r. u. 5° w. L. v. Gr.

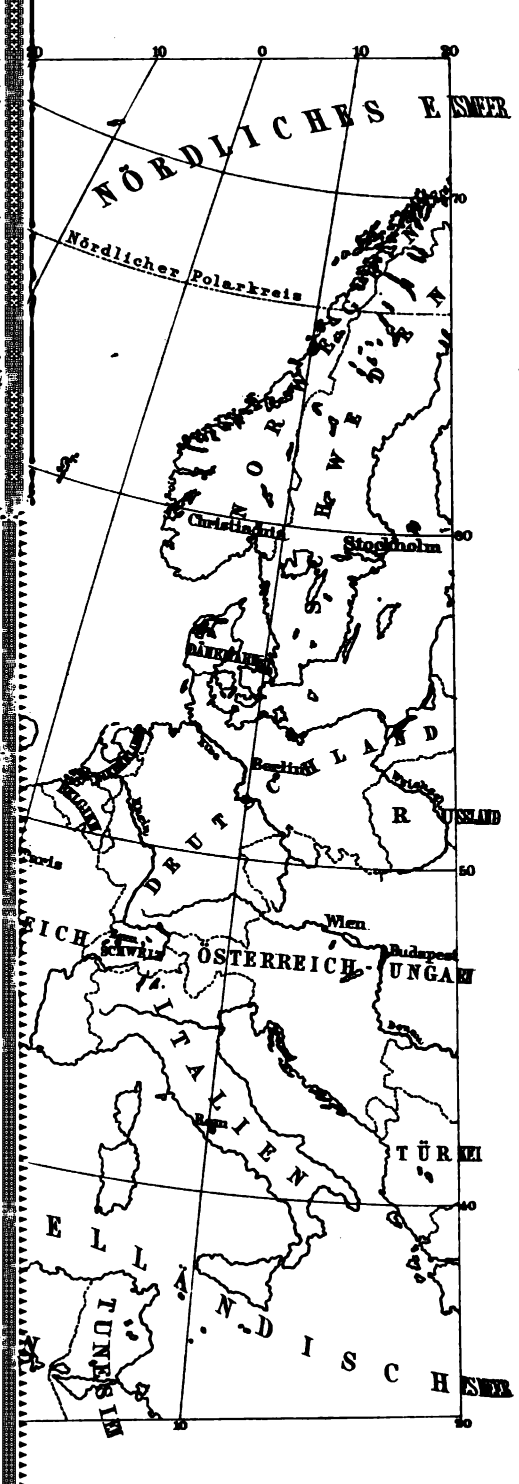




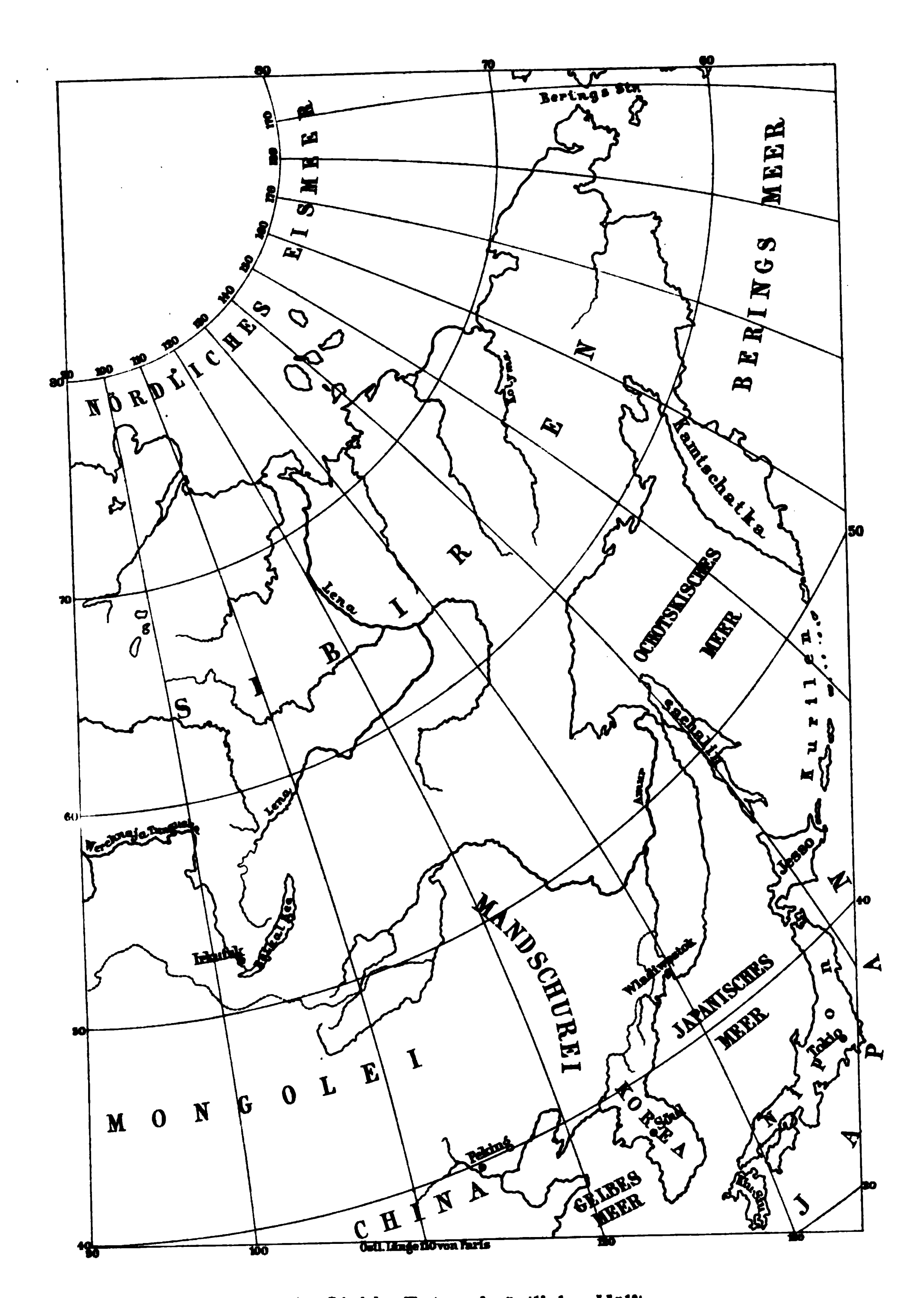
Ptolemäus speichentreuer Kegelentwurf, östliche Hälfte.



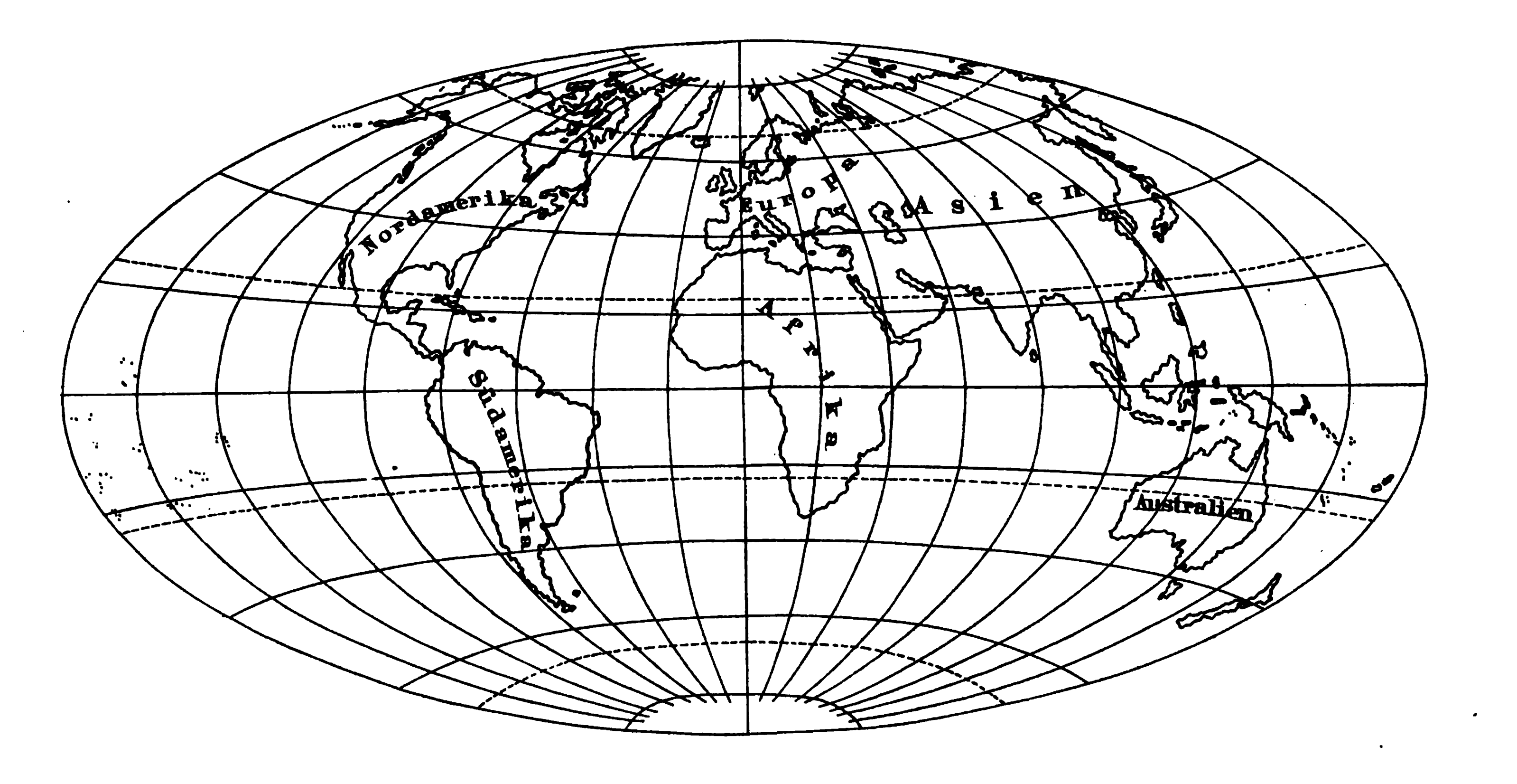
De l'Isle's echter Kegelentwurf mit zwei abweitungstreuen Parallelkreisen
in 47° 15' und 52° 45' n. Br. Östliche Hälfte.



Bs... westliche Hälfte.



Stab's Entwurf, östliche Hälfte.



Aitoffs Entwurf für die ganze Erde.

